1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2017-2018

Corrigé de l'examen de mathématique du 13 juin 2018

Version 14 juin 2018

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1
Définir et interpréter géométriquement la notion de concavité de la fonction $x \mapsto 1 + \ln(x)$.

Théorie 2
(a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
(b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Théorie 3
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?
(b) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur θ sous laquelle la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\theta}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercices

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$\sqrt{(2x^2 + x - 3)^2} = 3 - 3x^2.$$

   (b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[0, \pi]$, résoudre l'équation suivante
$$\cos(3x)\cos(2x) + \cos^2(x) = \frac{1}{2}.$$

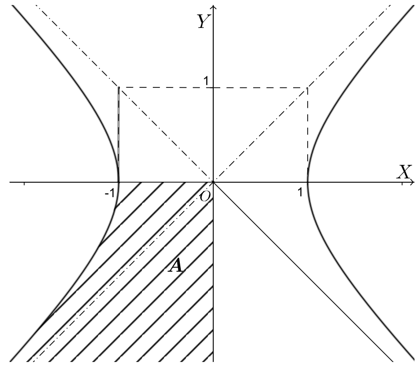
   (c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
$$\arccos\left(-\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right).$$

   (d) Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z suivant
$$z = \frac{i^{170}}{1+2i}.$$

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
$$(a)\ \lim_{x\to 0^-} (\ln(-x)\ \ \mathrm{tg}(x)) \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}\left(\exp\left(\frac{x^2+2}{1-x}\right)\right)$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
$$(a)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2 - x}\ dx \qquad\qquad (b)\ \int_0^1 x\ln(x^3)dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.)



5. (a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1-x^2)$ vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)D^2f(x) - \left(x + \frac{1}{x}\right)Df(x) \ = 0.$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + Df(x) = x^2.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.

Un tonneau rempli au tiers d'eau pèse 41 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse deux centièmes de tonne de plus. Quelle est la capacité en hl de ce tonneau et quel est le poids en g du tonneau vide ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1
Définir et interpréter géométriquement la notion de concavité de la fonction $x \mapsto 1 + \ln(x)$.

Solution. La fonction $f : x \mapsto 1 + \ln(x)$ est concave sur $I =]0, +\infty[$ si

$$x_0, x_1 \in I \text{ et } r \in [0,1] \Rightarrow \ln(x_0 + r(x_1 - x_0)) \geq \ln(x_0) + r(\ln(x_1) - \ln(x_0)).$$

Géométriquement, cela signifie que quels que soient les points x_0 et x_1 de I et quel que soit le point x compris entre x_0 et x_1, l'ordonnée du point P du graphique de f d'abscisse x est supérieure ou égale à l'ordonnée du point Q de même abscisse situé sur la droite passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 1 + \ln(x_0))$ et $(x_1, f(x_1)) = (x_1, 1 + \ln(x_1))$.

Théorie 2
(a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
(b) En déduire que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins un zéro réel. Justifier.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3
(a) On donne une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Quand dit-on que celle-ci est intégrable sur cet intervalle ?

(b) Utiliser la définition donnée au point précédent pour établir la condition nécessaire et suffisante sur θ sous laquelle la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\theta}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$**

$$\sqrt{(2x^2 + x - 3)^2} = 3 - 3x^2.$$

Solution. Puisque $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$, l'équation, définie sur $\mathbb{R}$, s'écrit aussi

$$|2x^2 + x - 3| = 3 - 3x^2.$$

Comme le premier membre de cette équation est positif, le second doit l'être aussi. Les solutions ne peuvent donc appartenir qu'à l'intervalle $[-1, 1]$.
Si $x \in [-1, 1]$, comme $|2x^2 + x - 3| = |(2x + 3)(x - 1)| = (2x + 3)(1 - x)$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \sqrt{(2x^2 + x - 3)^2} = 3 - 3x^2 &\Leftrightarrow (2x + 3)(1 - x) = 3(1 - x)(1 + x) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2x + 3 = 3(1 + x) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

et l'ensemble des solutions est donc $S = \{0, 1\}$.

(b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[0, \pi]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(3x)\cos(2x) + \cos^2(x) = \frac{1}{2}.$$

Solution. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$; puisque $\cos^2(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\cos(2x)}{2}$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} &\cos(3x)\cos(2x) + \cos^2(x) - \frac{1}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\cos(3x)\cos(2x) + \frac{\cos(2x)}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\cos(2x) = 0 \ \text{ OU } \ \cos(3x) = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ &\exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ) \text{ OU } (3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) \right) \\ \Leftrightarrow\ &\exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ ) \text{ OU } (x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \ \text{ OU } \ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}) \right). \end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, \pi]$ sont $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}, \dfrac{8\pi}{9}$.

(c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\arccos\left(-\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right).$$

Solution. Comme $\mathrm{dom}(\sin) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{im}(-\sin) = [-1, 1] = \mathrm{dom}(\arccos)$, l'expression $\arccos\left(-\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$ est définie.

