Université de Liège

Faculté des Sciences

MATHEMATIQUE, F. Bastin

EXERCICES DE BASE

Première année de bachelier en
Biologie, Chimie, Géographie, Géologie, Physique
Informatique (Q1)

Année académique 2017-2018

Jacqueline CRASBORN

Introduction

Généralités

Ce fascicule fournit aux étudiants les listes d'exercices à résoudre lors des répétitions du premier quadrimestre de l'année académique 2017-2018. Il présente aussi une liste de problèmes élémentaires avec leur solution ainsi que la résolution complète d'exercices de base (listes 2002/2003) et les solutions des exercices des listes 2003/2004 et 2004/2005 couvrant la matière du cours de MATHEMATIQUE s'adressant aux futurs bacheliers de premier bloc en biologie, chimie, géographie, géologie, physique et informatique.

Ce fascicule a été rédigé pour répondre à divers objectifs. Il veut fournir aux étudiants une référence correcte sur laquelle s'appuyer pour tenter de résoudre les exercices proposés au cours des répétitions.

La rédaction de ce fascicule a également pour but d'insister sur le vocabulaire spécifique, les symboles mathématiques à utiliser, la rigueur exigée dans la rédaction, les liens indispensables qui doivent figurer entre les différentes étapes d'un développement mathématique. Trop souvent, en corrigeant des interrogations par exemple, on peut lire une succession de notations, d'équations, de calculs écrits les uns à côté des autres sans la moindre indication relative à la logique du raisonnement. C'est cet écueil aussi qu'on voudrait éviter aux étudiants grâce à ce fascicule.

Une dernière intention, et non la moindre, est d'amener, au plus vite, les étudiants à prendre en charge leur formation de la façon la plus active et la plus autonome possible.

Pour terminer, je m'en voudrais de ne pas exprimer mes plus vifs remerciements à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle a réservé à cette initiative, les conseils qu'elle m'a donnés, sa relecture attentive et la confiance qu'elle me témoigne dans mon travail avec les étudiants. Je remercie également tous les assistants avec lesquels je travaille, tout spécialement Christine Amory et Christophe Dozot, pour leurs suggestions constructives et leur participation à l'élaboration de ce fascicule.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2017 - 2018

Informations relatives aux répétitions

Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   — structurée (contexte, justifications, conclusion ...),
   — précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée ...) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? ...) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation ...) ;

4) **l'autonomie**
   — dans la recherche de pistes ou d'idées par l'utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours, fascicules intitulés "'Bases" et "Exercices de base" ...) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d'aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,
   — dans l'organisation et la planification de son travail ;

5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

Consignes pour préparer une répétition

1. Répondre soigneusement aux questions de théorie de la première partie de chaque liste.
2. Il est vivement conseillé
   — de prendre connaissance des exercices à résoudre lors de la répétition future afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   — de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l'assistant lors de la répétition

Déroulement des répétitions

1. Dans le cas de notions habituellement non vues dans l'enseignement secondaire ou qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l'assistant résout 1 ou 2 exercices "modèle" pour leur permettre de se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières ; il fait participer les étudiants à leur résolution. Ensuite, l'assistant fera une synthèse du processus de résolution en mentionnant les éléments de théorie utilisés.
2. Enfin, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S'il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l'assistant qui l'aidera dans sa recherche.

Tous les exercices de la liste doivent être résolus au plus tard pour la répétition suivante ; la plupart des étudiants seront obligés d'achever à domicile. Dans ce cas, s'ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors d'une séance de remédiation ou envoyer un courriel à l'un des assistants.

Les solutions des exercices proposés pour les répétitions se trouvent en fin de ce fascicule. Les solutions des tests seront mises sur le web en fin de semaine.
Les étudiants qui désirent s'entraîner à la résolution de problèmes élémentaires trouveront une liste de problèmes de ce type, ainsi que leur solution, au premier chapitre.

