Compléments de Mathématiques Générales, MATH0232-x, 2015-2016

A propos des « Intégrales paramétriques »

Les intégrales paramétriques (et leur dérivation) représentent un outil très important de l'analyse. Elles apparaissent notamment dans le cadre de l'*analyse de Fourier* et du *produit de convolution de fonctions*.

Dans le présent cours, nous ne considérerons ces intégrales que le cas de l'intégration à une variable et dans le cas d'un seul paramètre réel.

Comme leur nom l'indique déjà, les « intégrales paramétriques » sont des fonctions qui sont définies par des intégrales, comme suit

$$\lambda \mapsto \int_A f(x,\lambda)\ dx$$

Dès le départ, il convient de fixer un cadre qui donne sens à cette définition :
• A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle) ; le paramètre λ varie dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ également, noté par exemple Λ, et qui sera considéré ouvert lorsque sera question de dérivation.
• f est une fonction définie sur le produit cartésien $A \times \Lambda$ et, pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x,\lambda)$ est intégrable sur A.

Enonçons à présent le « Théorème des intégrales paramétriques » dans le cas d'une seule dérivation.

Dérivation des intégrales paramétriques (Admis)

On reprend les notations et les hypothèses naturelles ci-dessus. En outre, on suppose que
• quel que soit $x \in A$, la fonction $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$ appartient à $C_1(\Lambda)$
• (*) quel que soit l'ensemble borné fermé K inclus dans l'ouvert Λ, il existe une fonction g_K intégrable sur A telle que

$$|D_\lambda f(x,\lambda)| \leq g_K(x), \quad \forall x \in A,\ \forall \lambda \in K$$

Sous ces conditions, la fonction $\lambda \mapsto \int_A f(x,\lambda)\ dx$ appartient à $C_1(\Lambda)$ et « on peut dériver sous le signe intégral », ce qui signifie que

$$D_\lambda \int_A f(x,\lambda)\ dx \ = \ \int_A D_\lambda f(x,\lambda)\ dx, \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Remarques

1) Lorsque $f \in C_1(A' \times \Lambda)$ avec A' ouvert contenant A et lorsque A est borné et fermé, l'hypothèse (*) est automatiquement satisfaite.

2) Pour n dérivations (n naturel strictement plus grand que 1), on demande que $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$ appartienne à $C_n(\Lambda)$, que les dérivées (par rapport à λ) jusqu'à l'ordre $n-1$ soient intégrables sur A et que la majoration qui intervient dans (*) fasse intervenir $D^n_\lambda f(x,\lambda)$. On obtient alors que la fonction $\lambda \mapsto \int_A f(x,\lambda)\ dx$ appartient à $C_n(\Lambda)$ et que la dérivation s'effectue encore de la même manière (jusqu'à l'ordre n).

F. Bastin, 21 septembre 2015(V1 : 21 septembre 2015)

- Si $b = +\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$ s'il existe $s > 1$ tel que

$$\lim_{x\to+\infty} x^s|f(x)| \quad \text{existe et est fini.}$$

De même, on obtient des *critères de non-intégrabilité* sur $]a, b[$: si $f \in C_0(]a, b[)$, alors f n'est pas intégrable sur cet intervalle dans les cas suivants:
- $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a^+}(x - a)f(x)$ existe et diffère de 0
- $a = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} |x|f(x)$ existe et diffère de 0
- $b \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to a^+}(b - x)f(x)$ existe et diffère de 0
- $b = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$ existe et diffère de 0

1.1.2 Changement de variables

Voir le fascicule du cours "Mathématiques générales, A"

1.1.3 Un calcul d'intégrale fléchée

Voir le fascicule du cours "Mathématiques générales, A"

1.2 La transformation de Fourier

La transformation de Fourier est une technique mathématique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal (par exemple un son). La définition mathématique de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable f est la suivante :

$$\mathcal{F}_y f = \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(t)dt, \quad y \in \mathbb{R}$$

(f est le signal d'entrée (fonction du temps), y la fréquence).

Le signal d'entrée peut être à valeurs réelles ou complexes. En revanche, la transformée de Fourier est un nombre complexe. Pour chaque fréquence y, le module de $\mathcal{F}_y f$ représente l'énergie associée à cette fréquence. La représentation de ce module en fonction de y constitue le spectre de fréquences du signal.

Le cadre le plus naturel pour définir les transformées de Fourier est celui des fonctions intégrables. Toutefois, de nombreuses opérations (dérivations, transformée de Fourier inverse) ne peuvent être écrites en toute généralité. On doit à Plancherel l'introduction de la transformation de Fourier pour les fonctions de carré intégrable, pour lesquelles la formule d'inversion est vraie. C'est en fait la théorie des distributions de Schwartz qui donne un cadre parfaitement adapté.

1.2.1 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

Rappelons que l'ensemble des fonctions intégrables sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est noté

$$L^1(A).$$

Définition 1.2.1 *Si f est intégrable dans $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier (négative) de f est la fonction*

$$\widehat{f}(y) = \mathcal{F}_y^- f := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\ dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On définit aussi la transformée positive

$$\mathcal{F}_y^+ f := \mathcal{F}_{-y}^- f = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x)\ dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

On est fréquemment amené à préciser les notations comme suit (pour la bonne compréhension des développements des calculs)

$$\mathcal{F}_y^- f = \mathcal{F}_{x\to y}^- f(x) = \mathcal{F}_{t\to y}^- f(t),\ \ldots$$

Il faut noter que certains auteurs utilisent $e^{\pm 2i\pi xy}$ ou aussi un facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ devant l'intégrale; il est donc important de vérifier la définition utilisée car les formules associées s'expriment alors un peu différemment (voir suite).

