

Chapitre 5

Compléments à l'étude des fonctions de plusieurs variables

5.1 Le théorème des accroissements finis et le développement limité de Taylor

5.1.1 Résultats dans $\mathbb{R}$

Rappelons que pour une fonction réelle d'une variable réelle, le théorème des accroissements finis (TAF) et développement limité de Taylor s'énoncent comme suit.

Théorème 5.1.1 1) (TAF) Soit f une fonction dérivable dans $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in]a, b[$. Pour tout $x \in I$, il existe u compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)Df(u).$$

2) (Développement limité de Taylor) Soient $I =]a, b[$, f une fonction p fois dérivable dans I et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ il existe u compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)Df(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(x_0) + \frac{(x - x_0)^p}{p!}D^p f(u).$$

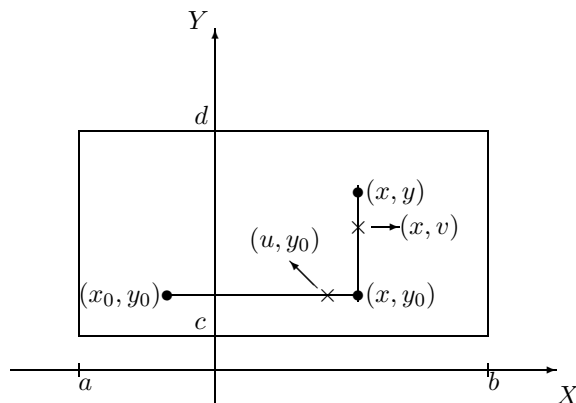
Ces résultats se généralisent aisément au cas de plusieurs variables réelles. Prenons le cas de deux variables; pour plus de deux variables, on procède exactement de manière analogue.

On se contentera aussi d'énoncer les résultats dans le cas de rectangle $]a, b[\times]c, d[$ (on pose $I =]a, b[$ et $J =]c, d[$). Ces résultats s'étendent facilement au cas d'ouverts plus généraux. Il faudra simplement veiller à travailler localement, de façon à ce que les segments joignant les différents points considérés restent inclus dans l'ensemble où la fonction est régulière.

5.1.2 TAF

Théorème 5.1.2 (TAF) Soit f une fonction dérivable dans $I \times J$ et soient $x_0 \in I, y_0 \in J$. Pour tous $x \in I, y \in J$, il existe u compris entre x_0 et x et v compris entre y_0 et y tels que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u, y_0) + (y - y_0)D_2f(x, v).$$



Preuve. Ce résultat résulte simplement de l'application du TAF dans $\mathbb{R}$ à deux reprises. En effet, on a

$$f(x, y) = f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0);$$

de plus, il existe u compris entre x et x_0 , v compris entre y et y_0 tels que

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)D_1f(u, y_0), \quad f(x, y) - f(x, y_0) = (y - y_0)D_2f(x, v).$$

Dès lors

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u, y_0) + (y - y_0)D_2f(x, v).$$

□

A une variable, on sait (cf Chapitre 2 du cours *Mathématiques générales A*) qu'une fonction dérivable est toujours continue. A plusieurs variables, des exemples montrent que ce résultat n'est plus vrai. Cependant, si f est dérivable et si ses dérivées partielles sont continues, alors f est continu dans U ; ce résultat est une conséquence du théorème des accroissements finis.

Corollaire 5.1.3 *Si f est dérivable dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et si ses dérivées partielles sont continues U alors f est continu dans U .*

Preuve. Fixons $(x_0, y_0) \in U$. Si (x, y) est voisin de (x_0, y_0) , par le théorème des accroissements finis, il existe des réels u et v respectivement compris entre x et x_0 , y et y_0 tels que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u, y_0) + (y - y_0)D_2f(x, v).$$

Vu la continuité des dérivées partielles de f , on obtient

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} D_1f(u, y_0) = D_1f(x_0, y_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} D_2f(x, v) = D_2f(x_0, y_0)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

□

Il s'ensuit que l'ensemble $C_p(U)$ est en fait l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent dans U et dont les dérivées d'ordre p sont continues dans U .

Signalons sans démonstration un résultat très important de la théorie des fonctions de plusieurs variables (nous l'énonçons dans le cas de deux variables mais il se généralise bien sûr de façon naturelle au cas de plus de deux variables).

Théorème 5.1.4 *Si f est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et si les dérivées D_1f , D_2f , D_2D_1f existent et si D_2D_1f est continu dans U , alors D_1D_2f existe et est égal à D_2D_1f dans U .*

En particulier, si f appartient à $C_2(U)$, alors $D_1D_2f = D_2D_1f$ dans U .

5.1.3 Développement limité de Taylor

Théorème 5.1.5 (*Développement limité de Taylor*) Soient $(x_0, y_0), (x, y) \in I \times J$.

Si $f \in C_1(I \times J)$, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(u_0, v_0) + (y - y_0)D_2f(u_0, v_0)$$

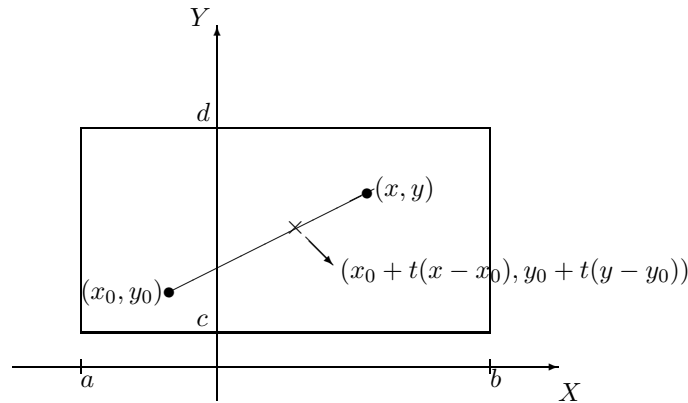
où on a posé $u_0 = x_0 + t_0(x - x_0)$, $v_0 = y_0 + t_0(y - y_0)$.

Si $f \in C_2(I \times J)$, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left((x - x_0)^2 D_1^2 f(u_0, v_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)D_1D_2f(u_0, v_0) + (y - y_0)^2 D_2^2 f(u_0, v_0) \right) \end{aligned}$$

où on a posé $u_0 = x_0 + t_0(x - x_0)$, $v_0 = y_0 + t_0(y - y_0)$.

Le résultat se généralise au cas de $f \in C_p(I \times J)$; la formule est assez longue mais est la généralisation naturelle des précédentes.



Les points du segment de droite joignant les points de coordonnées (x_0, y_0) et (x, y) ont pour coordonnées $(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$, $t \in [0, 1]$.