Table des matières des répétitions : 1^{er} quadrimestre 2017-2018

11. Primitivation (1).
12. Primitivation (2).
13. Calcul intégral sur un ensemble borné fermé.
14. Calcul intégral sur un ensemble non borné fermé.
15. Calcul intégral.
16. Equations différentielles (1$^{\text{ère}}$ partie).
17. Equations différentielles (2$^{\text{ème}}$ partie).
18. Equations différentielles (3$^{\text{ème}}$ partie).

Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l'avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l'adresse suit

http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.

L'équipe des assistants
Année académique 2017 - 2018

AVERTISSEMENT

Les listes d'exercices résolus présentées dans ce fascicule sont celles des années académiques 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005. Elles ont été modifiées en fonction de la nouvelle version du cours de Mathématique de F. Bastin. Les listes des années suivantes se trouvent sur la page web relative au cours.

Dans la nouvelle version de ce cours, les matières sont présentées en deux parties : Mathématique et Mathématique (partim B)

Les exercices des répétitions du premier quadrimestre de 2017-2018 se trouvent au chapitre 2. Ceux des années 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005 se trouvent dans les chapitres 3 à 7 inclus. Les solutions des exercices des répétitions se trouvent au chapitre 8.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2017 - 2018

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2017-2018

Problèmes élémentaires pour s'entraîner

Version 22 août 2017

Chapitre 1

Problèmes élémentaires

Enoncés des problèmes élémentaires des années précédentes

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
5. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
8. Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$
   Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.
9. Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
   où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.
b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.
c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.
d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.

10. On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O, le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y. Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.
a) Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.
b) Si la norme de la vitesse initiale vaut 20 m/s et si l'angle de tir vaut 60°, quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile [1] ? Pourquoi ?
c) Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue [2] par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?
d) Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.
e) Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?

11. Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30 %. Mais ensuite, ce sera la periode des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30 %. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour débourser le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?

12. a) Dans une question de physique relative au mouvement des corps, on lit que *Le corps A se déplace le long d'une courbe décrite par*

$$\{(2\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Dans un repère orthonormé, représenter cette courbe et donner une interprétation graphique de θ.
b) On se place dans un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble des points dont la tangente de l'angle polaire est toujours égale à 1 et donner une équation cartésienne de cet ensemble.

13. Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à 10 mètres ?

14. En combien de temps dix ouvriers construiront-ils un certain mur que quinze ouvriers ont pu élever en douze jours ?

15. Une équipe de 18 ouvriers travaillant à raison de 8 heures par jour ont pavé en 10 jours une rue de cent cinquante mètres. Combien faut-il d'ouvriers travaillant 6 heures par jour pour paver en 15 jours une rue longue de 75 m, rue de même largeur que la précédente ?

16. Françoise a trois fois l'âge que Nicolas avait quand elle avait l'âge actuel de Nicolas. Quand Nicolas aura l'âge de Françoise, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges actuels de Nicolas et de Françoise ?

17. Si on compte les arbres d'un jardin par groupes de 8, il en reste 5 et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce jardin ?

---

1. (On suppose $g = 10\ m/s^2$.)
2. la portée

18. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 1.28 mètres cube de glace ?

19. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

20. Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100m en parcourant la distance en 9.58 secondes. A quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?

21. A submarine dives at an angle of 30° with the horizontal and follows a straigtht-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the water ?

22. En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le *système ISO A*. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle en 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre.

    Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100g. Le papier employé est de la catégorie commerciale " $80g/m^2$" ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de 1m^2 et que l'enveloppe utilisée pèse 20g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?

23. Le nombre d'or est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre d'or ?

    Se poser des questions : ... le nombre d'or est célèbre depuis fort longtemps ; il n'est pas appelé ainsi sans raison. Il apparaît dans la nature ... Où par exemple ? Et comment le construire géométriquement ? ...

24. Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur deux litres, contienne 1/2 litre d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ?

