1, 2, 3...Sciences

Année académique 2017-2018

Corrigé de l'examen de mathématique du 4 septembre 2018

Version 28 août 2018

QUESTIONNAIRE

Théorie

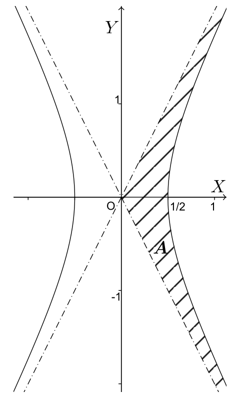
Théorie 1
(a) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.
(b) En établir (énoncé + preuve) l'expression analytique dans une base orthonormée de l'espace.

Théorie 2
(a) Définir les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction g d'une variable en un point t de son domaine de définition.
(b) Enoncer et démontrer le lien entre ces deux notions.

Exercices

1. (10 points)
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$
   $$|1-|x|| \leq 2x - x^2.$$
   (b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante
   $$\cos(4x) - 1 = \sin(4x).$$
   (c) Justifier si l'expression suivante est définie, et si c'est le cas, la simplifier au maximum
   $$\cos\left(\arccos\left(\frac{\pi \ln(e^3)}{6}\right)\right).$$
   (d)Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe
   $$z = \frac{1+3i}{(1+i)^2}\ .$$
2. (17 points) Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
   $$(a)\ \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{cotg}(x)}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$$
3. (17 points) Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
   $$(a)\ \int_0^{\pi/6} \sin(x)\sin(2x)\ dx \qquad\qquad (b)\ \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x(x^2+1)}\ dx$$

4. (5 points) Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.)



5. (17 points)
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle
   $$Df + f^2 = f.$$
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$D^2 f(x) + f(x) = e^{-ix}.$$

6. (4 points) Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.

   Un garage propose deux formules de location de voitures.
   – Formule A : 45 euros par jour, 50 premiers km gratuits et 0,25 euro par km parcouru
   – Formule B : 40 euros par jour et 0,2 euro par km parcouru
   On veut louer une voiture pour 2 jours. Quelle formule choisir pour qu'elle soit la moins chère possible ? Discuter les différents cas en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

CORRIGE

Théorie

Théorie 1
(a) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.
(b) En établir (énoncé + preuve) l'expression analytique dans une base orthonormée de l'espace.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2
(a) Définir les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction g d'une variable en un point t de son domaine de définition.
(b) Enoncer et démontrer le lien entre ces deux notions.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$**
   $$|1 - |x|| \leq 2x - x^2.$$

Solution. L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$; comme le premier membre est positif, le second doit l'être aussi. Les solutions ne peuvent donc appartenir qu'à l'intervalle $[0,2]$. Dans ce cas, $|x| = x$ et l'inéquation s'écrit

$$\begin{aligned}
|1-x| \leq 2x - x^2 \quad & \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x \leq 1 - x \leq 2x - x^2 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \leq 0 \text{ et } x^2 - 3x + 1 \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $x \in [0,2]$, l'ensemble des solutions est donc $S = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

(b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(4x) - 1 = \sin(4x).$$

Solution. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque $1-\cos(4x) = 2\sin^2(2x)$ et que $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$, l'équation donnée est équivalente à

$$\begin{aligned}
-2\sin^2(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) \quad & \Leftrightarrow \quad -\sin^2(2x) = \sin(2x)\cos(2x) \\
& \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 0 \text{ ou } -\sin(2x) = \cos(2x) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((2x = k\pi\ ) \text{ OU } (2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi)\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((x = k\frac{\pi}{2}\ ) \text{ OU } (x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})\right)
\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8}, 0, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$.

(c) Justifier si l'expression suivante est définie, et si c'est le cas, la simplifier au maximum

$$\cos\left(\operatorname{arcos}\left(\frac{\pi\ln(e^3)}{6}\right)\right).$$

Solution. Comme ln est défini sur $]0,+\infty[$ et que $\ln(e^3) = 3$, on a $\frac{\pi\ln(e^3)}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.
Mais puisque arcos est défini sur $[-1,1]$ et que $\frac{\pi}{2}$ n'est pas dans cet ensemble, l'expression n'est pas définie !

(d) Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1+3i}{(1+i)^2}\ .$$

Solution. Puisque $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$, on a

$$z = \frac{1+3i}{(1+i)^2} = \frac{1+3i}{2i} = \frac{(1+3i)i}{2i\ .\ i} = \frac{i-3}{-2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

La partie réelle de z vaut donc $\frac{3}{2}$ et sa partie imaginaire vaut $\frac{-1}{2}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg}(x)}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} > 0 \text{ et } |x| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Par application du théorème des limites des fonctions composées, comme

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{|x|} = 1^+ \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 1^+} \ln(y) = 0^+,$$

la limite demandée vaut 0^+.

