Mathématique
Interrogation du lundi 6 novembre 2017

QUESTIONNAIRE

Théorie

1. Partie calcul vectoriel
   Définir le produit scalaire de deux vecteurs (de façon géométrique). Dans le plan, démontrer la formule donnant l'expression analytique de celui-ci.

2. Partie fonction d'une variable réelle
   Définir une fonction injective ainsi que l'inverse d'une telle fonction.

Exercices

1. Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation suivante
$$\frac{1}{2-|-x|} \leq |x|.$$

2. Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $]-2\pi, 0]$, résoudre l'équation
$$\sin(3x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

3. Si elles existent, simplifier les expressions suivantes au maximum.
   (1) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
   (2) $\sin(\ln(e^{-\pi/6})) + \text{tg}\left(\arcos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

4. Déterminer le module et la partie imaginaire du complexe $z = \dfrac{(1-i)^2}{2+i}$.

5. On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes ?

   (1) $x^2 = 4(1-y^2)$

   (2) $-16x^2 + y^2 = 4$

6. ***Problème élémentaire : rédiger votre réponse.***

   Un train parcourt 120 km par heure. Après 2 heures de route, il est obligé de s'arrêter et d'attendre 1 heure. Ensuite il continue sa route à une vitesse de 90 km par heure et arrive 2 heures 20 minutes en retard par rapport au temps prévu initialement sans arrêt ni ralentissement. Quel temps le train aurait-il mis s'il avait parcouru toute la distance à la vitesse de 120 km par heure sans s'arrêter ?

CORRIGE

Théorie

1. <u>**Partie calcul vectoriel**</u>
   Définir le produit scalaire de deux vecteurs (de façon géométrique). Dans le plan, démontrer la formule donnant l'expression analytique de celui-ci.

   Solution. Voir cours

2. <u>**Partie fonction d'une variable réelle**</u>
   Définir une fonction injective ainsi que l'inverse d'une telle fonction.

   Solution. Voir cours

Exercices

1. **Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation suivante**

$$\frac{1}{2-|-x|} \leq |x|.$$

   Solution. Comme $|-x| = |x|$, l'inéquation est définie pour $2-|x| \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Cela étant, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-|-x|} \leq |x| \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-|x|(2-|x|)}{2-|x|} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-2|x|+|x|^2}{2-|x|} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(1-|x|)^2}{2-|x|} \leq 0.
\end{aligned}$$

   Puisque $(1-|x|)^2 \geq 0$, l'inégalité est vérifiée pour

$$2-|x| < 0 \text{ ou } 1-|x| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x < -2 \text{ ou } x > 2) \text{ ou } (x = -1 \text{ ou } x = 1).$$

   Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $S =]-\infty, -2[\cup \{-1, 1\} \cup]2, +\infty[$.

2. **Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $]-2\pi, 0]$, résoudre l'équation**

$$\sin(3x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

   Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Comme $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ et vu les propriétés des angles associés, elle est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\sin(3x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(2x) \\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{2} - 3x = 2x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - 3x = -2x + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : -5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}.
\end{aligned}$$

L' équation donnée a donc pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $]-2\pi, 0]$ sont

$$-\frac{3\pi}{10}, \ -\frac{7\pi}{10}, \ -\frac{11\pi}{10}, \ -\frac{3\pi}{2}, \ -\frac{19\pi}{10}.$$

3. **Les expressions suivantes existent-elles ? Si oui, les simplifier au maximum.**

(1) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

(2) $\sin(\ln(e^{-\pi/6})) + \mathrm{tg}\left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

Solution. (1) La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$, mais $\frac{5\pi}{6} \notin [-1, 1]$. L'expression n'est donc pas définie.

(2) D'une part, la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $]0, +\infty[$, domaine de définition de la fonction ln. La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$. Le premier terme de l'expression donnée est donc défini.
D'autre part, la fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$ et $-\sqrt{2}/2 \in [-1, 1]$; son ensemble image est $[0, \pi]$, et $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$. Comme la fonction tg est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, le deuxième terme de l'expression donnée est donc défini.
Puisque les fonctions exp et ln sont inverses, on a $\ln(e^{-\pi/6}) = -\pi/6$, et l'expression donnée s'écrit

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

4. **Déterminer le module et la partie imaginaire du complexe** $z = \dfrac{(1-i)^2}{2+i}$.

