1, 2, 3...Sciences

Année académique 2017-2018

Corrigé de l'examen de mathématique du 22 mai 2018

Version 17 mai 2018

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1

Définir et interpréter géométriquement la notion de convexité de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Théorie 2

(a) Définir une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1.
(b) Justifier l'appellation " linéaire" de ce type d'équation.
(c) Donner la structure générale de l'ensemble des solutions d'une telle équation et justifier votre réponse.

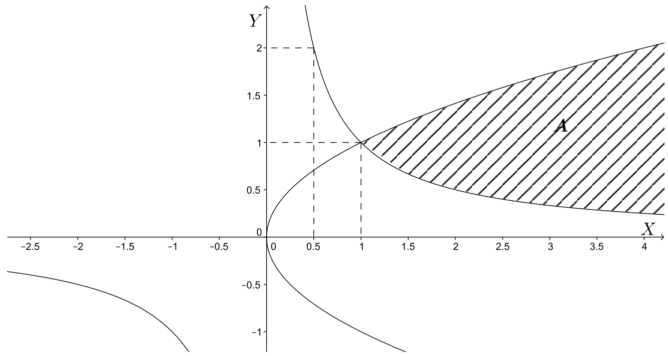
Théorie 3

Quel est le lien entre dérivabilité et continuité d'une fonction réelle ? Justifier.

Exercices

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$\sqrt{(2x^2-3x-2)^2} = 3x(2-x).$$
(b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante
$$\cos(3x)\cos(2x) + \frac{1}{2} = \sin^2(x).$$
(c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
$$\operatorname{arcos}\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right).$$
(d) Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z suivant
$$z = \frac{i^{175}}{1-2i}.$$
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.
$$(a)\ \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ \operatorname{cotg}(x)\right) \qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{(3-x)(x+2)}{x+\sqrt{x^2+4}}$$
3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.
$$(a)\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x}\,dx \qquad (b)\ \int_0^e x\ln(x^2)dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre est une hyperbole équilatère.)



5. (a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1-3x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{1-9x^2}{9} D^2 f(x) - 2x Df(x) \;= -1.$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2 f(x) + Df(x) = x\ e^{-x}.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.

Un tonneau rempli à moitié d'eau pèse 56 kg. Rempli aux deux tiers d'eau, il pèse un centième de tonne de plus. Quelle est la capacité en hl de ce tonneau et quel est le poids en g du tonneau vide ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1
Définir et interpréter géométriquement la notion de convexité de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution. La fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ est convexe sur $I =]0, +\infty[$ si

$$x_0, x_1 \in I \text{ et } r \in [0,1] \Rightarrow -\ln\left(x_0 + r(x_1 - x_0)\right) \leq -\ln\left(x_0\right) + r\left(-\ln\left(x_1\right) + \ln\left(x_0\right)\right).$$

Géométriquement, cela signifie que quels que soient les points x_0 et x_1 de I et quel que soit le point x compris entre x_0 et x_1, l'ordonnée du point P du graphique de f d'abscisse x est inférieure ou égale à l'ordonnée du point Q de même abscisse situé sur la droite passant par les points de coordonnées $(x_0, f(x_0)) = (x_0, -\ln(x_0))$ et $(x_1, f(x_1)) = (x_1, -\ln(x_1))$.

Théorie 2
(a) Définir une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1.
(b) Justifier l'appellation " linéaire" de ce type d'équation.
(c) Donner la structure générale de l'ensemble des solutions d'une telle équation et justifier votre réponse.