Preuve. Considérons le cas $p = 2$. Définissons la fonction

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)).$$

Cette fonction est définie et deux fois continûment dérivable dans un intervalle du type $]-\delta, 1 + \delta[$ où δ est un réel strictement positif.¹ Cela signifie que l'on considère la fonction de deux variables en des points d'un segment un peu plus long que celui joignant les points (x_0, y_0) et (x, y) . Pour alléger les notations, posons

$$f_1(t) = x_0 + t(x - x_0), \quad f_2(t) = y_0 + t(y - y_0).$$

Une application du développement de Taylor à la fonction F à l'ordre 2 dans cet intervalle de $\mathbb{R}$ fournit alors $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$F(1) = F(0) + DF(0) + \frac{1}{2}D^2F(t_0).$$

On a

$$\begin{aligned} DF(t) &= (x - x_0)D_1f|_{(f_1(t), f_2(t))} + (y - y_0)D_2f|_{(f_1(t), f_2(t))}, \\ D^2F(t) &= (x - x_0)^2 D_1^2 f|_{(f_1(t), f_2(t))} + 2(x - x_0)(y - y_0)D_2D_1f|_{(f_1(t), f_2(t))} + (y - y_0)^2 D_2^2 f|_{(f_1(t), f_2(t))} \end{aligned}$$

¹En effet, il existe $\delta > 0$ tel que $x_0 + t(x - x_0) \in I$, $y_0 + t(y - y_0) \in J$ pour tout $t \in]-\delta, 1 + \delta[$; le théorème de dérivation des fonctions composées peut alors s'appliquer.

et

$$F(1) = f(x, y), \quad F(0) = f(x_0, y_0).$$

En posant

$$u_0 = f_1(t_0) = x_0 + t_0(x - x_0), \quad v_0 = f_2(t_0) = y_0 + t_0(y - y_0)$$

on obtient la formule annoncée. $\square$

INTERPRÉTATION

1) Rappelons encore que, dans le cas d'une variable, lorsque f est dérivable en x_0 , ces résultats traduisent le fait que les points de la tangente au graphique de f en x_0 donnent une approximation à l'ordre 1 de f en x_0 . En effet, la tangente au graphique de f en x_0 est la droite d'équation $y = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ et on a

$$\begin{aligned} \text{approx} &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \text{approx}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0. \end{aligned}$$

Lorsque f appartient à $C_1(]a, b[)$, on a une bonne approximation du reste (et c'est ce qui est utile dans les applications):

$$f(x) - \text{approx} = f(x) - [f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)] = (x - x_0)[Df(u) - Df(x_0)]$$

où u est donné par le développement de Taylor. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (Df(u) - Df(x_0)) = 0.$$

2) Prenons maintenant le cas de $f \in C_1(U)$, $(x_0, y_0) \in U$. La représentation graphique de f est la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne

$$z = f(x, y) \quad \text{ou encore} \quad G(x, y, z) = 0$$

avec $G(x, y, z) = f(x, y) - z$. Le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , où $z_0 = f(x_0, y_0)$ est un point du graphique de f . Le plan d'équation cartésienne

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0)$$

est appelé plan tangent au graphique de f en (x_0, y_0) (ou plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0)). Les points de ce plan donnent une approximation à l'ordre 1 de f en (x_0, y_0) . En effet on a

$$\begin{aligned} \text{approx} &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0) \\ f(x, y) - \text{approx} &= f(x, y) - [f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0)] \\ &= (x - x_0)[D_1f(u_0, v_0) - D_1f(x_0, y_0)] + (y - y_0)[D_2f(u_0, v_0) - D_2f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} [D_1f(u_0, v_0) - D_1f(x_0, y_0)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} [D_2f(u_0, v_0) - D_2f(x_0, y_0)] = 0$$

et comme

$$|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad |y - y_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - \text{approx}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} &= \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \frac{(x - x_0)[D_1 f(u_0, v_0) - D_1 f(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \frac{(y - y_0)[D_2 f(u_0, v_0) - D_2 f(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vu la définition du plan tangent, le vecteur de composantes

$$(D_1 f(x_0, y_0), D_2 f(x_0, y_0), -1) = \text{grad} G|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

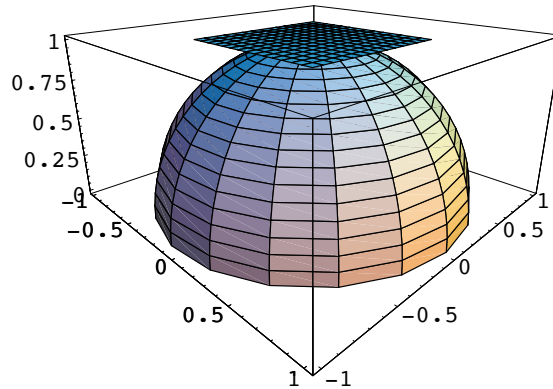
est un vecteur normal au plan tangent à la surface d'équation $G(x, y, z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) .

Voici deux illustrations. La première représente une demi-sphère (équation de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; on a représenté les points de cote positive) et le plan tangent au point $(0, 0, 1)$. Comme l'équation de la sphère est $G(x, y, z) = 0$ avec $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, on a

$$\text{grad} G|_{(x, y, z)} = (2x, 2y, 2z)$$

et le plan en question a donc pour équation

$$0 = \text{grad} G|_{(0, 0, 1)} \bullet (x, y, z - 1) = z - 1.$$

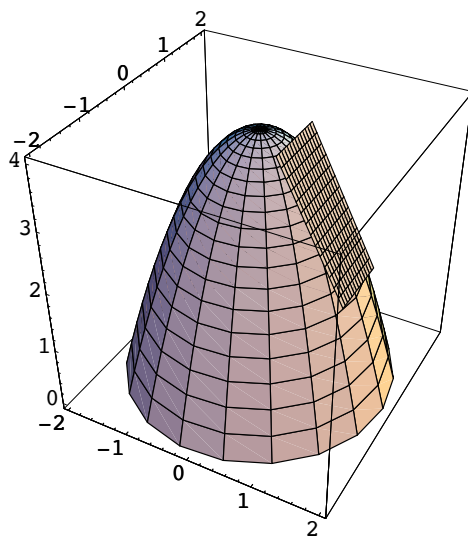


La seconde représente les points du paraboloïde elliptique d'équation $z = 4 - x^2 - y^2$ dont la cote est positive et le plan tangent au point de coordonnées $(1, 0, 3)$. Comme $G(x, y, z) = z - 4 + x^2 + y^2$, on a ici

$$\text{grad} G|_{(x, y, z)} = (2x, 2y, 1)$$

et le plan tangent au point de coordonnées $(1, 0, 3)$ a donc pour équation

$$0 = \text{grad} G|_{(1, 0, 3)} \bullet (x - 1, y, z - 3) = z + 2x - 5.$$



De nombreuses autres illustrations figurent par exemple dans le livre “Calculus, with analytic geometry”, R. Ellis, D. Gulick.

