1, 2, 3... Sciences

Année académique 2017-2018

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 16 août 2018
Chimistes et physiciens (bloc 1)
Géologues, géographes et biologistes (bloc2)

Version 17 août 2018

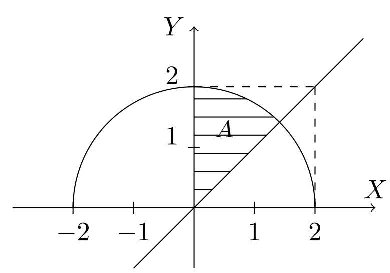
QUESTIONNAIRE

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.
(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.
(c) Calculer les expresions $D_x f(x,y)$ et $D_y f(x,y)$.
(d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(2\cos(t), \sin(t))$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = x \text{ arctg}(x).$$
(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de l'approximation à l'ordre 2.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

3. On donne
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2} \, dy \right) \, dx.$$
(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \cos\left(x^2+y^2\right)$. Si c'est possible, calculer
$$I = \int\int_A f(x,y) \, dx \, dy.$$



5. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
(a) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle inversible ? Calculer $\left(A^{-1}\right)_{31}$ dans ce cas.
(b) Montrer que A admet toujours une même valeur propre quel que soit α. Quelle est cette valeur propre ? Justifier.
(c) Pour $\alpha = \frac{13}{3}$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Justifier.
(d) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{13}{3}, 3\}$, alors A est diagonalisable. Justifier.

6. (PAS pour les biologistes)
   (a) La série suivante est-elle convergente ? Justifier.

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \ \frac{m\sin(mx)}{m^3+2}$$

   (b) La série suivante est-elle convergente ? Si oui, en déterminer la somme.

$$\sum_{j=4}^{+\infty} \frac{[\ln(\pi)]^{j-2}}{(j-3)!}$$

7. (PAS pour les biologistes) Des hamsters sont placés dans 3 compartiments A, B, C qui communiquent tous l'un avec l'autre. On observe que, de minute en minute, les hamsters migrent selon le schéma suivant :
   - un hamster du compartiment A a 60 % de chance d'y rester, 30 % de chance de passer dans le B et 10 % de chance de passer dans le C ;
   - un hamster du compartiment B a 50 % de chance d'y rester, 20 % de chance de passer dans le A et 30 % de chance de passer dans le C ;
   - un hamster du compartiment C a 40 % de chance d'y rester, 30 % de chance de passer dans le A et 30 % de chance de passer dans le B.

   (a) Déterminer la matrice de transition.
   (b) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'un hamster, initialement placé dans le compartiment A, soit dans le compartiment C après 2 minutes.

8. (UNIQUEMENT pour les physiciens)
   (a) Dans un repère orthonormé du plan, on donne le cercle d'équation cartésienne

$$(x-1)^2 + y^2 = 4.$$

   On note $\mathcal{C}$ la partie de ce cercle située dans le premier quadrant et $\mathcal{S}$ la surface délimitée par $\mathcal{C}$ et les axes de coordonnées.
   1) Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la surface $\mathcal{S}$ dans un repère orthonormé.
   2) Calculer les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}} y \ ds \qquad\qquad (2) \int_{\mathcal{C}} y \ dy \qquad\qquad (3) \iint_{\mathcal{S}} d\sigma$$

   3) Pour chacune des intégrales (1) et (2), obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de $\mathcal{C}$?
   4) Quel renseignement sur $\mathcal{S}$ donne l'intégrale (3) ?

   (b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$\cos(x)Df(x) - \sin(x)f(x) + \sin(x) = 0$$

   satisfaisant la condition $f(0) = 1$. Préciser le plus grand intervalle sur lequel elle est valable.