Pour une réponse ≪ type ≫, voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 3
Quel est le lien entre dérivabilité et continuité d'une fonction réelle ? Justifier.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$**

$$\sqrt{(2x^2-3x-2)^2} = 3x(2-x).$$

Solution. Puisque $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$, l'équation, définie sur $\mathbb{R}$, s'écrit aussi

$$|2x^2-3x-2| = 3x(2-x).$$

Comme le premier membre de cette équation est positif, le second doit l'être aussi. Les solutions ne peuvent donc appartenir qu'à l'intervalle $[0,2]$.
Si $x \in [0,2]$, comme $|2x^2-3x-2| = |(2x+1)(x-2)| = (2x+1)(2-x)$, l'équation devient

$$(2x+1)(2-x) = 3x(2-x) \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } 2x+1 = 3x \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1$$

et l'ensemble des solutions est donc $S = \{1, 2\}$.

(b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(3x)\cos(2x) + \frac{1}{2} = \sin^2(x).$$

Solution. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$; puisque $\sin^2(x) - \frac{1}{2} = -\frac{\cos(2x)}{2}$, l'équation donnée est équivalente à

$$\cos(3x)\cos(2x) = \sin^2(x) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x)\cos(2x) = -\frac{\cos(2x)}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ OU } \cos(3x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ) \text{ OU } (3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ ou } \ 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \left((x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ ) \text{ OU } (x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \ \text{ ou } \ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{2\pi}{9}, \pm\frac{4\pi}{9}$.

(c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\arccos\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right).$$

Solution. Comme $\operatorname{dom}(\cos) = \mathbb{R}$ et $\operatorname{im}(\cos) = [-1,1] = \operatorname{dom}(\arccos)$, l'expression $\arccos\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)$ est définie.
Dès lors, vu que $-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on a

$$\arccos\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)) = \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{2\pi}{5},$$

les fonctions arcos et cos étant inverses l'une de l'autre pour tout $x \in [0, \pi]$.

(d)Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z suivant

$$z = \frac{i^{175}}{1-2i}.$$

Solution. Comme
$$z = \frac{i^{175}}{1-2i} = \frac{i^3(1+2i)}{1+4} = \frac{-i(1+2i)}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5},$$
les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z sont respectivement
$$\Re(z) = \frac{2}{5} \text{ et } \Im(z) = \frac{-1}{5}$$
.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(a) \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \ \operatorname{cotg}(x)\right) \qquad\qquad (b) \lim_{x\to-\infty} \frac{(3-x)(x+2)}{x+\sqrt{x^2+4}}$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \ \operatorname{cotg}(x)$ est définie sur
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{\pi}{2} \ \text{ et } x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$
Comme tout intervalle ouvert contenant $\frac{\pi}{2}$ rencontre $A \cap]-\infty, \frac{\pi}{2}[= A$, le calcul de la limite peut être envisagé.
D'une part, on a $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{y\to0^+} \ln(y) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\infty$ vu le théorème des limites des fonctions composées. D'autre part, comme $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{cotg}(x) = 0^+$.
Pour lever l'indétermination "$\infty.0$", appliquons le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}(x)}$. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]0, \frac{\pi}{2}[$, considérons $f_1 : x \mapsto \ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $g_1 : x \mapsto \operatorname{tg}(x)$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.
2) La dérivée de g_1 vaut $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ donc est non nulle sur V.
3) On a $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}(x) = +\infty$.
4) De plus, $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{Df_1(x)}{Dg_1(x)} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\frac{-1}{(\pi/2)-x}}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\cos^2(x)}{x-\pi/2} =$ "0/0".

Pour lever cette indétermination, appliquons à nouveau le théorème de l'Hospital et vérifions-en les hypothèses.

Toujours dans $V =]0, \frac{\pi}{2}[$, considérons $f_2 : x \mapsto \cos^2(x)$ et $g_2 : x \mapsto \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.
2) La dérivée de g_2 vaut 1 donc est non nulle sur V.
3) On a $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \cos^2(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
4) De plus, $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{Df_2(x)}{Dg_2(x)} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{-2\cos(x)\sin(x)}{1} = 0$.

Dès lors, par deux applications successives du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0^- puisque $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\cos^2(x)}{x-\pi/2} = 0$ et que le signe du produit des limites des deux facteurs de la limite demandée est négatif.

Remarquons, qu'il était également possible de calculer cette limite en transformant la limite demandée en
$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \lim_{y\to0^+} \left(\ln(y) \ \operatorname{tg}(y)\right).$$

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{(3-x)(x+2)}{x+\sqrt{x^2+4}}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -\sqrt{x^2+4} \text{ et } x^2+4 > 0\} = \mathbb{R}.$$

Comme cet ensemble n'est pas minoré, la limite peut être envisagée.

D'une part, $\lim\limits_{x \to -\infty} ((3-x)(x+2)) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2+4}) = -\infty + \infty$.
Pour lever ces différentes indéterminations, mettons x en évidence au numérateur et au dénominateur. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{(3-x)(x+2)}{x+\sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+x+6}{x+|x|\sqrt{1+4/x^2}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x(1-\sqrt{1+4/x^2})} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{1-\sqrt{1+4/x^2}} \\
&= \frac{+\infty}{0^-} = -\infty.
\end{aligned}$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\, dx \qquad\qquad (b) \int_0^e x \ln(x^2) dx$$

Solution. **(a)** La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ donc sur $[1, +\infty[$. ensemble fermé, non borné. Comme elle est positive sur cet ensemble, vérifions l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$ en utilisant la définition. Cette fonction est continue sur $[1, +\infty[$ donc sur les intervalles fermés bornés de la forme $[1, t]$ avec $t > 1$; elle y est donc intégrable. De plus, en utilisant le théorème de décomposition en fractions simples, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

quel que soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Ainsi, une primitive de f sur $[1, +\infty[$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&\simeq \ln(|x|) \; - \; \ln(|x+1|) \\
&\simeq \ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) \simeq \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{1}{x^2+x}\, dx &= \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^t \\
&= \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2),$$

puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right) = 1$ et $\lim\limits_{y \to 1} \ln(y) = 0$, et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) = 0$ (par le théorème des limites des fonctions composées).

Comme cette limite existe et est finie et que la fonction f est positive sur $[1, +\infty[$, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale demandée vaut $\ln(2)$.

Remarque :
On aurait également pu prouver l'intégrabilité de la fonction par le critère en θ, avec $\theta = 2 > 1$.

(b) La fonction $f : x \mapsto x\ln(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_0$; elle est donc continue sur l'intervalle borné non fermé $]0, e]$.
Prouvons l'intégrabilité de la fonction en 0 par prolongement continu. En effet, on a

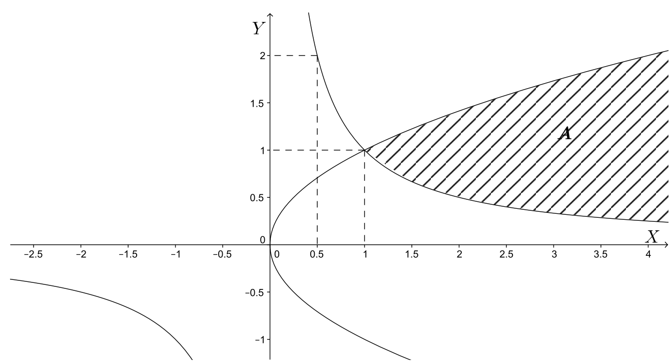
$$\lim_{x\to 0^+} \left(x\ln(x^2)\right) = \lim_{x\to 0^+} (2x\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2\ln(x)}{1/x}\right) = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}.$$

Par application du théorème de l'Hospital, puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2/x}{-1/x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-2x) = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(x\ln(x^2)\right) = 0$. Par conséquent, la fonction est intégrable en 0 et donc sur $]0, e]$.