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{cotg}(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2},\ k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant $\frac{\pi}{2}$ rencontre A, le calcul de la limite en $\frac{\pi}{2}$ peut donc être envisagé.
Pour lever l'indétermination "0/0" , appliquons le théorème de l'Hospital. Vérifions-en les hypothèses en considérant un voisinage $V = \left]0, , \frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
Les fonctions $g : x \mapsto \operatorname{cotg}(x)$ et $h : x \mapsto x - \frac{\pi}{2}$ sont dérivables dans V, la dérivée de h est non nulle dans V, les limites de g et h en $\frac{\pi}{2}$ valent 0 et

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1.$$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut -1.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(a)\ \int_0^{\pi/6} \sin(x)\sin(2x)\ dx \qquad\qquad (b)\ \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x(x^2+1)}\ dx$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto \sin(x)\sin(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{6}]$. Cela étant, comme $\sin(x)\sin(2x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \cos(3x))$, on a

$$\int_0^{\pi/6} \sin(x)\sin(2x)\ dx = \frac{1}{2}\left[\sin(x) - \frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

On peut également remplacer $\sin(2x)$ par $2\sin(x)\cos(x)$ et calculer

$$\int_0^{\pi/6} 2\sin^2(x)\cos(x)\ dx = 2\left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}.$$

(b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x(x^2+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble fermé non borné. Comme elle est positive sur cet ensemble, vérifions l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$ en utilisant la définition. Cette fonction est continue sur $[1, +\infty[$ donc sur les intervalles fermés bornés de la forme $[1, t]$ avec $t > 1$; elle y est donc intégrable. De plus, en utilisant le théorème de décomposition en fractions simples, on a

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{x^2+1},$$

quel que soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ainsi, une primitive de f sur $]1, +\infty[$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\ dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\
&\simeq -\ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|)\ +\ \operatorname{arctg}(x) \\
&\simeq -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\ +\ \operatorname{arctg}(x) \\
&\simeq \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)\ +\ \operatorname{arctg}(x).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t > 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^t f(x)\ dx &= \left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)\ +\ \mathrm{arctg}(x)\right]_1^t \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right)\ +\ \mathrm{arctg}(t) - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

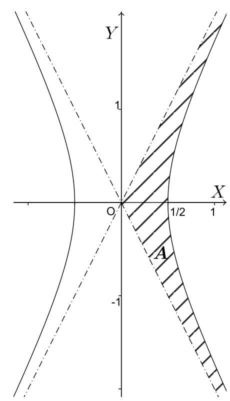
$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\ +\ \mathrm{arctg}(t)\right) - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2},$$

puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right)\right) = \lim\limits_{y\to 1}\ln(y) = 0$.

Comme cette limite existe et est finie et que la fonction f est positive sur $[1,+\infty[$, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que l'intégrale demandée vaut $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$.

Remarque :
On aurait également pu prouver l'intégrabilité de la fonction par le critère en θ, avec $\theta = 2 > 1$.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.)**



Solution. L'hyperbole a pour équation $4x^2 - y^2 = 1$ et les asymptotes de l'hyperbole $y = 2x$ et $y = -2x$.
On a donc la description suivante

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \in]-\infty,0],\ x\in\left[-\frac{y}{2},\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}\right]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,+\infty[,\ x\in\left[\frac{y}{2},\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}\right]\right\}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction $x\mapsto \frac{1}{1-e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle**

$$Df + f^2 = f.$$

Solution. La fonction donnée est dérivable sur $\{x\in\mathbb{R} : e^{-x}\neq 1\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et on a

$$D\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) = \frac{-\ e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

Sur cet ensemble, on a donc

$$Df + f^2 = \frac{-\ e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} + \left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\,e^{-x}+1}{(1-e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{1-e^{-x}} \\ &= f. \end{aligned}$$

L'équation est donc vérifiée.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + f(x) = e^{-ix}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2 f(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2+1$ et ses zéros sont $-i$ et i. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix},\ x \in \mathbb{R},$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre est une exponentielle-polynôme, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $-i$ de l'argument est zéro (simple) du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = Ax\ e^{-ix}$ où A est une constante à déterminer. Puisque

$$Df_P(x) = A\ e^{-ix} - Aix\ e^{-ix} = A(1-ix)\ e^{-ix}$$

et

$$D^2 f_P(x) = -Ai\ e^{-ix} - Ai(1-ix)\ e^{-ix} = A(-2i-x)\ e^{-ix},$$

on a

$$\begin{aligned} & D^2 f_P(x) + f_P(x) = \ e^{-ix} \\ \Leftrightarrow\ & A(-2i-x)\ e^{-ix} + Ax\ e^{-ix} = \ e^{-ix} \\ \Leftrightarrow\ & -2iA = 1 \\ \Leftrightarrow\ & A = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{i}{2} x\ e^{-ix},\ x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} + \frac{i}{2} x\ e^{-ix} = \left(c_1 + \frac{i}{2} x\right) e^{-ix} + c_2 e^{ix}\ ,\ x \in \mathbb{R},$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Un garage propose deux formules de location de voitures.**
   – Formule A : 45 euros par jour, 50 premiers km gratuits et 0,25 euro par km parcouru
   – Formule B : 40 euros par jour et 0,2 euro par km parcouru
   On veut louer une voiture pour 2 jours. Quelle formule choisir pour qu'elle soit la moins chère possible ? Discuter les différents cas en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

   Solution. Soit x le nombre de kilomètres parcourus. En deux jours, la formule B coûte $2\ .\ 40+0{,}20x$ euros et la formule A coûte $\begin{cases} 2\ .\ 45 \text{ euros si } x < 50 \\ 2\ .\ 45+0{,}25(x\text{-}50) \text{ si } x \geq 50. \end{cases}$

Dès lors,
- si $x < 50$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned} & 80 + 0,20x < 90 \\ \Leftrightarrow \quad & 0,20x < 10 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 50 \end{aligned}$$

- si $x \geq 50$, la formule B est plus avantageuse si

$$\begin{aligned} & 80 + 0,20x < 90 + 0,25(x - 50) \\ \Leftrightarrow \quad & 80 + 0,20x < 90 + 0,25x - 12,5 \\ \Leftrightarrow \quad & 2,5 < 0,05x \\ \Leftrightarrow \quad & 50 < x. \end{aligned}$$

Au total, la formule B coûte moins cher quel que soit le nombre de kilomètres parcourus.