CORRIGÉ

Exercices

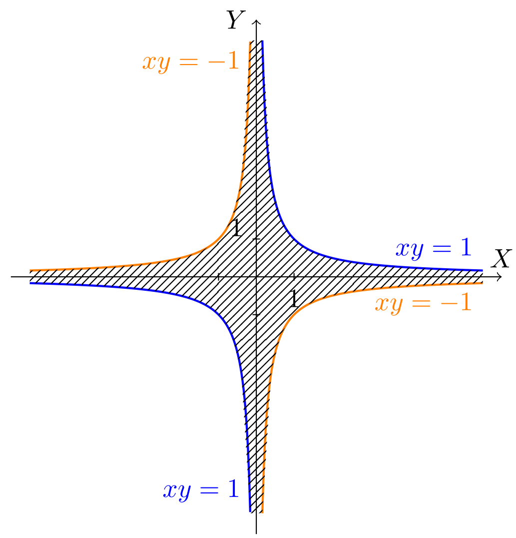
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(xy)$.**
(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur l'ensemble A décrit par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \in \,]-1,1[\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\right\}.$$

(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble A (partie hachurée) : les points des hyperboles d'équations cartésiennes $xy = 1$ et $xy = -1$ sont exclus de l'ensemble.



(c) Calculer les expresions $D_x f(x,y)$ et $D_y f(x,y)$.

Solution. En un point de A, on a

$$D_x f(x,y) = D_x\left(\arcsin(xy)\right) = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}$$

et

$$D_y f(x,y) = D_x\left(\arcsin(xy)\right) = \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}\ .$$

(d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F\,:\, t \mapsto F(t) = f(2\cos(t), \sin(t))$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

Solution. L'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(2\cos(t), \sin(t))$ est donnée par

$$F(t) = \arcsin(2\cos(t)\ \sin(t)) = \arcsin(\sin(2t)).$$

La fonction F est dérivable sur

$$\{t \in \mathbb{R} : \sin(2t) \in \,]-1,1[\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

et on y a

$$DF(t) = \frac{2\cos(2t)}{\sqrt{1-\sin^2(2t)}} = 2\frac{\cos(2t)}{|\cos(2t)|}\ .$$

2. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = x\ \operatorname{arctg}(x).$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Dès lors, les approximations demandées sont envisageables. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{1+x^2},$$

$$D^2f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Comme $f(0)=0$, $Df(0)=0$ et $D^2f(0)=2$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_0(x) = f(0) = 0 \quad , \quad P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 0 \quad \text{et} \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

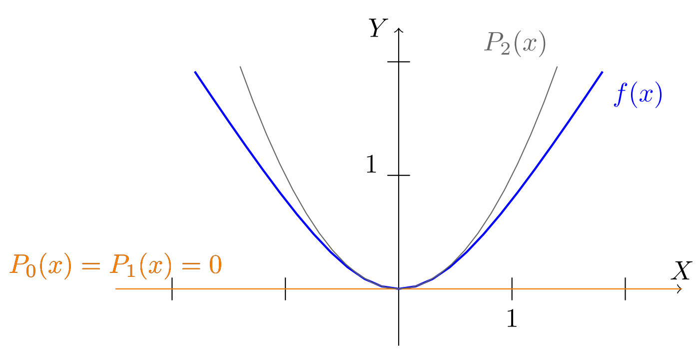
(b) Donner une expression explicite du reste de l'approximation à l'ordre 2.

Solution. Si on note R_2 le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre 2 en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u strictement compris entre 0 et x tel que

$$R_2(x) = D^3f(u)\frac{x^3}{3!} = \left.\frac{-8y}{(1+y^2)^3}\right|_{y=u}\frac{x^3}{3!} = \frac{-4u}{3\,(1+u^2)^3}x^3.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution. Comme $R_2(x) \leq 0\ \forall x \in\ ]-\infty, 0]$ et $R_2(x) \leq 0\ \forall x \in [0, +\infty[$, le graphique de f est situé en dessous de celui de P_2 à gauche et à droite de 0.
Voici la représentation graphique de P_0, P_1, P_2 et f au voisinage de 0.

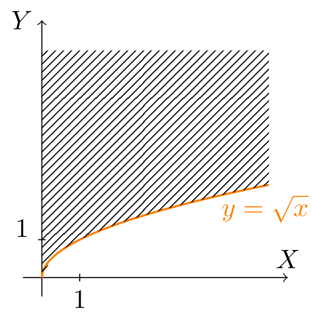


3. **On donne**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dy \right)\, dx.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A.



(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{ye^{-y^2}}{x+y^2}$ est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \neq -x\}$ donc sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, +\infty[\ ,\ y \in [\sqrt{x}, +\infty[\}$, ensemble non borné fermé.
Afin de montrer l'intégrabilité de f sur A, permutons l'ordre d'intégration et considérons

$$I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx \right)\, dy.$$

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que f est positif sur A.
Pour y fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \left| \dfrac{ye^{-y^2}}{x+y^2} \right| = \dfrac{ye^{-y^2}}{x+y^2}$ est continue sur le fermé borné $[0, y^2\ ]$. Elle y est donc intégrable et on a

$$\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx = ye^{-y^2} \left[\ln\left(x+y^2\right) \right]_0^{y^2} = \ln(2) ye^{-y^2}.$$

Considérons $h : y \mapsto \ln(2)ye^{-y^2}$, fonction continue sur l'intervalle fermé non borné $[0, +\infty[$. Comme la limite

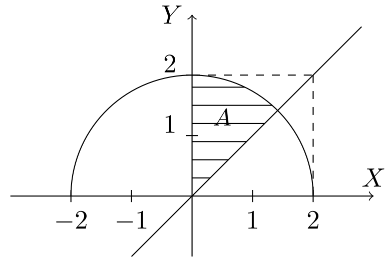
$$\lim_{y \to +\infty} y^2 h(y) = \ln(2) \lim_{y \to +\infty} y^3 e^{-y^2} = 0$$

existe et est finie puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste, le critère en θ ($\theta = 2 > 1$) stipule que h est intégrable en $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ et dès lors f est intégrable sur A.
Ainsi, puisque la fonction f est positive et intégrable sur A, on a

$$I = I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx \right)\, dy = \int_0^{+\infty} \ln(2) ye^{-y^2}\, dy = \ln(2) \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f \;:\; (x,y) \mapsto \cos\left(x^2+y^2\right)$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f \,:\, (x,y) \mapsto \cos\left(x^2+y^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc sur l'ensemble fermé borné A considéré. Elle est donc intégrable sur A.
Pour calculer cette intégrale, effectuons un changement de variables en coordonnées polaires : l'ensemble A est décrit par

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in\ [0,2]\ ,\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

et l'intégrale devient

$$I \;=\; \int_0^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(r^2)\ r\ d\theta\right)\ dr = \frac{\pi}{4}\int_0^2 \cos(r^2)\ r\ dr = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\sin(r^2)\right]_0^2 = \frac{\pi\sin(4)}{8}.$$

5. **Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle inversible ? Calculer $\left(A^{-1}\right)_{31}$ dans ce cas.

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. En appliquant la définition du déterminant, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= 4\ (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= 4(\alpha+1) \end{aligned}$$

Dès lors, la matrice A est inversible si et seulement si $\alpha \neq -1$.

Dans ce cas, l'élément $(A^{-1})_{31}$ peut être calculé et vaut

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{31} &= \frac{1}{4(\alpha+1)}\ (\tilde{\mathcal{A}})_{31} \\ &= \frac{1}{4(\alpha+1)}\ (\mathcal{A})_{13} \\ &= \frac{1}{4(\alpha+1)}\ (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-3}{4(\alpha+1)} \end{aligned}$$

(b) Montrer que A admet toujours une même valeur propre quel que soit α. Quelle est cette valeur propre ? Justifier.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
Par définition du déterminant, on a

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} &= (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)\left(\lambda^2-(\alpha+1)\lambda+\alpha+1\right). \end{aligned}$$

Comme le polynôme caractéristique s'annule en 4 quel que soit α, on conclut que la matrice A admet la valeur propre 4 quel que soit la valeur de α.

(c) Pour $\alpha = \frac{13}{3}$, déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Justifier.

Solution. Dans le cas où $\alpha = \frac{13}{3}$, le polynôme carcatéristique de A devient

$$(4-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda + \frac{16}{3}\right) = (4-\lambda)\frac{1}{3}\left(3\lambda^2 - 16\lambda + 16\right)$$

et, comme $\Delta = 16^2 - 4.3.16 = 4.16 = 8^2$, le polynôme $3\lambda^2 - 16\lambda + 16$ s'annule en 4 et en $\frac{4}{3}$.
Par conséquent, les valeurs propres de A sont dans ce cas 4 (double) et $\frac{4}{3}$ (simple).

Recherchons tout d'abord les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 4 : ceux-ci sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$(A-4I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x+-y+\frac{1}{3}z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=3y \end{cases}.$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 4 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0.$$

Recherchons à présent les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple $\frac{4}{3}$: ceux-ci sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$\left(A - \frac{4}{3}I\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{3}x = 0 \\ x + -\frac{1}{3}y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3z \end{array} \right. .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 4 sont les vecteurs

$$X = c' \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ c' \in \mathbb{C}_0.$$

(d) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{13}{3}, 3\}$, alors A est diagonalisable. Justifier.

Solution. Le polynôme caractéristique de A s'annule en 4 et en les zéros du polynôme $Q(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha+1)\lambda + \alpha + 1$ dont le delta vaut

$$\Delta = (\alpha+1)^2 - 4(\alpha+1) = (\alpha+1)(\alpha-3).$$

Comme $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq 3$, ce dernier est non nul et le polynôme Q possède donc nécessairement deux zéros distincts.
Ainsi, s'ils sont tous les deux différents de 4, la matrice A possède trois valeurs propres différentes et est par conséquent diagonalisable.
Comme 4 est une valeur propre de multiplicité supérieure à 1 si, et seulement si, le polynôme Q s'annule en 4 et que

$$Q(4) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4(\alpha+1) + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{13}{3} \ .$$

on conclut que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{13}{3}, 3\}$, la matrice A ne possède que des valeurs propres simples (elles sont toutes différentes) et est donc diagonalisable.

6. (PAS pour les biologistes)
(a) La série suivante est-elle convergente ? Justifier.

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \ \frac{m\sin(mx)}{m^3+2}$$

Solution. On a

$$\left| (-1)^m \ \frac{m\sin(mx)}{m^3+2} \right| = \frac{m|\sin(mx)|}{m^3+2} \leq \frac{m}{m^3+2} \leq \frac{m}{m^3} = \frac{1}{m^2}$$

quel que soit le naturel $m \geq 1$.
Comme la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{m^2}$ converge, vu le critère de comparaison, on en déduit que la série donnée converge également.

(b) La série suivante est-elle convergente ? Si oui, en déterminer la somme.

$$\sum_{j=4}^{+\infty} \frac{[\ln(\pi)]^{j-2}}{(j-3)!}$$

Solution. La série

$$\sum_{j=4}^{+\infty} \frac{[\ln(\pi)]^{j-2}}{(j-3)!} = \ln(\pi) \ \sum_{j=4}^{+\infty} \frac{[\ln(\pi)]^{j-3}}{(j-3)!} = \ln(\pi) \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[\ln(\pi)]^{k}}{k!}$$

est une série de type exponentielle. Cette série est donc convergente et sa somme vaut

$$\ln(\pi) \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[\ln(\pi)]^{k}}{k!} = \ln(\pi) \ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[\ln(\pi)]^{k}}{k!} - 1 \right) = \ln(\pi) \ \left(\exp\left(\ln(\pi)\right) - 1\right) = (\pi - 1) \ \ln(\pi).$$

7. (PAS pour les biologistes)
Des hamsters sont placés dans 3 compartiments A, B, C qui communiquent tous l'un avec l'autre. On observe que, de minute en minute, les hamsters migrent selon le schéma suivant :
- un hamster du compartiment A a 60 % de chance d'y rester, 30 % de chance de passer dans le B et 10 % de chance de passer dans le C ;
- un hamster du compartiment B a 50 % de chance d'y rester, 20 % de chance de passer dans le A et 30 % de chance de passer dans le C ;
- un hamster du compartiment C a 40 % de chance d'y rester, 30 % de chance de passer dans le A et 30 % de chance de passer dans le B.
(a) Déterminer la matrice de transition.