25. Une rivière coule au pied d'une falaise du haut de laquelle on laisse tomber une pierre. On entend l'impact 6 secondes après l'avoir lâchée. La distance d en m parcourue par la pierre jusqu'à la rivière en t secondes est donnée par $d = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 10$ m/s^2 et la vitesse du son est de 330 m/s. En mètres, que vaut approximativement la hauteur de la falaise ?

26. Si a et b sont deux nombres réels, comment s'exprime la tangente de leur différence en fonction de la tangente de chacun d'eux ? Utiliser votre réponse pour déterminer la valeur exacte de la tangente de $\frac{\pi}{12}$.

27. Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve 60°. Il recule de 100 m et son évaluation donne alors 45°. Quelle est approximativement la hauteur du monument ? (Note : le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.)

28. Sur un plan à l'échelle 1/200, les dimensions d'un jardin rectangulaire sont 4,5 cm et 3 cm. Quelle aire en ares manque-t-il dans la réalité pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are ?

29. Une population de bactéries est attaquée par un agent extérieur faisant en sorte qu'à chaque instant, le taux de changement de la population soit proportionnel à celle-ci. Si on suppose que la constante de proportionnalité est égale à -0.028,
    - écrire une équation reliant la population et le taux de changement de celle-ci à chaque instant
    - que vaut le taux de changement après une minute si la population à ce moment est de 3 millions d'individus ?

30. Rédiger une démonstration de la propriété suivante, suggérée au cours : *Soit un naturel strictement positif m. La fonction polynomiale $x \mapsto x^m$ est dérivable en tout réel x et sa dérivée a la forme explicite mx^{m-1}, $x \in \mathbb{R}$.*

    Suggestion, donnée au cours : utiliser le binôme de Newton

Solution des problèmes élémentaires

1. **Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?**

   Solution. On travaille dans un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit a pour longueur 4.5 km = 4 500 m et dont l'angle opposé à ce côté mesure 45 degrés. Dès lors, l'hypoténuse mesure $\frac{4\ 500}{\sin(45°)} = 4\ 500\ \sqrt{2}$ m.

   Ainsi, le temps mis pour atteindre cette altitude vaut $\dfrac{4\ 500\ \sqrt{2}}{75} = 60\ \sqrt{2}$ secondes, donc approximativement 85 sec.

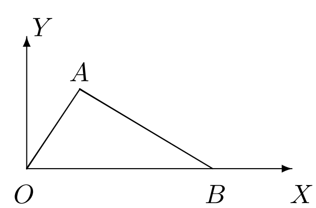
2. **Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2 000 l de lait si la densité du lait est 1,032 ?**

   Solution. Vu la densité du lait, on sait que 2 000 litres de lait pèsent $2000\ .\ 1,032 = 2064$ kg. Le poids de crème obtenu est alors de $2064\ .\ \frac{3}{20}$ kg et le poids de beurre de $2064\ .\ \frac{3}{20} \cdot \frac{25}{100} = 2064\ .\ \frac{3}{80} = \frac{258\ .\ 3}{10} = 77,4$ kg.

   Ainsi, à partir de 2 000 l de lait on obtient 77,4 kg de beurre.

3. **Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?**

   Solution.

   Si θ est la mesure de l'angle $\widehat{BOA}$, les coordonnées polaires de A sont $(1, \theta)$; les coordonnées cartésiennes de ce point sont alors $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

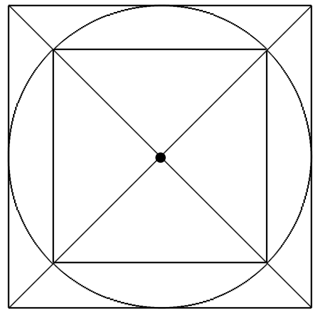
   Dans le triangle OAB rectangle en A, on a $\mathrm{tg}(\theta) = \frac{|AB|}{|0A|} = 2$. Comme $\mathrm{tg}^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$, on a $\cos^2(\theta) = \frac{1}{5}$ et $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = \frac{4}{5}$.