3) Une autre interprétation justifiant le nom “plan tangent” à la surface $\mathcal{S}$ pour le plan

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)D_1f(x_0, y_0) + (y - y_0)D_2f(x_0, y_0)$$

ou plus généralement pour le plan

$$(z - z_0)D_3G(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)D_2G(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)D_3f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

est celle-ci: si $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, $t \in I$ est une courbe régulière incluse dans $\mathcal{S}$ passant par (x_0, y_0, z_0) en $t = t_0$, on a

$$G(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = 0, \quad t \in I$$

donc, en dérivant les deux membres par rapport à t et en considérant l'égalité obtenue pour $t = t_0$, on obtient

$$\begin{aligned} Df_1(t_0)D_3G(x_0, y_0, z_0) + Df_2(t_0)D_2G(x_0, y_0, z_0) + Df_3(t_0)D_3f(x_0, y_0, z_0) \\ = \text{grad}G|_{(x_0, y_0, z_0)} \bullet (Df_1(t_0), Df_2(t_0), Df_3(t_0)) = 0. \end{aligned}$$

Le plan (vectoriel) dont il est question ci-dessus contient donc la tangente à toute courbe incluse dans la surface.

5.2 Extrema libres

On introduit la notion de maximum, de minimum (local ou global) comme dans les cas des fonctions d'une variable réelle (et à valeurs réelles). Considérons le cas de deux variables; celui de trois variables ou même plus se traite de même.

Définition 5.2.1 Si f est défini dans A et si $(x_0, y_0) \in A$, on dit que (x_0, y_0) correspond à un maximum local des valeurs de f s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in A, |x - x_0| \leq \varepsilon, |y - y_0| \leq \varepsilon.$$

Si, dans l'inégalité précédente entre les valeurs de f , on peut prendre tous les points de A , on dit que le maximum est global. De plus, si l'inégalité est stricte pour $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ on ajoute le qualificatif strict au terme maximum.

Une définition analogue existe bien sûr pour un minimum.

On dit que (x_0, y_0) est un extremum de f s'il est minimum ou maximum.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle encore, on donne des conditions (nécessaires, suffisantes) pour qu'un point donne lieu à un extremum. Ces conditions font intervenir ici les dérivées partielles. Bien sûr, si la fonction n'est pas dérivable, seule une étude directe (repassant à la définition) est possible.

Propriété 5.2.2 Soit f défini et dérivable dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in U$. Si (x_0, y_0) est un extremum de f , alors

$$D_1 f(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

Preuve. Cela se démontre comme dans le cas d'une variable. $\square$

Définition 5.2.3 Un point où toutes les dérivées partielles de f sont nulles est appelé point stationnaire pour f .

Signalons encore que si on désigne (quel que soit le nombre de variables) par $\text{grad}f_{(x,y,z)}$ le vecteur des dérivées partielles de f , un point stationnaire correspond à un point où le gradient de f est nul.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, il ne suffit pas qu'un point soit stationnaire pour qu'il soit extremum. La condition suffisante pratique pour rechercher les extrema d'une fonction d'une variable (à savoir f deux fois continûment dérivable, $Df(x_0) = 0$, $D^2f(x_0) > 0$ ou $D^2f(x_0) < 0$) se traduit ici par l'étude des valeurs propres d'une matrice réelle symétrique, appelée matrice hessienne de f . Introduisons cette matrice et une égalité fondamentale dans laquelle elle intervient.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, deux fois continûment dérivable dans U , en utilisant le développement limité de Taylor, rappelons que l'on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2} ((x - x_0)^2 D_1^2 f(u_0, v_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) D_1 D_2 f(u_0, v_0) + (y - y_0)^2 D_2^2 f(u_0, v_0)) \end{aligned}$$

ou encore

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0) H_f(u_0, v_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

si (x_0, y_0) est un point stationnaire pour f , si (x, y) est proche de (x_0, y_0) et si on a défini la

matrice hessienne de f

par

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x, y) & D_2 D_1 f(x, y) \\ D_1 D_2 f(x, y) & D_2^2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x, y) & D_2 D_1 f(x, y) \\ D_2 D_1 f(x, y) & D_2^2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Réécrivons

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} E_f(x, y)$$

où

$$E_f(x, y) = (x - x_0, y - y_0) H_f(u_0, v_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

On voit donc directement que, selon le signe de $E_f(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) , on pourra donner des informations quant au caractère extremal de (x_0, y_0) pour f . Cette expression s'étudie au moyen d'outils relevant de l'algèbre linéaire. En effet, pour tout (x, y) , la matrice hessienne de f en (x, y) est hermitienne et réelle (autrement dit réelle symétrique); ses valeurs propres sont donc toujours réelles et le signe de la fonction $E_f(x, y)$ au voisinage de (x_0, y_0) est conditionné par la répartition en signes différents de ces valeurs propres.

L'intérêt de la présentation ci-dessus et de l'étude générale des matrices hermitiennes réelles réside dans le fait que les résultats sont généralisables à n variables sans aucune difficulté. Dans le cas de deux variables, de nombreuses simplifications apparaissent (dans les résultats d'algèbre linéaire). Nous commençons par étudier ce cas.

Exemple 1 Considérons la fonction $f(x, y) = 3 - x^2 + 2x - y^2 - 4y$ et recherchons ses extrema éventuels.

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Sa représentation graphique est une surface quadrique. On peut voir assez directement que sa représentation graphique est un paraboloïde elliptique et donc déjà deviner le résultat.

Recherchons ses points stationnaires. Pour cela, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) &= 0 \\ D_2 f(x, y) &= 0. \end{cases}$$

Ici, cela donne directement $x = 1, y = -2$ comme unique solution.

La matrice hessienne $H_f(x, y)$ est constante et même diagonale; en tout (x, y) , elle est égale à

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$f(x, y) = f(1, -2) + (-(x-1)^2 - (y+2)^2) = 8 - (x-1)^2 - (y+2)^2$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient donc facilement

$$E_f(x, y) < 0, \forall (x, y) \neq (1, -2)$$

donc

$$f(x, y) = f(1, -2) + \frac{1}{2} E_f(x, y) < f(1, -2)$$

et $(1, -2)$ donne lieu à un maximum strict global de f dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ et recherchons ses extrema éventuels.

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Sa représentation graphique est une surface quadrique; on voit directement qu'il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique.

Recherchons ses points stationnaires. Pour cela, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) &= 0 \\ D_2 f(x, y) &= 0. \end{cases}$$

Ici, cela donne directement $x = 0, y = 0$ comme unique solution.

