Test de rentrée : Solutions

Exercice 1. (a) Les solutions de l'exercice sont reprises dans le tableau suivant :

	$\Re$	$\Im$	$\vert . \vert$
z_1	-1	0	1
z_2	1	1	$\sqrt{2}$
z_3	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$
z_4	$e^{\Re\alpha}\cos(\Im\alpha)$	$e^{\Re\alpha}\sin(\Im\alpha)$	$e^{\Re\alpha}$

En particulier, si $\alpha = it$, avec $t \in \mathbb{R}$, alors $\Re z_4 = \cos(t)$, $\Im z_4 = \sin(t)$ et $|z_4| = 1$.

(b) Les solutions (aussi bien dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$) de la première équation sont 0 et 3. Par contre, la seconde équation n'admet aucune solution réelle. Ses solutions complexes sont alors $1+i$ et $1-i$.

Exercice 2. (a) La matrice A est inversible lorsque $a \in [\pi, 5\pi] \setminus \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \frac{19\pi}{4}\right\}$ et, pour un tel a,

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}\sin(2)\left(\sqrt{2}\cos(a)+1\right)} \begin{pmatrix} \sin(2) & \cos(2) \\ -\sqrt{5}\,\mathrm{tg}(2) & \sqrt{10}\cos(a) \end{pmatrix}.$$

(b) Les valeurs propres de la matrice B sont $2+i$ et $2-i$. La matrice B est diagonalisable et la matrice

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (a) Les réponses sont compilées dans le tableau suivant :

	Domaine de dérivabilité	Dérivée première
f_1	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
f_2	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[$	$\dfrac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos x}}$
f_3	$]-\infty;-2\,[\;\cup\;]\,1;+\infty\,[$	$\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$
f_4	$\mathbb{R}$	$\ln(2)2^x$

(b) Les solutions générales de l'équation différentielles s'écrivent

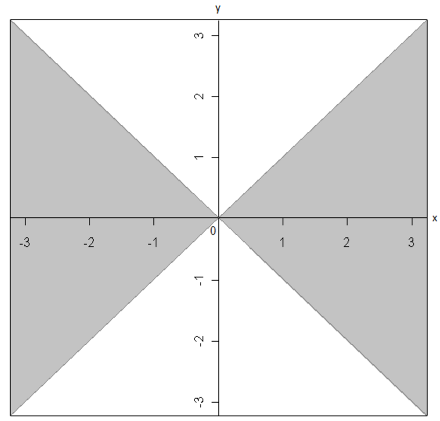
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \left(\frac{x}{4} + C_1\right)e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 4. Le domaine de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|\right\}.$$

Il peut être représenté par l'aire grise donnée ci-dessous (dont les bords ne sont pas compris dans l'ensemble).



Si $(x, y) \in A$ et si $y \neq 0$, on a

$$\frac{1}{y} D_x f(x, y) + \frac{1}{x} D_y f(x, y) = 0.$$

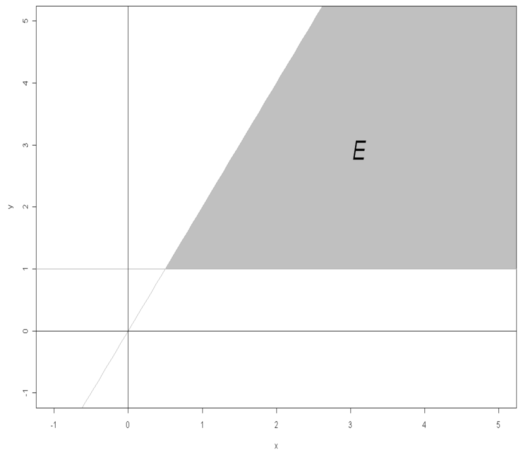
Exercice 5. La fonction du point (a) n'est pas intégrable sur l'intervalle proposé. Pour le reste, les intégrales sont définies et valent respectivement

(b) 0 ;

(c) $\dfrac{2}{1+\pi^2}$;

(d) $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 6. L'ensemble E peut se représenter comme suit (les bords sont compris).



L'intégrale demandée vaut 1.

Test de rentrée : résolution de l'Exercice 3.(b)

Résoudre l'équation différentielle

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}.$$

Solution : Pour rappel, on peut trouver la forme générale des solutions de cette équation en recherchant la forme générale des solutions de l'équation homogène associée, puis en lui ajoutant une solution particulière de l'équation étudiée.

(1) *Résolution de l'équation homogène*

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$P : z \mapsto z^2 - 4,$$

dont les racines valent respectivement 2 et -2. Dès lors, les solutions s'écrivent

$$f_H : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(2) *Recherche d'une solution particulière de l'équation de départ.*
Il est possible de décomposer cette recherche en deux parties :

(a) *Recherche d'une solution particulière de l'équation*

$$D^2 f(x) - 4f(x) = 1.$$

Dans ce cadre, on peut rechercher une solution constante (dont les dérivées de n'importe quel ordre s'annulent), ce qui mène à

$$-4f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = -1/4.$$

Ainsi, une solution particulière est donnée par

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto -1/4.$$

(b) *Recherche d'une solution particulière de l'équation*

$$D^2 f(x) - 4f(x) = e^{2x}.$$

Ici, on peut utiliser la technique dite des exponentielles-polynômes. Celle-ci nous apprend que cette équation admet une solution de la forme

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto Ax^\theta e^{2x},$$

où A est une constante à déterminer et θ est la multiplicité de 2 comme racine du polynôme caractéristique de l'équation homogène. Or, 2 est justement une racine de ce polynôme, en particulier de multiplicité 1 : on a donc $\theta = 1$. Pour trouver A, on remarque d'abord que

$$Df_2(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \quad \text{et} \quad D^2 f_2(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x},$$

ce qui implique que

$$D^2 f_2(x) - 4f_2(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x}.$$

Vu l'équation à résoudre, on voit qu'on peut prendre $A = 1/4$.

De là, on en déduit qu'une solution particulière de l'équation de départ est donnée par

$$f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto f_1(x) + f_2(x) = -1/4 + xe^{2x}/4.$$

Au total, la forme générale des solutions de l'équation différentielle s'écrit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto f_H(x) + f_p(x) = \left(\frac{x}{4} + C_1\right) e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires.