1, 2, 3...Sciences

Année académique 2017-2018

Corrigé de l'examen de mathématique du 19 janvier 2018

Version 8 janvier 2018

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1.
Définir et interpréter géométriquement la notion de concavité de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.

Théorie 2.
(a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
(b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Théorie 3.
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,1]$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(b) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0,1]$.

Exercices

1. (a) Que vaut la valeur absolue de $x - x^2$?

   (b) Si x désigne un réel de l'intervalle $]\pi, 3\pi/2[$, simplifier l'expression suivante de telle sorte qu'elle ne contienne plus qu'une seule des fonctions trigonométriques sinus ou cosinus.

   $$\sin(\pi + x)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sqrt{\sin^2(x)}$$

   (c) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

   $$\cos(x)\sin(2x) = \frac{1}{4\sin(x)}.$$

   (d) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

   $$\operatorname{arcos}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right).$$

   (e) Déterminer le module du nombre complexe z suivant

   $$\frac{-2i^{171}}{1+i}.$$

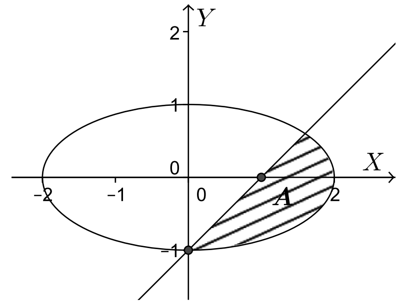
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

   $$(a)\ \lim_{x \to -\infty} (\exp(x).\ln(2-x)) \qquad\qquad (b)\ \lim_{x \to (-1)^-} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x+2}}$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

   $$(a)\ \int_{-\infty}^{-4} \frac{4x+3}{x^3+3x^2}\, dx \qquad\qquad (b)\ \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une ellipse et l'autre est une droite.)



5. (a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \arcsin(2x)$ vérifie l'équation différentielle
$$(1-4x^2)D^2 f(x) - 4xDf(x) \ = 0.$$
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$D^2 f(x) + Df(x) = x\ e^x.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.

En se transformant en glace, l'eau voit son volume augmenter de 1/15. Quelle quantité d'eau en litres faut-il pour obtenir $\frac{4}{5}$ m^3 de glace ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1.
Définir et interpréter géométriquement la notion de concavité de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.

Solution. La fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $I =]-1, +\infty[$ si
$$x_0, x_1 \in I \text{ et } r \in [0,1] \Rightarrow \ln(x_0 + r(x_1 - x_0) + 1) \geq \ln(x_0+1) + r(\ln(x_1+1) - \ln(x_0+1)).$$
Géométriquement, cela signifie que quels que soient les points x_0 et x_1 de I et quel que soit le point x compris entre x_0 et x_1, l'ordonnée du point P du graphique de f d'abscisse x est supérieure ou égale à l'ordonnée du point Q de même abscisse situé sur la droite passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0)) = (x_0, \ln(x_0+1))$ et $(x_1, f(x_1)) = (x_1, \ln(x_1+1))$.

Théorie 2.
(a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
(b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Pour une réponse ≪ type ≫, voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3.
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $]0,1]$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(b) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur r sous laquelle la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0,1]$.

Pour une réponse ≪ type ≫, voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Que vaut la valeur absolue de $x - x^2$?**
Solution. Par définition, on a

$$|x - x^2| \;=\; \begin{cases} x - x^2 = x(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2 - x = x(x-1) & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases} .$$

(b) Si x désigne un réel de l'intervalle $]\pi, 3\pi/2[$, simplifier l'expression suivante de telle sorte qu'elle ne contienne plus qu'une seule des fonctions trigonométriques sinus ou cosinus.

$$\sin(\pi + x)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sqrt{\sin^2(x)}$$

Solution. Puisque x est dans l'intervalle $]\pi, 3\pi/2[$, on a $\sin(x) < 0$. Vu les formules des angles associés, on a $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}(x)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sqrt{\sin^2(x)} &= (-\sin(x))\ (-\operatorname{cotg}(x))\ (-\sin(x)) \\ &= -\sin^2(x)\ \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= -\sin(x)\ \cos(x) \\ &= -\frac{\sin(2x)}{2}. \end{aligned}$$

(c) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(x)\sin(2x) = \frac{1}{4\sin(x)}.$$

Solution. L'équation est définie pour $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Comme $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, l'équation donnée est équivalente à

$$4\cos(x)\sin(x)\sin(2x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ OU } \sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi) \text{ OU } (2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\ .$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$.

(d) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\operatorname{arcos}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right).$$

Solution. Comme $\operatorname{dom}(\sin) = \mathbb{R}$ et $\operatorname{im}(\sin) = [-1,1] = \operatorname{dom}(\operatorname{arcos})$, l'expression $\operatorname{arcos}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right)$ est définie.
Dès lors, vu que $\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{-3\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)$, on a

$$\operatorname{arcos}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right) = \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\right) = \frac{3\pi}{14},$$

les fonctions arcos et cos étant inverses l'une de l'autre pour tout $x \in [0, \pi]$.

(e) Déterminer le module du nombre complexe z suivant

$$\frac{-2i^{171}}{1+i}.$$

Solution. Le module demandé vaut $|z| = \left|\frac{-2i^{171}}{1+i}\right| = \frac{|-2i^{171}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$(a) \lim_{x\to-\infty} (\exp(x).\ln(2-x)) \qquad\qquad (b) \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x+2}}$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto (\exp(x).\ln(2-x))$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 2-x \geq 0\} =]-\infty, 2]$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$. D'autre part, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2-x) = +\infty$ vu le théorème des limites des fonctions composées.
Pour lever l'indétermination "$0.\infty$", appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $\frac{\ln(2-x)}{\exp(-x)}$. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]-\infty, 2[$, considérons $f_1 : x \mapsto \ln(2-x)$ et $f_2 : x \mapsto \exp(-x)$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables dans V
2) La dérivée de f_2 vaut $-\exp(-x)$ et est non nulle dans V
3) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2-x) = +\infty$
4) De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{2-x}}{-\exp(-x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)\frac{1}{2-x} = 0.0 = 0.$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0^+.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x+2}}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x+2 > 0 \text{ et } \sqrt{x+2} \neq 1\} =]-2, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

Puisque tout intervalle ouvert comprenant -1 rencontre $A \cap]-\infty, -1[=]-2, -1[$, le calcul de la limite en $(-1)^-$ peut être envisagé.

D'une part, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (x^2-1) = 0^+$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} (1-\sqrt{x+2}) = 0$.
Pour lever l'indétermination "$0/0$", on multiplie numérateur et dénominateur par le binôme conjugé de $(1-\sqrt{x+2})$ et on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x+2}} &= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x^2-1)(1+\sqrt{x+2})}{1-x-2} \\
&= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x+2})}{-(x+1)} \\
&= \lim_{x\to(-1)^-} (1-x)(1+\sqrt{x+2}) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{-4} \frac{4x+3}{x^3+3x^2}\,dx \qquad\qquad (b)\quad \int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\cos(x^2)dx$$

Solution. **(a)** La fonction $f : x \mapsto \frac{4x+3}{x^3+3x^2} = \frac{4x+3}{x^2(x+3)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$ donc sur $]-\infty,-4]$, ensemble non borné. Comme elle est positive sur cet ensemble, vérifions l'intégrabilité de la fonction en $-\infty$ en utilisant la définition. Cette fonction est continue sur $]-\infty,-4]$ donc sur les intervalles fermés bornés de la forme $[t,-4]$ avec $t < -4$; elle y est donc intégrable. De plus, en utilisant le théorème de décomposition en fractions simples, on a

$$f(x) = \frac{4x+3}{x^3+3x^2} = \frac{4x+3}{x^2(x+3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+3},$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$. Ainsi, une primitive de f sur $]-\infty,-4[$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x+3}{x^3+3x^2}\,dx &\simeq \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x+3}dx \\
&\simeq \ln(|x|) - \frac{1}{x} - \ln(|x+3|) \\
&\simeq \ln\left(\left|\frac{x}{x+3}\right|\right) - \frac{1}{x} \simeq \ln\left(\frac{x}{x+3}\right) - \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t < -4$, on a

$$\begin{aligned}
\int_t^{-4} \frac{4x+3}{x^3+3x^2}\,dx &= \left[\ln\left(\frac{x}{x+3}\right) - \frac{1}{x}\right]_t^{-4} \\
&= \ln(4) + \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{t}{t+3}\right) + \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^{-4} \frac{4x+3}{x^3+3x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\ln(4) + \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{t}{t+3}\right) + \frac{1}{t}\right) = 2\ln(2) + \frac{1}{4},$$

puisque $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\frac{t}{t+3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{y\to1}\ln(y) = 0$, et donc $\lim\limits_{t\to-\infty}\ln\left(\frac{t}{t+3}\right) = 0$ (par le théorème des limites des fonctions composées).

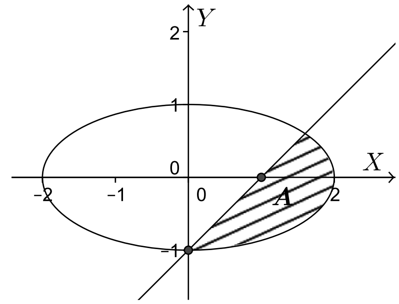
Comme cette limite existe et est finie et que la fonction f est positive sur $]-\infty,-4]$, on conclut que la fonction f est intégrable sur $]-\infty,-4]$ et que l'intégrale demandée vaut $2\ln(2) + \frac{1}{4}$.

Remarque :
On aurait également pu prouver l'intégrabilité de la fonction par le critère en θ, avec $\theta = 2 > 1$.

(b) La fonction $f : x \mapsto x\cos^2(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}]$ et intégrable sur cet ensemble. On a

$$\int_0^{\sqrt{\pi}/2} x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}/2} D\left(x^2\right)\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x^2\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une ellipse et l'autre est une droite.)**



Solution. L'ellipse a pour équation $x^2 + 4y^2 = 4$ et la droite $y = x - 1$. Afin de décrire l'ensemble, commençons par rechercher l'ordonnée des points d'intersection des courbes. Le système

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ (y+1)^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

conduit à l'équation

$$5y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = 3/5.$$

On a donc la description suivante

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 3/5],\ x \in [y+1, 2\sqrt{1-y^2}] \right\}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \arcsin(2x)$ vérifie l'équation différentielle**

$$(1 - 4x^2)D^2 f(x) - 4xDf(x) \ = 0.$$

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} : -1 < 2x < 1\} =]-1/2, 1/2[$. Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = D(\arcsin(2x)) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad \text{et} \quad D^2 f(x) = D\left(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right) = \frac{8x}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}},$$

et donc

$$\begin{aligned} (1-4x^2)D^2 f(x) - 4xDf(x) &= (1-4x^2)\frac{8x}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}} - 4x\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \\ &= \frac{8x}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{8x}{\sqrt{1-4x^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + Df(x) = x\ e^x.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + z = z(z+1)$ et ses zéros sont -1 et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme

de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient 1 de l'argument n'est pas zéro du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = (Ax+B)\ e^x$ où A et B sont des constantes à déterminer.
Puisque

$$Df_P(x) = A\ e^x + (Ax+B)\ e^x = (Ax + (A+B))\ e^x$$

et

$$D^2 f_P(x) = A\ e^x + (Ax + (A+B))\ e^x = (Ax + (2A+B))\ e^x,$$

on a

$$\begin{aligned} D^2 f_P(x) + Df_P(x) = x\ e^x \quad & \Leftrightarrow \quad (Ax + (2A+B))\ e^x + (Ax + (A+B))\ e^x = x\ e^x \\ & \Leftrightarrow \quad (2Ax + (3A+2B))\ e^x = x\ e^x \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2A = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -3/4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-x} + c_2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R},$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
En se transformant en glace, l'eau voit son volume augmenter de 1/15. Quelle quantité d'eau en litres faut-il pour obtenir $\frac{4}{5}$ m^3 de glace ?

Solution. Soit x la quantité d'eau demandée exprimée en m^3 .
On a

$$\left(1 + \frac{1}{15}\right) x = \frac{4}{5}$$

ou encore

$$\frac{16}{15} x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 16x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Il faut donc $\frac{3}{4} = 0,75$ m^3 d'eau pour obtenir $\frac{4}{5}$ m^3 de glace. En conclusion, comme 1 m^3 est égal à 1000 $=10^{\ 3}$ litres, il faut donc 750 litres d'eau pour obtenir $\frac{4}{5}$ m^3 de glace.