

# 1. Intégrales paramétriques, transformées de Fourier et produit de convolution

**Exercice 1.** Soient  $a, b > 0$ . Si possible, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg(ax) - \arctg(bx)}{x} dx.$$

**Exercice 2.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $p > 0$ . Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} e^{-px} dx = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{b^2 + p^2}{a^2 + p^2} \right).$$

**Exercice 3.** Si possible, calculer les transformées de Fourier des fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_1(x) = xe^{-x} \chi_{[0, +\infty[}(x), \quad f_2(x) = e^{ix} e^{-|x|} \quad \text{et} \quad f_3(x) = e^{-|x-1|}.$$

**Exercice 4.** Soient  $a, b \in ]0, +\infty[$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

(1) Déterminer si possible les transformées de Fourier de la fonction  $f_a$  définie par  $f_a(x) = e^{-a|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(2) Faire de même avec la fonction  $g_a$  définie par  $g_a(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(3) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(cx)}{x^2 + a^2} dx.$$

(4) En utilisant le théorème de transfert, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

(5) Calculer si possible

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin(x) dx.$$

**Exercice 5.** (1) Si possible, déterminer les transformées de Fourier des fonctions  $f_1$  et  $g_1$  (d'une variable réelle) définies par

$$f_1(x) = |\sin(x)| \chi_{[-\pi, \pi]}(x) \quad \text{et} \quad g_1(x) = |x| e^{-|x|}.$$

(2) Si possible, en déduire les transformées de Fourier des fonctions  $f_2$  et  $g_2$  (d'une variable réelle) définies par

$$f_2(x) = \frac{1 + \cos(\pi x)}{1 - x^2} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

(3) Si cela a un sens, en déduire les valeurs des intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + \cos(\pi x))^2}{(1 - x^2)^2} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^4} dx.$$

(4) Même question, mais pour l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(1 + x^2)^2} dx.$$

**Exercice 6.** (1) Si possible déterminer le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

(2) Même question avec

$$f(x) = e^x \chi_{[1, +\infty[}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x \chi_{[-1, +\infty[}(x).$$

- Exercice 7.** (1) S'il est défini, déterminer le produit de convolution des fonctions  $\chi_{[-1,1]}$  et  $\chi_{[-2,2]}$ .  
(2) Si possible, calculer

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin(x) \sin(2x)}{x^2} dx.$$

- Exercice 8.** (1) Si possible, déterminer le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (2) Représenter graphiquement les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $f \star g$ .