Dès lors, vu que $-\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{15\pi}{14}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$, on a

$$\operatorname{arcos}\left(-\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right) = \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)\right) = \frac{13\pi}{14},$$

les fonctions arcos et cos étant inverses l'une de l'autre pour tout $x \in [0,\pi]$.

(d) Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z suivant

$$z = \frac{i^{170}}{1+2i}.$$

Solution. Comme

$$z = \frac{i^{170}}{1+2i} = \frac{i^2(1-2i)}{1+4} = \frac{-1(1-2i)}{5} = \frac{-1}{5} + \frac{2i}{5},$$

les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z sont respectivement

$$\Re(z) = \frac{-1}{5} \text{ et } \Im(z) = \frac{2}{5}.$$

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(a)\ \lim_{x\to 0^-} (\ln(-x)\ \operatorname{tg}(x)) \qquad (b)\ \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\exp\left(\frac{x^2+2}{1-x}\right)\right)$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto \ln(-x)\ \operatorname{tg}(x)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre $A \cap\,]-\infty, 0[= A$, le calcul de la limite peut être envisagé.
D'une part, on a $\lim_{x\to 0^-}(-x) = 0^+$ et $\lim_{y\to 0^+}\ln(y) = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0^-}\ln(-x) = -\infty$ vu le théorème des limites des fonctions composées. D'autre part, on a $\lim_{x\to 0^-}\operatorname{tg}(x) = 0^-$.
Pour lever l'indétermination "$\infty.0$", appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $\frac{\ln(-x)}{\operatorname{cotg}(x)}$. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]-\frac{\pi}{2}, 0[$, considérons $f_1 : x \mapsto \ln(-x)$ et $g_1 : x \mapsto \operatorname{cotg}(x)$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.
2) La dérivée de g_1 vaut $\frac{-1}{\sin^2(x)}$ donc est non nulle sur V.
3) On a $\lim_{x\to 0^-}\ln(-x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^-}\operatorname{cotg}(x) = -\infty$.
4) De plus, $\lim_{x\to 0^-}\frac{Df_1(x)}{Dg_1(x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin^2(x)}{x} = $ "$0/0$".

Pour lever cette indétermination, écrivons cette limite sous la forme $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0^-}(-\sin(x))$. Puisque $\lim_{x\to 0^-}(-\sin(x)) = 0$, appliquons à nouveau le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $\frac{\sin(x)}{x}$ et vérifions-en les hypothèses.

Toujours dans $V =]-\frac{\pi}{2}, 0[$, considérons $f_2 : x \mapsto \sin(x)$ et $g_2 : x \mapsto x$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.

2) La dérivée de g_2 vaut 1 donc est non nulle sur V.
3) On a $\lim_{x\to 0^-} \sin(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^-} x = 0$.
4) De plus, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{Df_2(x)}{Dg_2(x)} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$.

Dès lors, par deux applications successives du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0^+ puisque $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{-\sin^2(x)}{x} = 1.0 = 0$ et que le signe du produit des limites des deux facteurs de la limite demandée est positif.

(b) La fonction $x \mapsto \operatorname{arctg}\left(\exp\left(\dfrac{x^2+2}{1-x}\right)\right)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Comme cet ensemble n'est pas minoré, la limite peut être envisagée.

Comme on a $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2}{1-x} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{-x} = +\infty$, $\lim_{y\to +\infty} \exp(y) = +\infty$ et $\lim_{z\to +\infty} \operatorname{arctg}(z) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$, le théorème des limites des fonctions composées donne $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\exp\left(\dfrac{x^2+2}{1-x}\right)\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(a)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-x}\,dx \qquad\qquad (b)\ \int_0^1 x\ln(x^3)dx$$

Solution. **(a)** La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ donc sur $]-\infty,-1]$, ensemble fermé, non borné. Comme elle est positive sur cet ensemble, vérifions l'intégrabilité de la fonction en $-\infty$ en utilisant la définition. Cette fonction est continue sur $]-\infty,-1]$ donc sur les intervalles fermés bornés de la forme $[t,-1]$ avec $t < -1$; elle y est donc intégrable. De plus, en utilisant le théorème de décomposition en fractions simples, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x},$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Ainsi, une primitive de f sur $]-\infty,-1[$ est donnée par

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)dx \\ &\simeq \ln(|x-1|) - \ln(|x|) \\ &\simeq \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right) \simeq \ln\left(\frac{x-1}{x}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t < -1$, on a

$$\begin{aligned}\int_t^{-1} \frac{1}{x^2-x}\,dx &= \left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]_t^{-1} \\ &= \ln(2) - \ln\left(\frac{t-1}{t}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x^2-x}\,dx = \ln(2) - \lim_{t\to-\infty} \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) = \ln(2),$$

puisque $\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)=1$ et $\lim_{y\to 1}\ln(y)=0$, et donc $\lim_{t\to-\infty}\ln\left(\frac{t-1}{t}\right)=0$ (par le théorème des limites des fonctions composées).