   Dès lors, comme on travaille dans le premier quadrant, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des réels positifs et les coordonnées cartésiennes de A sont $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

4. **Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.**

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

Solution.



Si c est la longueur d'un côté du carré inscrit (jardin) alors l'aire du jardin vaut c^2.
Un diamètre du cercle a même longueur qu'une diagonale du carré inscrit mais aussi qu'un côté du carré circonscrit.
Par application du théorème de Phythagore dans un des triangles rectangles formés par une diagonale et deux côtés consécutifs du carré inscrit, on a $D^2 = 2c^2$ si D est la longueur d'un diamètre du cercle.
Dès lors, l'aire du carré circonscrit vaut $D^2 = 2c^2$ et l'aire de la promenade, différence entre l'aire du carré circonscrit et celle du carré inscrit vaut $2c^2 - c^2 = c^2$.
Ainsi, l'aire du jardin est égale à l'aire de la promenade.

5. **Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?**

Solution. Vu l'échelle, 1 cm sur la carte correspond à 2 500 cm = 0,025 km dans la réalité. Dès lors, 4 cm correspondent à $4 \times 0,025 =$ 0,1 km.
La distance réelle entre deux points distants de 4 cm sur une carte à l'échelle $\frac{1}{2\ 500}$ est donc de 0,1 km.

6. **A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?**

Solution. Comme 1 mm = 10^{-3} m, le volume d'eau sur la terrasse est égal à $10^{-3} \times 1 = 10^{-3}$ m^3= 1 dm^3 = 1 litre.
Ainsi, 1 mm d'eau par m^2 correspond à 1 l par m^2.

7. **Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?**

Solution. Soit x le nombre de ml de la solution contenant 10% de glucose. Le nombre de ml de la solution contenant 1% de glucose est donc $(18 - x)$. Cela étant, on a

$$\frac{10}{100} \cdot x + \frac{1}{100} \cdot (18 - x) = \frac{3}{100} \cdot 18$$

ce qui est équivalent à $10x + 18 - x = 54 \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow x = 4$.

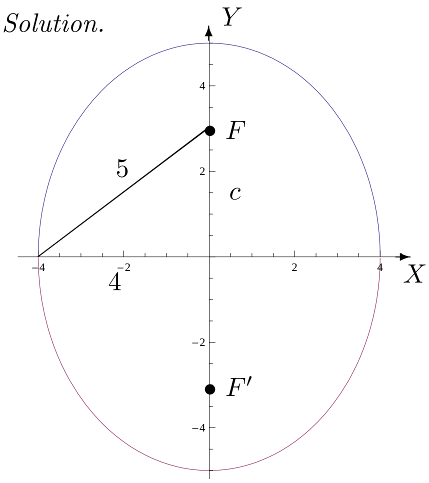
Ainsi, le laborantin doit prendre 4 ml de la solution contenant 10% de glucose et 14 ml de la solution à 1% pour obtenir 18 ml de solution à 3%.

8. **Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne**

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.

Solution.



Si les foyers ont pour coordonnées cartésiennes $(0, c)$ et $(0, -c)$ alors on a

$$c^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow c = 3$$

car c positif.

9. **Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.

Solution. Soit P un point de l'ellipse de coordonnées cartésiennes (x, y). L'ordonnée de ce point est telle que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Le carré de la distance de P à F vaut

$$\text{dist}^2(P, F) = (x - c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (x - c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

puisque $b^2 = a^2 - c^2$ ou encore

$$\text{dist}^2(P, F) = \frac{a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2c^2 + c^2x^2}{a^2} = \left(\frac{cx - a^2}{a}\right)^2$$

b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.

Solution. La distance entre P et F est donc donnée par $\dfrac{|cx - a^2|}{a}$ et comme $x \in [-a, a]$ et $c < a$, la valeur maximale est obtenue pour $x = -a$ et la valeur minimale pour $x = a$.
Ainsi, la valeur maximale est $a + c$ et la valeur minimale $a - c$.

c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.