Solution. Comme $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$, le nombre complexe z s'écrit aussi

$$z = \frac{-2i}{2+i} = \frac{-2i(2-i)}{5} = \frac{-2-4i}{5}.$$

Ainsi, le module du nombre complexe vaut

$$|z| = \frac{|-2i|}{|2+i|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

et sa partie imaginaire vaut

$$\Im z = \frac{-4}{5}.$$

5. **On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes ?**

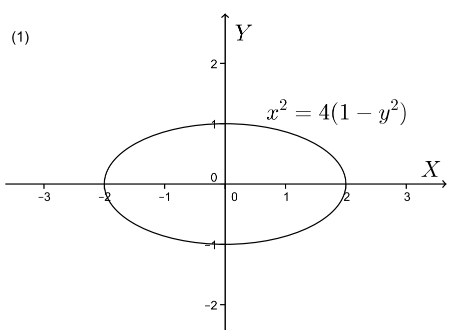
(1) $x^2 = 4(1 - y^2)$

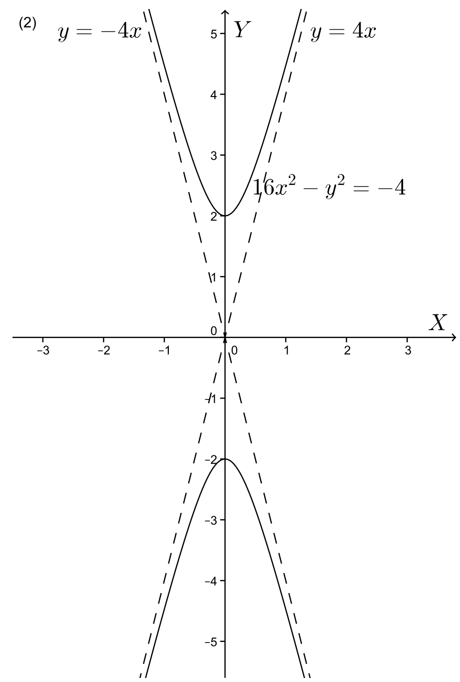
(2) $16x^2 - y^2 = -4$

Solution. Puisque $x^2 = 4(1 - y^2) \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4$, l'équation (1) est celle d'une ellipse dont les points d'intersection avec les axes ont pour coordonnées $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -1)$ et $(0, 1)$. Dès lors, les foyers ont pour coordonnées $(-\sqrt{3}, 0)$ et $(\sqrt{3}, 0)$ et l'excentricité vaut $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Puisque $16x^2 - y^2 = -4$, l'équation (2) est celle d'une hyperbole qui intersecte l'axe des ordonnées aux points de coorcdonnées $(0, -2)$ et $(0, 2)$. Ses asymptotes sont les droites d'équation $y = -4x$ et $y = 4x$.
Dès lors, les foyers ont pour coordonnées $\left(0, -\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)$ et $\left(0, \dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)$ et l'excentricité vaut $e = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$.

Voici la représentation graphique de ces coniques :





6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un train parcourt 120 km par heure. Après 2 heures de route, il est obligé de s'arrêter et d'attendre 1 heure. Ensuite il continue sa route à une vitesse de 90 km par heure et arrive 2 heures 20 minutes en retard par rapport au temps prévu initialement sans arrêt ni ralentissement. Quel temps le train aurait-il mis s'il avait parcouru toute la distance à la vitesse de 120 km par heure sans s'arrêter ?

Solution. Ce problème est analogue au problème I.3 de la liste 1 du fascicule d'exercices pour les répétitions.
Soit t (en heures) le temps que le train aurait mis s'il avait parcouru toute la distance à la vitesse de 120 km/h sans s'arrêter.
Si le train garde sa vitesse de 120 km/h, la distance parcourue s'écrit $120t$.

Le temps qu'il a réellement mis pour parcourir cette distance est $(t + 2 + \frac{1}{3})$(heures) puisqu'il arrive 2 heures 20 minutes (ou $(2 + \frac{1}{3})$h) en retard par rapport au temps t prévu initialement. Cette période se décompose en
• 2 heures durant lesquelles il roule à 120 km/h,
• 1 heure d'arrêt,
• et donc $(t - \frac{2}{3})$ heures durant lesquelles il roule à 90 km/h.
Donc la distance parcourue s'écrit aussi $120.2 + 0 + 90(t - \frac{2}{3})$ ou encore $180 + 90t$.

En comparant les deux expressions de la distance, on obtient l'équation

$$120t = 180 + 90t \Leftrightarrow 30t = 180 \Leftrightarrow t = 6.$$

Ainsi, s'il avait parcouru toute la distance à la vitesse de 120 km/h sans s'arrêter, le train aurait mis 6 heures.