On voit directement que ce point ne donne pas lieu à un extremum car, si $y = 0, x \neq 0$, on a

$$f(x, 0) = f(0, 0) + x^2 = x^2 > 0$$

et, si $x = 0, y \neq 0$, on a

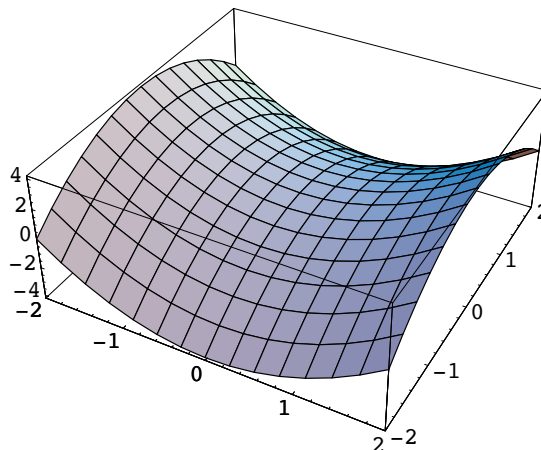
$$f(0, y) = f(0, 0) - y^2 = -y^2 < 0.$$

Remarquons que, dans ce cas, la matrice hessienne $H_f(x, y)$ est constante et même diagonale; en tout (x, y) , elle est égale à

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Elle donne lieu à

$$E_f(x, y) = 2x^2 - 2y^2.$$



Représentation de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Dans ces exemples, l'étude du signe de $E_f(x, y)$ est très simple car la matrice hessienne est diagonale ET constante. Cela ne se passe bien sûr pas toujours aussi bien.

Enonçons les résultats permettant une étude plus générale dans le cas d'une fonction de deux variables.

Propriété 5.2.4 *Considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, une fonction $f \in C_2(U)$ et un point stationnaire $(x_0, y_0) \in U$ de f .*

1) *Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$ alors (x_0, y_0) est un minimum local strict de f dans U .*

2) *Si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0) < 0$ alors (x_0, y_0) est un maximum local strict de f dans U .*

3) *Si $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$ alors (x_0, y_0) n'est pas extremum de f dans U .*

Preuve. A compléter.

Remarquons que dans si $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$ (resp. $D_2^2 f(x_0, y_0) > 0$) alors $D_2^2 f(x_0, y_0) > 0$ (resp. $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$). La propriété pourrait donc tout aussi bien s'exprimer à l'aide de la dérivée seconde par rapport à y .

Exemple 3 Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$ et recherchons ses extrema éventuels.

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles.

Recherchons ses points stationnaires. Pour cela, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} D_1 f(x, y) = 0 \\ D_2 f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Après quelques calculs, on obtient les solutions $(3, 3)$ et $(-1, -1)$.

On a

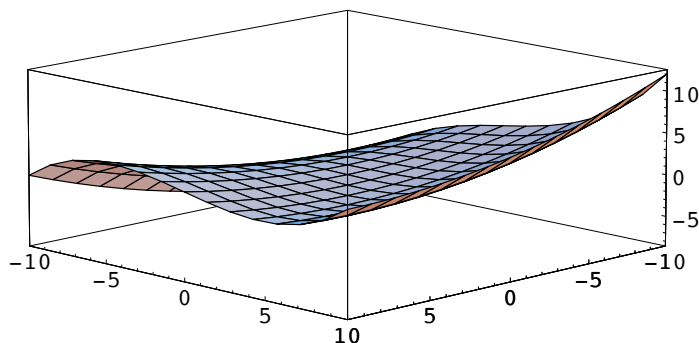
$$\det(H_f(3,3)) = 8, \quad D_1^2 f(3,3) = 2$$

donc $(3,3)$ correspond à un minimum local strict.

On a

$$\det(H_f(-1,-1)) = -8$$

donc $(-1,-1)$ n'est pas un extremum.



5.3 Application: la régression linéaire

Il s'agit d'une application de l'étude des extrema des fonctions dites "quadratiques".

5.3.1 Généralités

Une fonction de deux variables réelles² du type

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$$

où les coefficients des variables x, y sont des réels et où les a_{ij} ne sont pas tous nuls est appelée *fonction quadratique*. On les a déjà rencontrées précédemment dans le cadre de ce cours car elles sont intimement liées aux coniques et aux quadriques: dans le plan muni d'un repère, une équation du type $f(x, y) = 0$ est l'équation cartésienne d'une conique (en toute généralité) et dans l'espace muni d'un repère, une équation du type $z = f(x, y)$ est l'équation d'une quadrique³.

Dans ce cas simple, le système permettant de déterminer les points stationnaires de f s'écrit

$$\begin{cases} D_x f(x, y) = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2b_1 = 0 \\ D_y f(x, y) = 2a_{22}y + 2a_{12}x + 2b_2 = 0 \end{cases}$$

et la matrice hessienne

$$H_f = \begin{pmatrix} D_x^2 f(x, y) & D_x D_y f(x, y) \\ D_x D_y f(x, y) & D_y^2 f(x, y) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

est constante. En un point stationnaire (x_0, y_0) , on a ainsi

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} H_f \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On en déduit donc la propriété suivante (dans CE cas de fonction f).

² cela s'étend à plus de deux variables réelles

³ de type 'parabolôïde'. Il s'agit en effet d'un cas particulier d'une équation du type $F(x, y, z) = 0$ où F est une fonction quadratique de trois variables réelles.

Propriété 5.3.1 a) Si le déterminant de la matrice hessienne est non nul, alors il existe un point stationnaire unique.

b) Un extremum est toujours global.

□

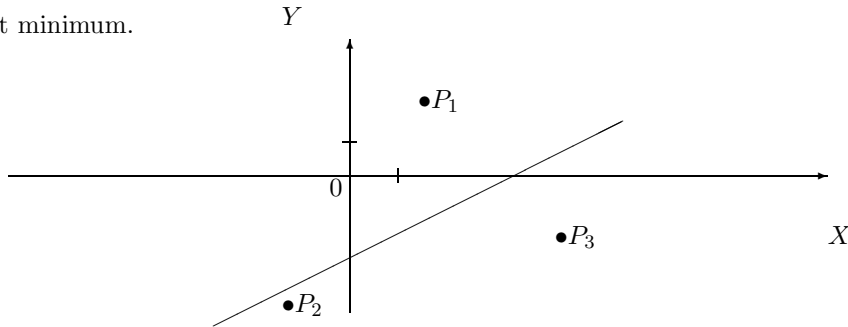
5.3.2 La régression linéaire

En guise d'application, examinons le problème de la *régression linéaire*.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne un nombre fini de points distincts $P_j (j = 1, \dots, J)$ par leurs coordonnées cartésiennes $(x_j, y_j) (j = 1, \dots, J)$. Dans le cas où les x_j ne sont pas tous égaux, on demande de chercher la droite⁴ d (dite *droite de régression*) d'équation cartésienne $y = mx + b$ telle que

$$E(m, b) = \sum_{j=1}^J (y_j - (mx_j + b))^2$$

soit minimum.