Cette application transforme en fait une fonction intégrable en une fonction bornée, mais qui n'est pas toujours intégrable (voir exemples); ceci sera à comparer avec la transformée des fonctions de carré intégrable (voir suite). La transformée de Fourier d'une fonction intégrable jouit cependant d'autres propriétés remarquables; par exemple, on va voir que "la dérivation et la multiplication par une puissance" sont en quelque sorte des "opérations duales". Nous verrons que ces propriétés se traduisent aussi par des résultats analogues dans le cadre des séries trigonométriques de Fourier.

Exemple 1.2.2 *Si a est un réel strictement positif, alors*

$$\mathcal{F}_y^- \chi_{[-a,a]} = \begin{cases} 2a & si\ y = 0 \\ \frac{2\sin(ay)}{y} & si\ y \neq 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{F}_{x\to y}^- e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}.$$

Remarquer que le deuxième exemple exprime que la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne est encore une fonction gaussienne.

Enonçons à présent quelques propriétés fondamentales de la transformation de Fourier.

Proposition 1.2.3 *- La transformation de Fourier est une application linéaire.*
- Si f est intégrable et si $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{F}_{x\to y}^- \Big(f(ax+b) \Big) = \frac{1}{|a|} e^{i\frac{b}{a}y} \mathcal{F}_{y/a} f$$

- Si $f \in C_1(\mathbb{R})$ et si f, Df sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}_y^- Df = iy \mathcal{F}_y^- f$$

- Si f et $x \mapsto xf(x)$ sont intégrables, alors

$$D\mathcal{F}_y^- f = -i\mathcal{F}_{x\to y}^- \big(xf(x)\big)$$

Ces résultats s'étendent bien sûr au cas des dérivées multiples.

Signalons également que les propriétés précédentes se généralisent au cas des fonctions de carré intégrable et de leur transformée de Fourier.

Quant aux propriétés fonctionnelles fondamentales de la transformée de Fourier des fonctions intégrables, elles s'énoncent comme suit.

Théorème 1.2.4 *Si f est intégrable, alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}^- f$ est une fonction*
- uniformément continue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{h\to 0} \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}_{y+h}^- - \mathcal{F}_y^- f| = 0$$

- bornée, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{F}_y^- f \right| \leq C$$

- qui tend vers 0 à l'infini, c'est-à-dire

$$\lim_{y \to \infty} \mathcal{F}_y^- f = 0$$

Pour terminer cette introduction à la transformation de Fourier, énonçons deux résultats fondamentaux (théorème de transfert et théorème de Fourier) qu'il sera utile aussi de comparer avec les résultats analogues dans le cas des fonctions de carré intégrable.

Théorème 1.2.5 (Transfert) *Si f et g sont des fonctions intégrables, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_y^{\pm} f \; g(y) \; dy \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}} f(y) \; \mathcal{F}_y^{\pm} g \; dy$$

Théorème 1.2.6 (Théorème de Fourier) *Si f est intégrable et si sa transformée de Fourier est intégrable, alors*

$$\mathcal{F}_y^{\pm} \left(\mathcal{F}^{\mp} f \right) = 2\pi f(y)$$

pour presque tout y et pour tout y de chaque intervalle où f est continu.

1.2.2 Transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable

Si A est une partie (mesurable) de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions (mesurables) de carré intégrable sur A est noté

$$L^2(A).$$

On sait que le produit de deux fonctions intégrables n'est pas nécessairement intégrable; on a cependant le résultat fort intéressant suivant quant aux fonctions de carré intégrable: *si f, g sont de carré intégrable, alors leur produit est une fonction intégrable.* (Cela se justifie directement par l'inégalité $2|fg| \leq |f|^2 + |g|^2$).

Remarquons (voir exemples) que les espaces $L^1(A)$ et $L^2(A)$ diffèrent. Cependant, comme on a $|f| \leq \frac{|f|^2+1}{2}$, on obtient l'inclusion $L^2(A) \subset L^1(A)$ lorsque A est un ensemble borné.

Sans entrer dans les détails, donnons quelques propriétés fondamentales de cet espace. Il se revèle en effet être de toute première importance dans le domaine des sciences (et particulièrement dans celui de l'analyse des signaux). On peut en effet qualifier cet espace "d'espace de la physique" car sa structure d'espace de Hilbert (voir ci-dessous) en fait un outil privilégié pour la modélisation de nombreux phénomènes.

L'espace $L^2(A)$ est un espace vectoriel (complexe) dans lequel on définit de façon naturelle l'application suivante, appelée *produit scalaire* et qui jouit des propriétés analogues au produit scalaire connu entre vecteurs

$$< f, g >= \int_A f(x)\overline{g(x)} \; dx, \quad f, g \in L^2(A).$$

On pose également

$$\|f\| = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}, \quad f \in L^2(A).$$

On démontre alors *l'inégalité de Schwarz*

$$\left| < f, g > \right| \leq \|f\| \; \|g\|, \quad f, g \in L^2(A).$$