Solution. Soient A_0, B_0 et C_0 respectivement les probabilités qu'un hamster se trouve dans les compartiment A, B et C initialement et A_1, B_1 et C_1 respectivement la minute suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60/100 & 20/100 & 30/100 \\ 30/100 & 50/100 & 30/100 \\ 10/100 & 30/100 & 40/100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 60/100 & 20/100 & 30/100 \\ 30/100 & 50/100 & 30/100 \\ 10/100 & 30/100 & 40/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/10 & 2/10 & 3/10 \\ 3/10 & 5/10 & 3/10 \\ 1/10 & 3/10 & 4/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'un hamster, initialement placé dans le compartiment A, soit dans le compartiment C après 2 minutes.

Puisque la matrice de transition est régulière, les probabilités qu'un hamster, initialement placé dans le compartiment A, soit dans les compartiments A, B et C après 2 minutes sont données par

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = T^2 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 45 & 31 & 36 \\ 36 & 40 & 36 \\ 19 & 29 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 45 \\ 36 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la probabilité qu'un hamster, initialement placé dans le compartiment A, soit dans le compartiment C après 2 minutes est 19%.

8. (UNIQUEMENT pour les physiciens)
(a) Dans un repère orthonormé du plan, on donne le cercle d'équation cartésienne

$$(x-1)^2 + y^2 = 4.$$

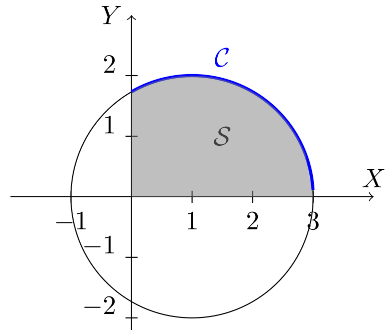
On note $\mathcal{C}$ la partie de ce cercle située dans le premier quadrant et $\mathcal{S}$ la surface délimitée par $\mathcal{C}$ et les axes de coordonnées.
1) Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la surface $\mathcal{S}$ dans un repère orthonormé.
2) Calculer les intégrales suivantes

$$(1) \int_{\mathcal{C}} y\ ds \qquad (2) \int_{\mathcal{C}} y\ dy \qquad (3) \iint_{\mathcal{S}} d\sigma$$

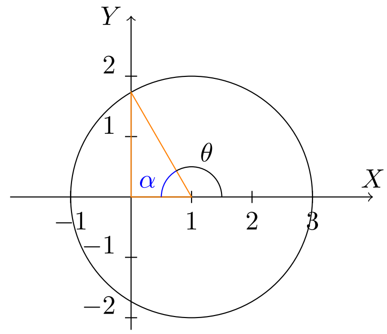
3) Pour chacune des intégrales (1) et (2), obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de $\mathcal{C}$?
4) Quel renseignement sur $\mathcal{S}$ donne l'intégrale (3) ?

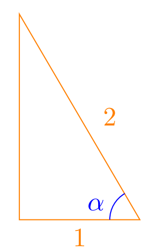
Solution.

1) L'équation cartésienne donnée est celle du cercle centré en $(1, 0)$ et de rayon 2. Ainsi, une représentation de la courbe $\mathcal{C}$ et de la surface $\mathcal{S}$ dans un repère orthonormé est



2) Pour trouver un paramétrage de $\mathcal{C}$, intéressons-nous à l'angle θ (cf. figure ci-dessous) et à son supplémentaire α.





Dans le triangle rectangle orange, on a

$$1 = 2\cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

puisque α est aigu, de sorte que $\theta = \pi - \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.
Un paramétrage (injectif) de la courbe $\mathcal{C}$ est alors donné par

$$\vec{\gamma} \,:\, t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \mapsto (2\cos(t) + 1,\ 2\sin(t)).$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t) = (-2\sin(t),\ 2\cos(t)) \neq \vec{0} \quad \forall t \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{4} = 2.$$

Comme l'intégrant $f : (x, y) \mapsto y$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$ (qui est bornée fermée), les deux intégrale sur la courbe ont un sens et on a

$$\begin{aligned}
(1) \quad \int_{\mathcal{C}} y\, ds &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(\vec{\gamma}(t))\ \|D\vec{\gamma}(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 2\sin(t)\, 2\, dt = 4\left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 6
\end{aligned}$$

et

$$(2)\ \int_{\mathcal{C}} y\, dy = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f\left(\vec{\gamma}(t)\right)\ D\vec{\gamma}_2(t)\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 2\sin(t)\, 2\cos(t)\, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 2\sin(2t)\, dt = \left[-\cos(2t)\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}.$$