Comme cette limite existe et est finie et que la fonction f est positive sur $]-\infty,-1]$, on conclut que la fonction f est intégrable sur $]-\infty,-1]$ et que l'intégrale demandée vaut $\ln(2)$.

Remarque :
On aurait également pu prouver l'intégrabilité de la fonction par le critère en θ, avec $\theta = 2 > 1$.

(b) La fonction $f : x \mapsto x\ln(x^3)$ est continue sur $]0,+\infty[$; elle est donc continue sur l'intervalle borné non fermé $]0,1]$.
Prouvons l'intégrabilité de la fonction en 0 par prolongement continu. En effet, on a

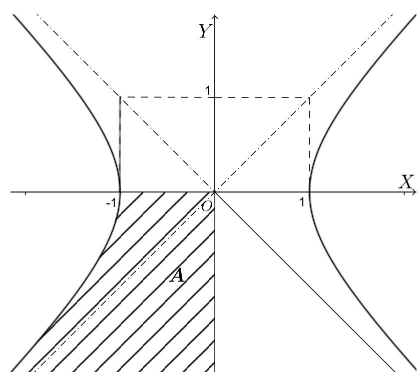
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln(x^3)\right)=\lim_{x\to 0^+}(3x\ln(x))=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3\ln(x)}{1/x}\right)= \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}.$$

Par application du théorème de l'Hospital, puisque $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3/x}{-1/x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}(-3x)=0$, on a $\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln(x^3)\right)=0$. Par conséquent, la fonction est intégrable en 0 et donc sur $]0,1]$.

En intégrant par parties, on a

$$\int_0^1 x\ln(x^3)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x^3)\right]_0^1-\int_0^1\frac{3}{2}x\ dx=-\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^1=-\frac{3}{4}.$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.)**



Solution. L'hyperbole a pour équation $x^2-y^2=1$.
On a donc la description suivante

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in]-\infty,-1],\ y\in]-\infty,-\sqrt{x^2-1}]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in]-\infty,0]\right\}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction $f : x\mapsto \ln(1-x^2)$ vérifie l'équation différentielle**

$$(1-x^2)D^2f(x)-\left(x+\frac{1}{x}\right)Df(x)\ =0.$$

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\{x\in\mathbb{R} : 1-x^2>0\}=]-1,1[$. Sur cet ensemble, on a

$$Df(x)=D(\ln(1-x^2))=\frac{-2x}{1-x^2}\quad\text{et}\quad D^2f(x)=D\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)=\frac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2},$$

et donc

$$\begin{aligned}(1-x^2)\ .\ D^2f(x)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\ .\ Df(x) &= (1-x^2)\frac{-2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{-2x}{1-x^2}\\ &= \frac{-2(1+x^2)}{1-x^2}-\frac{x^2+1}{x}\frac{-2x}{1-x^2}\\ &= \frac{-2(1+x^2)+2(x^2+1)}{1-x^2}=0.\end{aligned}$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x)+Df(x)=x^2.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x)+Df(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto z^2+z=z(z+1)$ et ses zéros sont -1 et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x)=c_1e^{-x}+c_2,\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1,c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre, x^2e^{0x}, est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme de degré 2 et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument est zéro (simple) du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x)=(Ax^2+Bx+C)x\ e^{0x}=Ax^3+Bx^2+Cx$ où A, B et C sont des constantes à déterminer. Puisque

$$Df_P(x)=3Ax^2+2Bx+C\ \text{ et }\ D^2f_P(x)=6Ax+2B,$$

on a

$$\begin{aligned}& D^2f_P(x)+Df_P(x)=x^2\\ \Leftrightarrow\ & 6Ax+2B+3Ax^2+2Bx+C=x^2\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases}3A=1\\ 6A+2B=0\\ 2B+C=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases}A=1/3\\ B=-1\\ C=2\end{cases}.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x)=c_1e^{-x}+c_2+\frac{x^3}{3}-x^2+2x,\ x\in\mathbb{R},$$

où c_1,c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un tonneau rempli au tiers d'eau pèse 41 ***kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse deux centièmes de tonne de plus. Quelle est la capacité en hl de ce tonneau et quel est***

le poids en g du tonneau vide ?

Solution. Notons x le poids en kg du tonneau vide et y le poids en kg de l'eau quand il est rempli. Puisque 1 tonne vaut 1000 kg, rempli aux 3/4, le tonneau pèse 20 kg de plus que lorsqu'il est rempli au tiers, à savoir 41 kg.
On a donc le système suivant

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x + \dfrac{y}{3} = 41 \\ x + \dfrac{3y}{4} = 61 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 123 \\ 4x + 3y = 244 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 25 \\ y = 48 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Comme 1 l d'eau pèse 1 kg, que 1 hl = 100 l et que 1 kg = 1000 g, le tonneau peut contenir 48 kg c'est-à-dire 48 l ou encore 0,48 hl d'eau et vide il pèse 25 kg, à savoir 25 000 g.

En conclusion, la capacité du tonneau est de 0,48 hl et vide, il pèse 25 000 g.