En intégrant par parties, on a

$$\int_0^e x\ln(x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x^2)\right]_0^e - \int_0^e x\ dx = \frac{e^2}{2}\ln(e^2) - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e = e^2 - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2}.$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre est une hyperbole équilatère.)**



Solution. La parabole a pour équation $y^2 = x$ et l'hyperbole équilatère $y = \dfrac{1}{x}$. Ces courbes se coupent au point de coordonnées $(1, 1)$.
On a donc la description suivante

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0, 1],\ x \in [1/y, +\infty[\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [y^2, +\infty[\right\}.$$

5. **(a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - 3x)$ vérifie l'équation différentielle**

$$\frac{1 - 9x^2}{9} D^2 f(x) - 2xDf(x) = -1.$$

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\{x \in \mathbb{R} : 1 - 3x > 0\} =]-\infty, 1/3[$. Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = D(\ln(1 - 3x)) = \frac{-3}{1 - 3x} \quad \text{et} \quad D^2 f(x) = D\left(\frac{-3}{1 - 3x}\right) = \frac{-9}{(1 - 3x)^2},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1-9x^2}{9}D^2f(x)-2xDf(x) &= \frac{(1-3x)(1+3x)}{9}\frac{-9}{(1-3x)^2}-2x\frac{-3}{1-3x}\\
&= \frac{-(1+3x)+6x}{1-3x}\\
&= \frac{-1+3x}{1-3x}=-1.
\end{aligned}$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x)+Df(x)=x\ e^{-x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x)+Df(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto z^2+z=z(z+1)$ et ses zéros sont -1 et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x)=c_1e^{-x}+c_2,\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1,c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient -1 de l'argument est zéro (simple) du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x)=(Ax+B)x\ e^{-x}=(Ax^2+Bx)\ e^{-x}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Puisque

$$Df_P(x)=(2Ax+B)\ e^{-x}-(Ax^2+Bx)\ e^{-x}=(-Ax^2+(2A-B)x+B)\ e^{-x}$$

et

$$D^2f_P(x)=(-2Ax+2A-B)\ e^{-x}-(-Ax^2+(2A-B)x+B)\ e^{-x}=(Ax^2+(-4A+B)x+(2A-2B))\ e^{-x},$$

on a

$$\begin{aligned}
& D^2f_P(x)+Df_P(x)=x\ e^{-x}\\
\Leftrightarrow\quad & (Ax^2+(-4A+B)x+(2A-2B))\ e^{-x}+(-Ax^2+(2A-B)x+B)\ e^{-x}=x\ e^{-x}\\
\Leftrightarrow\quad & (-2Ax+(2A-B))\ e^{-x}=x\ e^{-x}\\
\Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{l}-2A=1\\ 2A=B\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{l}A=-1/2\\ B=-1\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x)=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\ e^{-x}=-\frac{x^2+2x}{2}\ e^{-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x)=c_1e^{-x}+c_2-\frac{x^2+2x}{2}\ e^{-x}=c_2+\left(c_1-\frac{x^2+2x}{2}\right)\ e^{-x},\ x\in\mathbb{R},$$

où c_1,c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un tonneau rempli à moitié d'eau pèse* 56 *kg. Rempli aux deux tiers d'eau, il pèse un centième de tonne de plus. Quelle est la capacité en hl de ce tonneau et quel est le poids en g du tonneau vide ?

Solution. Notons x le poids en kg du tonneau vide et y le poids en kg de l'eau quand il est rempli. Puisque 1 tonne vaut 1000 kg, rempli aux 2/3, le tonneau pèse 10 kg de plus que lorsqu'il est rempli à moitié, à savoir 66 kg.
On a donc le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \dfrac{y}{2} = 56 \\ x + \dfrac{2y}{3} = 66 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 112 \\ 3x + 2y = 198 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 26 \\ y = 60 \end{array} \right. .$$

Comme 1 l d'eau pèse 1 kg, que 1 hl = 100 l et que 1 kg = 1000 g, le tonneau peut contenir 60 kg c'est-à-dire 60 l ou encore 0,6 hl d'eau et vide il pèse 26 kg, à savoir 26 000 g.

En conclusion, la capacité du tonneau est de 0,6 hl et vide, il pèse 26 000 g.