Comme $|y_j - (mx_j + b)|$ est la valeur absolue de la différence entre l'ordonnée du point P_j et celle du point de d dont l'abscisse est x_j , l'expression $E(m, b)$ mesure d'une certaine manière la façon dont les points P_j sont répartis autour de⁵ d . La fonction E définie ci-dessus s'appelle *l'erreur quadratique totale*.

Le problème est donc celui de la recherche des extrema (libres) éventuels d'une fonction quadratique, notée ici E et dont les variables sont notées m et b .

Dans ce cas particulier⁶, l'expression de E permet de conclure immédiatement à l'existence d'un minimum (que l'on sait donc aussi être global). La recherche de l'équation cartésienne de d (correspondant à la recherche du minimum de E) consiste donc en la détermination de ou des solutions du système caractérisant les points stationnaires.

En utilisant les notations de la section précédente, les coefficients de $m^2, b^2, 2mb$ dans l'expression de E , sont respectivement

$$a_{11} = \sum_{j=1}^J x_j^2, \quad a_{22} = J, \quad a_{12} = \sum_{j=1}^J x_j$$

⁴existence et unicité aussi

⁵remarquons que dans le cas où les points ont tous la même abscisse r , la droite verticale d'équation $x = r$ contient tous les points P_j

⁶bien sûr si l'on s'attache à la méthode générale, c'est l'examen de la matrice hessienne qui permet de conclure au fait que l'on a affaire à un minimum

ce qui correspond à la matrice hessienne

$$H_E = 2 \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^J x_j^2 & \sum_{j=1}^J x_j \\ \sum_{j=1}^J x_j & J \end{pmatrix}.$$

En utilisant les hypothèses sur les abscisses x_j et la propriété ci-dessous, on en déduit *qu'il existe un point stationnaire unique et que celui-ci donne lieu à un minimum strict global*.

Propriété. Par récurrence (sur J), montrons que, quel que soit $J \in \mathbb{N}_0$ et quels que soient les réels x_j ($j = 1, \dots, J$), on a

$$\left(\sum_{j=1}^J x_j \right)^2 \leq J \sum_{j=1}^J x_j^2.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si tous les x_j sont égaux.

De fait, pour $J = 1$ et aussi pour $J = 2$ c'est clair. Supposons à présent la propriété correcte pour J . On obtient successivement

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{J+1} x_j \right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^J x_j + x_{J+1} \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^J x_j \right)^2 + x_{J+1}^2 + 2x_{J+1} \left(\sum_{j=1}^J x_j \right) \\ &\leq J \sum_{j=1}^J x_j^2 + x_{J+1}^2 + 2x_{J+1} \left(\sum_{j=1}^J x_j \right) \\ &\leq J \sum_{j=1}^J x_j^2 + x_{J+1}^2 + \left(\sum_{j=1}^J (x_j^2 + x_{J+1}^2) \right) \\ &= (J+1) \sum_{j=1}^{J+1} x_j^2 \end{aligned}$$

Le cas de l'égalité se démontre en affinant un peu la preuve ci-dessus. $\square$

5.4 Extrema dans des ensembles bornés fermés

5.5 Extrema liés: la méthode des multiplicateurs de Lagrange

5.6 Exercices

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point d'abscisse et d'ordonnée (x_0, y_0) dans chacun des cas ci-dessous.

1) $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$, $(1, 2)$; 2) $f(x, y) = y^2 + x \sin(x^2 y)$, $(1, \pi)$; 3) $f(x, y) = \frac{x+2}{y+1}$, $(2, 3)$.

2. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans chacun des cas suivants.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$; 2) $ye^{xy} + z^2 = 0$, $(0, -1, 1)$.

3. Soit un plan π non parallèle à l'axe Z . Montrer qu'il y a exactement un plan tangent au paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ parallèle à π .

4. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 2 de la fonction $f(x, y) = e^x \cos y$ au point de coordonnées $(0, 0)$.

5. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 de la fonction $f(x, y) = \frac{x+1}{3xy+y^2+2}$ au point de coordonnées $(1, 1)$. En déduire une approximation de $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Comparer ce résultat avec la valeur exacte de $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

6. Soit $f(x, y) = \frac{x^2}{y+1}$. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point d'abscisse et d'ordonnée $(3, 2)$. Utiliser cette expression pour obtenir une approximation de $f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

7. Soit une boîte parallélépipédique de dimensions extérieures $14\text{cm} \times 14\text{cm} \times 28\text{cm}$. Si les parois ont une épaisseur de $1/8\text{cm}$, déterminer une approximation du volume de la boîte.

8. Soit $f(x, y) = xy$. Trouver les points stationnaires de f et déterminer s'il s'agit d'extrema.

9. Soit $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - 2xy$. Trouver les points stationnaires de f et déterminer s'il s'agit d'extrema.

10. Soit $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$. Trouver les points stationnaires de f et déterminer s'il s'agit d'extrema.

11. Déterminer les extrema des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$

1) $f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$	2) $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 8y + 3$
3) $f(x, y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$	4) $f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$
5) $f(x, y) = e^x \sin y$	6) $f(x, y) = x + y $
7) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$	8) $f(x, y) = 4xy + 2x^2y - xy^2$
9) $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$	10) $f(x, y) = 3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2$
11) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 8$	12) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 5$.

12. Déterminer les extrema de la fonction

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad x, y \in]0, \pi[.$$

13. Déterminer les extrema de la fonction

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}.$$

14. Déterminer les extrema des fonctions suivantes

$$f(x, y) = y^4 - x^4, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^4 + y^4, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = x^5 + x^3 + y^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

15. Soit la fonction

$$f(x, y) = e^{-y^2}(2x^3 - 3x^2 + 1) + e^{-y}(2x^3 - 3x^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que f a un seul point stationnaire et qu'il donne lieu à un maximum local.

Montrer ensuite que cet extremum n'est pas global. (Ce résultat montre encore une différence entre les fonctions d'une et de plusieurs variables. En effet, si $f \in C_1([a, b])$ possède un extremum local unique, alors cet extremum est global.)

16. Déterminer les extrema de f sur A dans chacun des cas suivants.

- $f(x, y) = x^2 - y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $f(x, y) = ye^{-x}$, A est le rectangle de sommets de coordonnées $(0, 0)$, $(\ln 2, 0)$, $(\ln 2, 3)$, $(0, 3)$.

17. Une boîte parallélépipédique sans couvercle doit avoir un volume de $32m^3$. Déterminer les dimensions de cette boîte de telle sorte que la surface latérale soit minimale.

18. Déterminer trois nombres positifs dont la somme est 48 et dont le produit est maximal. Calculer ce produit.

19. Déterminer trois nombres positifs dont le produit est 48 et dont la somme est minimale. Calculer cette somme.

20. Pour quelles coordonnées (x, y) la fonction $f(x, y) = x + 2y$ admet-elle un extremum lorsque $x^2 + y^2 = 5$?

21. Déterminer les extrema éventuels de la fonction $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x + y = 3$ (resp. sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$).