De plus, comme l'intégrant $f\ :\ (x,y,z)\mapsto 1$ est continu sur la surface $\mathcal{S}$ (bornée fermée), l'intégrale (3) a un sens. Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{S}$ est donné par

$$\vec{\phi}\ :\ (t,u)\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\times[0,1]\mapsto\left(2\cos(t)+1,\ 2u\sin(t),\ 0\right).$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D_t\vec{\phi}(t,u) = (-2\sin(t),\ 2u\cos(t),\ 0)\qquad \text{et}\qquad D_u\vec{\phi}(t,u) = (0,\ 2\sin(t),\ 0)$$

de sorte que

$$D_t\vec{\phi}(t,u)\wedge D_u\vec{\phi}(t,u) = \left(0,\ 0, -4\sin^2(t)\right)\neq\vec{0}\quad \forall(t,u)\in\left]0,\frac{2\pi}{3}\right[\times]0,1[$$

ce qui montre qu'il est régulier, et on a alors

$$(3)\ \iint_{\mathcal{S}} d\sigma = \int_0^1\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \|D_t\vec{\phi}(t,u)\wedge D_u\vec{\phi}(t,u)\|\ dtdu = 4\int_0^1\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2(t)\ dtdu$$
$$= 2\int_0^1\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1-\cos(2t))\ dtdu = 2\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) L'intégrale (1) est indépendante de l'orientation choisie, alors que l'intégrale (2) en dépend : elle aurait la valeur opposée à celle trouvée ci-dessus si on considérait l'autre orientation.

4) L'intégrale (3) représente l'aire de la surface $\mathcal{S}$.

(b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$\cos(x)Df(x)-\sin(x)f(x)+\sin(x)=0$$

satisfaisant la condition $f(0)=1$. Préciser le plus grand intervalle sur lequel elle est valable.

Solution. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à second membre linéaire : elle se réécrit

$$Df(x) = a(x)\ f(x)+b(x)$$

où $a : x\mapsto \mathrm{tg}(x)$ et $b : x\mapsto -\mathrm{tg}(x)$ sont des fonctions continues sur $A=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\ \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. Dès lors, l'équation admet (au moins) une solution sur A et, comme nous disposons d'une condition initiale en $0\in\ \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ = I$, nous pouvons en déterminer la solution unique sur l'intervalle I vérifiant cette condition.
Nous avons

$$A(x)=\int a(x)\,dx = \int \mathrm{tg}(x)\,dx \simeq -\ln|\cos(x)| = -\ln(\cos(x)),\qquad x\in I$$

et

$$P(x)=\int b(x)e^{-A(x)}\,dx = \int -\mathrm{tg}(x)\cos(x)\,dx = \int -\sin(x)\,dx\simeq\cos(x),\qquad x\in I.$$

Les solutions sur I sont donc les fonctions de la forme

$$f(x) = (C + P(x))\, e^{A(x)} = (C + \cos(x))\, \frac{1}{\cos(x)}, \qquad x \in I,$$

où C est une constante arbitraire. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $C = 0$ et que, par conséquent, la solution cherchée est

$$f(x) = \cos(x)\ \frac{1}{\cos(x)} = 1, \qquad x \in I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Notons que la fonction constante 1 est en fait valable partout sur $\mathbb{R}$.

<u>Résolution alternative</u>

L'équation donnée est exacte : en effet,

$$\begin{aligned} \cos(x)Df(x) - \sin(x)f(x) + \sin(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad D\left(\cos(x)f(x)\right) + D\left(-\cos(x)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad D\left(\cos(x)f(x) - \cos(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

et il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\cos(x)f(x) - \cos(x) = C.$$

Tenant compte de la condition initiale $f(0) = 1$, on tire alors que $C = 0$, auquel cas la solution de l'équation satisfait

$$\cos(x)f(x) - \cos(x) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad f(x) = 1$$

et est valable sur $\mathbb{R}$.