Compléments de Mathématiques Générales (Math2014)
2020-2021

Plan du cours du jeudi 17/09/20, A142, 16h (podcasté)

≪ Transformation de Fourier ≫, suite et fin

Propriétés relatives à la dérivation

(1) *Soit* $N \in \mathbb{N}_0$*. Si* f *est une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$ *telle que la fonction* $x \mapsto x^k f(x)$ *soit encore intégrable quel que soit le naturel* $k \leq N$*, alors les transformées de Fourier* $\mathcal{F}^{\pm} f$ *sont* N *fois continûment dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$D^k \mathcal{F}_y^{\pm} f \;=\; (\pm i)^k \, \mathcal{F}_y^{\pm} g_k \quad k \leq N, \; y \in \mathbb{R}$$

avec

$$g_k(x) \;=\; x^k f(x).$$

(2) *Soit* $f \in C_N(\mathbb{R})$ *tel que* $D^k f$ *soit intégrable quel soit le naturel* k *inférieur ou égal à* N*. Alors on a*

$$\mathcal{F}_y^{\pm}(D^k f) \;=\; (\mp i y)^k \, \mathcal{F}_y^{\pm} f, \quad k \leq N, \; y \in \mathbb{R}.$$

Voir cours pour les preuves.

Propriété relative à l'intégrabilité

Soit $f \in C_2(\mathbb{R})$ *tel que* $f, \; Df, \; D^2 f$ *soient intégrables sur* $\mathbb{R}$*. Alors les transformées de Fourier* $\mathcal{F}^{\pm} f$ *sont intégrables sur* $\mathbb{R}$*.*

Voir cours pour la preuve.

Une introduction au produit de convolution (composition) de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Si $y \in \mathbb{R}$ est tel que la fonction $x \mapsto f(y-x)\,g(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ alors on pose

$$(f * g)(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\,g(x)\; dx.$$

Si cette intégrale existe pour tout y, le produit de composition (ou de convolution) de f et g est la fonction

$$y \in \mathbb{R} \mapsto (f * g)(y)$$

Remarque : si le produit de composition existe, alors on a

$$f * g \;=\; g * f.$$

Propriété

Si f *et* g *sont intégrables, alors*

$$\mathcal{F}^{\pm}(f * g) \;=\; \mathcal{F}^{\pm} f \;.\; \mathcal{F}^{\pm} g.$$

Voir cours pour un exemple, la preuve du résultat liant le produit de composition et la transformation de Fourier et des interprétations, applications.

F. Bastin, 18 septembre 2020 (V1 : 180920)