22. Déterminer les extrema éventuels de la fonction $f(x, y) = 3x + 2y$ sous la contrainte $x^2/4 + y^2/8 = 1$.

23. Déterminer le point de la courbe d'équation $x^2y = 2$ le plus proche de l'origine des axes.

24. Les colis postaux parallélépipédiques doivent être de format x, y, z avec $2(x + y) + z \leq 100$. Déterminer le volume maximal d'un envoi qui répond aux contraintes imposées.

25. Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite de régression linéaire pour les points dont on donne les coordonnées. Représenter ces points ainsi que la droite trouvée.

- $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$
- $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-2, 1)$
- $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 5)$.

Que se passe-t-il si on donne seulement deux points?

2.5 Recherche des extrema dans des ensembles bornés fermés.

B 61

Comme dans le cas d'une variable, on a le résultat suivant :

Si $f \in C_0(A)$, A borné fermé du plan, alors il existe $(x_2, y_2) \in A$ et $(x_1, y_1) \in A$ tels que

$$f(x_2, y_2) = \inf \{ f(x, y) : (x, y) \in A \}, \quad f(x_1, y_1) = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in A \}.$$

Remarquons que si (x_0, y_0) est un extremum pour f dans A , $\Omega \subset A$

si $f \in C_1(\Omega)$ où Ω = ouvert, si $(x_0, y_0) \in \Omega$

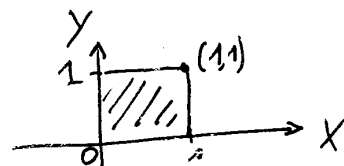
alors $D_x f(x_0, y_0) = 0$ et $D_y f(x_0, y_0) = 0$.

Pour rechercher les extrema globaux de f dans A (qui existent très vu ce qui précède), on procède comme suit

- recherche de $\Omega \subset A$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ tel que $D_x f(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = 0$
- puis étude du caractère extremal de (x_0, y_0)
- examiner les valeurs extrêmes de f sur la frontière de A
- puis comparer avec ce que l'on a trouvé avant.

Prenons un exemple.

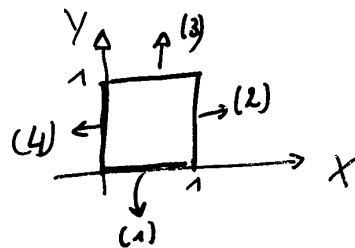
Soit $f(x, y) = xy - x^2$ et $A = [0, 1] \times [0, 1]$.



Recherchons les points stationnaires de f dans l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$:

$$\begin{cases} D_x f = 0 \\ D_y f = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$$

Il n'y a pas de solution.



Examinons donc f sur le bord du rectangle

Sur (1), on a $y = 0$ et $0 \leq x \leq 1$

donc $f(x, y) = f(x, 0) = -x^2$.

On obtient un maximum pour $x = 0$

et un minimum pour $x = 1$

des valeurs correspondantes de f sont $f(0, 0) = 0$ (max) et $f(1, 0) = -1$ (min)

Sur (2), on a $x = 1$ et $0 \leq y \leq 1$ donc $f(x, y) = f(1, y) = y - 1$.

On obtient un max pour $y = 1$ et un min pour $y = 0$.

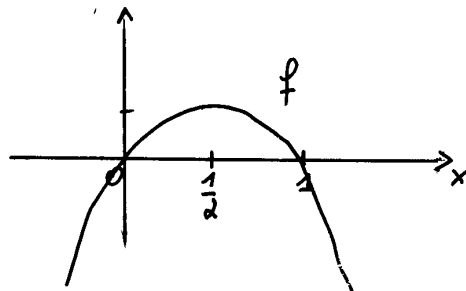
des valeurs corresp. de f sont $f(1, 1) = 0$ (max) et $f(1, 0) = -1$ (min)

Sur (3), on a $y=1$ et $0 \leq x \leq 1$ donc $f(x,y) = f(x,1) = x - x^2$

On obtient un maximum pour $x = \frac{1}{2}$ et un minimum pour $x=0, x=1$.

Les valeurs corr. de f sont $f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (max)

et $f(0,1) = f(1,1) = 0$ (min).



Sur (4), on a $x=0$ et $0 \leq y \leq 1$ donc $f(x,y) = f(0,y) = 0$

Au total, on a

$$0 = f(0,0) = f(1,1) = f(0,1)$$

$$\frac{1}{4} = f(\frac{1}{2}, 1)$$

pour les valeurs maximales trouvées
séparément

$$-1 = f(1,0)$$

$$0 = f(0,1) = f(1,1)$$

pour les valeurs minimales trouvées
séparément.

En conclusion

$(\frac{1}{2}, 1)$ donne lieu à un max global ($f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4}$)

$(1, 0)$ donne lieu à un min global ($f(1, 0) = -1$)

3. Extrema sous contraintes (multiplicateurs de Lagrange) ^{p66}

Dans ce qui vient d'être présenté, on a recherché les extrema de f dans un ouvert, c'est-à-dire les extrema sans contrainte.

Mais, dans la pratique, on est bien souvent amené à rechercher des extrema sous contrainte, c'est-à-dire les extrema d'une f et $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ (à valeurs réelles) lorsque (x,y) ne varie pas dans un ouvert, mais par exemple est un point d'une courbe (bref, lorsque (x,y) doit aussi vérifier $g(x,y)=0$). Ceci se généralise au cas de plus de deux variables.

Dans certains cas, il est facile de tenir compte de la contrainte dans la recherche des extrema (ex...)

Dans d'autres cas, c'est plus difficile. On a alors introduit une méthode, appelée méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour aider à résoudre les problèmes de recherche d'extrema sous contrainte.

Remarque sur l'existence des extrema

Si f est continue sur un ensemble borné fermé alors f admet une borne inf. et une borne sup. sur cet ens. (thm des bornes atteintes) (d'où existence ext. globaux)

Extrema de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$

Pour supposons les fonctions continûment dérivables dans un ouvert Ω .

- L'ensemble des points P de coord. (x,y) tels que $g(x,y)=0$ est une courbe du plan. Sous l'hyp. $(D_x g, D_y g) = \text{grad } g(x,y) \neq 0$, on sait qu'il existe une description de la courbe à l'aide d'un seul paramètre

$$g(x,y)=0 \iff \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t \in I \quad (\text{avec } (Dx(t), Dy(t)) \neq 0)$$

Chercher les éventuels extrema de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$ revient donc à chercher les extrema de $F(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in I$.

Ici, contrairement à ce qui se passe quand on manipule les contraintes facilement, on n'a pas connaissance explicite des fonctions $x(t), y(t)$.

Supposons que (x_0, y_0) soit un extremum de f sous la contrainte $g(x,y)=0$. Le réel t_0 tel que $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ est donc un extremum pour la fonction $F(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in I$. Par la théorie des extrema libres, on sait donc que t_0 est stationnaire : $DF(t_0) = 0$.

D'autre part, on a $g(x(t), y(t)) = 0$ ($t \in I$) ; si on pose $G(t) = g(x(t), y(t))$, $t \in I$ on a donc aussi $DG(t_0) = 0$.

On obtient

$$\begin{cases} DF(t_0) = 0 \\ DG(t_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (D_x f)(x_0, y_0) \cdot Dx(t_0) + (D_y f)(x_0, y_0) \cdot Dy(t_0) = 0 \\ (D_x g)(x_0, y_0) \cdot Dx(t_0) + (D_y g)(x_0, y_0) \cdot Dy(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} (D_x f)(x_0, y_0) & (D_y f)(x_0, y_0) \\ (D_x g)(x_0, y_0) & (D_y g)(x_0, y_0) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} Dx(t_0) \\ Dy(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système $M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ admet donc une solution non nulle ; il s'ensuit que $\det M = 0$ ou encore qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} D_x f(x_0, y_0) \\ D_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} D_x g(x_0, y_0) \\ D_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (\text{càd } \begin{cases} D_x f(x_0, y_0) = \lambda_0 D_x g(x_0, y_0) \\ D_y f(x_0, y_0) = \lambda_0 D_y g(x_0, y_0) \end{cases})$$

ou encore $\begin{cases} D_x (f - \lambda_0 g)(x_0, y_0) = 0 \\ D_y (f - \lambda_0 g)(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

car ...

Le réel λ_0 s'appelle un multiplicateur de Lagrange.

En conclusion de ce qui vient d'être fait, on peut énoncer le résultat suivant :

si (x_0, y_0) est un extremum de $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ alors il existe un réel λ_0 tel que (x_0, y_0) soit un point stationnaire pour la fonction $f - \lambda_0 g$.

- Pour rechercher les éventuels extrema de $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ on commence donc par résoudre le système

$$\begin{cases} D_x f(x, y) = \lambda D_x g(x, y) \\ D_y f(x, y) = \lambda D_y g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

en les inconnues x, y et λ .

Si f admet un maximum (resp. minimum) global sous la contrainte $g(x, y) = 0$ alors cet extremum est nécessairement l'un des (x, y) trouvés comme solution du système précédent.

Remarquons que le théorème des bornes atteintes (à deux variables) assure l'existence de ces extrema globaux lorsque l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ est borné (il est fermé puisque g est continu).

- Il existe des moyens pour étudier l'éventuel caractère extremal local des points stationnaires de la fonction $f - \lambda_0 g$ (nous avons développé la théorie dans le cadre des extrema sans contrainte).

Ils sont assez techniques ; en fait, ils sont basés sur l'étude du signe de la dérivée seconde de la fonction $F(t) = f(x(t), y(t))$, ce qui est naturel. Signalons le résultat suivant :

soit (x_0, y_0) un point stationnaire de $L = f - \lambda_0 g$; alors

(x_0, y_0) est un $\begin{cases} \text{min.} \\ \text{max} \end{cases}$ local. strict de f sous contrainte

si et seulement si le zéro du polynôme

est $\begin{cases} > 0 \\ < \end{cases}$

$$\det \begin{pmatrix} H_L(x_0, y_0) - \lambda_1 \mathbb{I} & D_x g(x_0, y_0) \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) \\ D_y g(x_0, y_0) & 0 \end{pmatrix}$$

- Exemple : recherche des extrema globaux de $f(x,y) = x^2 + 4y^3$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 = 1$ (ég. d'une ellipse)

Le minimum global et le maximum global existent car la "courbe de contrainte" est un ensemble borné fermé.

Utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Cherchons d'abord les solutions du système

$$\begin{cases} D_x f = \lambda D_x g \\ D_y f = \lambda D_y g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2x\lambda = 0 \\ 12y^2 - 4y\lambda = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y(3y-\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2=1 \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y(3y-\lambda)=0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ 3y=\lambda \\ x^2 + \frac{\lambda^2}{9} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=-1/\sqrt{2} \\ 3y=\lambda \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ 3y=\lambda \\ x=\frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda=1 \\ 3y=\lambda \\ x=-\frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

On obtient donc 6 points. On sait que le max et le min (globaux) sont parmi eux. On les cherche en calculant $f(x_0, y_0)$:

$\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=1/\sqrt{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=-1/\sqrt{2} \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=\frac{\sqrt{7}}{3} \\ y_0=1/3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_0=-\frac{\sqrt{7}}{3} \\ y_0=1/3 \end{cases}$
$f(x_0, y_0) = 4/2\sqrt{2}$	$f(x_0, y_0) = -4/2\sqrt{2}$	$f(x_0, y_0) = 1$	$f(x_0, y_0) = 1$	$f(x_0, y_0) = 25/27$	$f(x_0, y_0) = 25/27$
$= \sqrt{2}$	$= -\sqrt{2}$				

Le max. est donc au point de coord. $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; il vaut $f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$;

le min. est donc au point de coord. $(0, -1/\sqrt{2})$; il vaut $f(0, -1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

On peut aussi se poser la question de savoir si les autres points fournissent des extrema locaux.

1540

Pour cela, on étudie le zéro du polynôme

$$\det \begin{pmatrix} H_L(x_0, y_0) - \lambda_0 & D_x g(x_0, y_0) \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) \\ D_y g(x_0, y_0) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } L = f - \lambda_0 g$$

On a $H_L(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda_0 & 0 \\ 0 & 24y_0 - 4\lambda_0 \end{pmatrix}$, $D_x g = 2x$, $D_y g = 4y$

Pour $x_0 = 1, y_0 = 0, \lambda_0 = 1$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} 0 - 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4(4+1). \quad \text{Le seul zéro est } -4$$

On obtient un max local strict.

Pour $x_0 = -1, y_0 = 0, \lambda_0 = 1$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} 0 - 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 - 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4(4+1). \quad \text{Le seul zéro est } -4.$$

On obtient un max local strict

Pour $x_0 = \frac{\sqrt{7}}{3}, y_0 = \frac{1}{3}, \lambda_0 = 1$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{2\sqrt{7}}{3} \\ 0 & 8 - 4 - 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{2\sqrt{7}}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \frac{16}{9} + \frac{2\sqrt{7}}{3} (1-4) \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$= \frac{16}{9} \lambda + \frac{48}{9} (1-4) = \frac{44}{9} \lambda - \frac{112}{9}$$

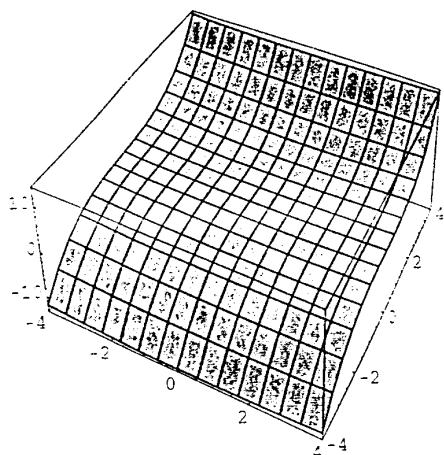
Le seul zéro est $\frac{112}{44} = \frac{28}{11}$. On obtient un min local strict.

Pour $x_0 = -\frac{\sqrt{7}}{3}, y_0 = \frac{1}{3}, \lambda_0 = 1$ on obtient

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{2\sqrt{7}}{3} \\ 0 & 4 - 1 & \frac{4}{3} \\ -\frac{2\sqrt{7}}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \frac{16}{9} - \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} (4-1) = \frac{16}{9} \lambda + \frac{28}{9} \lambda - \frac{112}{9}$$

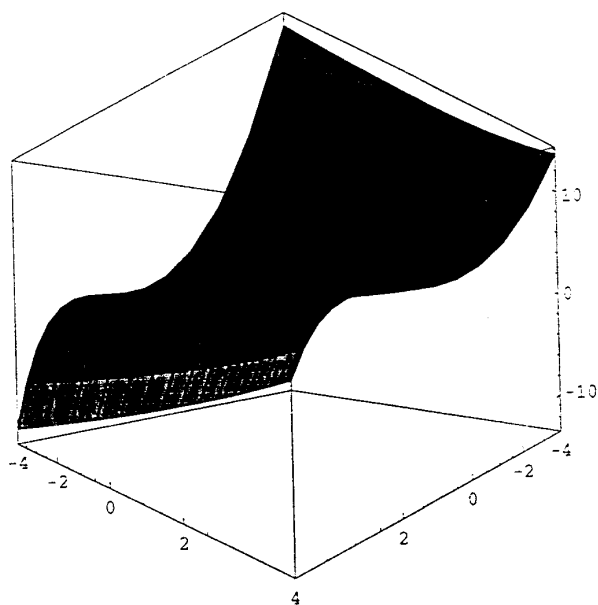
$$= \frac{44}{9} \lambda - \frac{112}{9}$$

Le seul zéro est $\frac{112}{44} = \frac{28}{11}$. On obtient un min local strict.



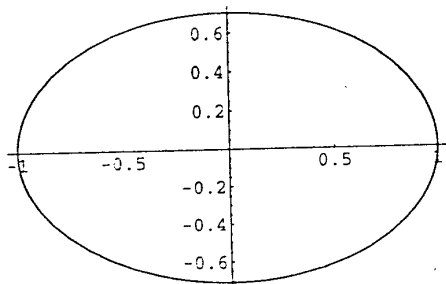
Out[19]:= -SurfaceGraphics-

Plot3D[(x^2+4 y^3)/20, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, AspectRatio->1, ViewPoint->{1, 1, 0}]



Out[21]:= -SurfaceGraphics-

In[24]:= ParametricPlot[{Cos[t], (1/Sqrt[2])*Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}]



Cet exercice aurait pu être traité différemment car on a un paramétrage aisé de la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

En effet : $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1 \Leftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi[\left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \end{array} \right.$

Étudier les extrema de $f(x, y) = x^2 + 4y^3$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ revient donc à étudier les extrema de

$$F(t) = f(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t) = \cos^2 t + \frac{4}{2\sqrt{2}} \sin^3 t$$

$$= \cos^2 t + \sqrt{2} \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi[$$

On a $(F \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$

$$DF(t) = 2 \cos t (-\sin t) + 3\sqrt{2} \sin^2 t \cos t$$

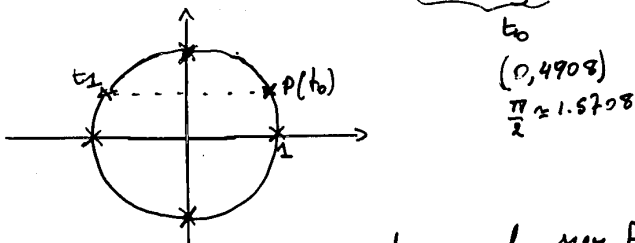
$$= \cos t \cdot \sin t (-2 + 3\sqrt{2} \sin t)$$

$$DF(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \quad \text{ou} \quad \sin t = 0 \quad \text{ou} \quad \sin t = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(Vu la 2π -périodicité, cherchons t dans $[0, 2\pi[$)

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ou} \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \pi$$

$$\text{ou} \quad t = \underbrace{\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}}_{t_0} \quad \text{ou} \quad t = \underbrace{\pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}}_{t_1}$$



Étude du signe de DF et concl. sur F

t	0	t_0	$\pi/2$	t_1	π	$3\pi/2$	2π
$\cos t$	+	+	0	-	-	0	+
$\sin t$	-	0	+	+	0	-	+
$-2 + 3\sqrt{2}\sin t$	-	-	0	+	0	-	-
DF	+	0	-	0	+	0	-
F	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Pour $t = 0$, F a un max local ; il correspond à

$$x_0 = 1, y_0 = 0$$

Pour $t = t_0$, F a un min local ; il correspond à

$$y_0 = 1/3, x_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Pour $t = \pi/2$, F a un max local ; il correspond à

$$x_0 = 0, y_0 = 1/\sqrt{2}$$

Pour $t = t_1$, F a un min local ; il correspond à

$$x_0 = -\sqrt{2}/3, y_0 = 1/3$$

Pour $t = \pi$, F a un max local ; il correspond à

$$x_0 = -1, y_0 = 0$$

Pour $t = 3\pi/2$, F a un min local ; il correspond à

$$x_0 = 0, y_0 = -1/\sqrt{2}$$

(ext. stricts)

Pour trouver le global, comparer les diff. valeurs de $F(t)$, avec $t = 0, t_0, \pi/2, t_1, \pi, 3\pi/2$

3.2 Extrema de $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$

La démarche est analogue au cas précédent. Seulement, ici, l'équation $g(x, y, z) = 0$ est l'équation d'une surface et c'est deux paramètres qu'il faudra pour la décrire :

$$g(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x = x(t, s) \\ y = y(t, s) \\ z = z(t, s) \end{cases}$$

On est alors amené à rechercher les extrema de $F(t, s) = f(x(t, s), y(t, s), z(t, s))$.

On arrive à une conclusion analogue à celle du cas précédent : si (x_0, y_0, z_0) est un ext. de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$ alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} D_x f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 D_x g(x_0, y_0, z_0) \\ D_y f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 D_y g(x_0, y_0, z_0) \\ D_z f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 D_z g(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

3.3 Extrema de $f(x, y, z)$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$.

Ici, apparition de deux multiplicateurs de Lagrange