Solution. En résolvant le système $\left\{\begin{array}{l} r_a = a + c \\ r_p = a - c \end{array}\right.$, on a $\left\{\begin{array}{l} a = \frac{r_a + r_p}{2} \\ c = \frac{r_a - r_p}{2} \end{array}\right.$.

Dès lors, l'excentricité vaut

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}.$$

d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.

Solution. Comme $r_a = 152\ 097\ 701$ km et $r_p = 147\ 098\ 074$ km, on a $e = 0,01671022$.

10. **On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O, le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y. Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par**

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \end{array}\right.$$

où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.
a) **Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.**

Solution. En éliminant t entre les deux équations, si $v_1 \neq 0$, on obtient

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2 \ (1)$$

qui est bien l'équation d'une parabole.

b) **Si la norme de la vitesse initiale vaut $20\ m/s$ et si l'angle de tir vaut 60°, quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile[3] ? Pourquoi ?**

Solution. Les composantes de la vitesse initiale sont $(v_1, v_2) = (20\cos(60°), 20\sin(60°)) = (10, 10\sqrt{3})$. Si $g = 10\ m/s^2$, on a $y(t) = 10\sqrt{3}t - 5t^2$, fonction du second degré ayant un maximum pour $t = \sqrt{3}$. La hauteur maximale atteinte par le projectile vaut alors $y(\sqrt{3}) = 30 - 15 = 15\ m$.

c) **Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue[4] par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?**

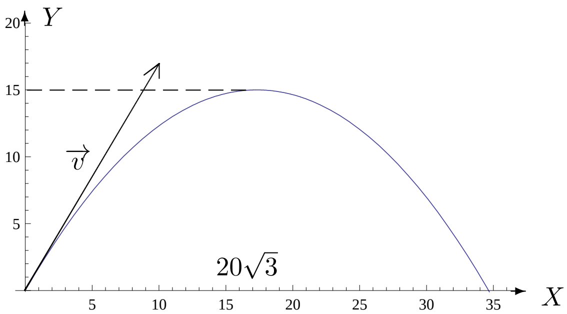
Solution. Les zéros de la fonction $t \mapsto y(t) = 10\sqrt{3}t - 5t^2$ sont 0 et $2\sqrt{3}$. Ainsi, lorsque le projectile retombe sur le sol, la distance horizontale parcourue vaut

$$x(2\sqrt{3}) = 10\ .\ 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\ m.$$

d) **Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.**

Solution. En remplaçant v_1, v_2 et g par leur valeur dans (1), on a $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{20}x^2$, équation d'une parabole dont voici la représentation graphique dans un repère orthonormé.

3. (On suppose $g = 10\ m/s^2$.)
4. la portée



e) **Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?**

Solution. Les zéros de $y(t) = v_2 t - \frac{g}{2}t^2$ sont 0 et $\frac{2v_2}{g}$. Ainsi, lorsque le projectile retombe sur le sol, la distance horizontale parcourue vaut

$$x\left(\frac{2v_2}{g}\right) = \frac{2v_1v_2}{g} = \frac{2v^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{g} = \frac{v^2\sin(2\theta)}{g}$$

si θ est l'angle de tir et v la norme de la vitesse . Cette distance est maximale si et seulement si $\sin(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = 45°$ puisque $\theta \in [0°, 90°]$.

11. **Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30 %. Mais ensuite, ce sera la periode des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30 %. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour débourser le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?**

Solution. Soit P le prix actuel de la pièce convoitée. Après l'augmentation, son prix sera de $P + \frac{30}{100}P$ et lors des soldes, il sera de $P + \frac{30}{100}P - \frac{30}{100}(P + \frac{30}{100}P) = P - \frac{9}{100}P = \frac{91}{100}P$.

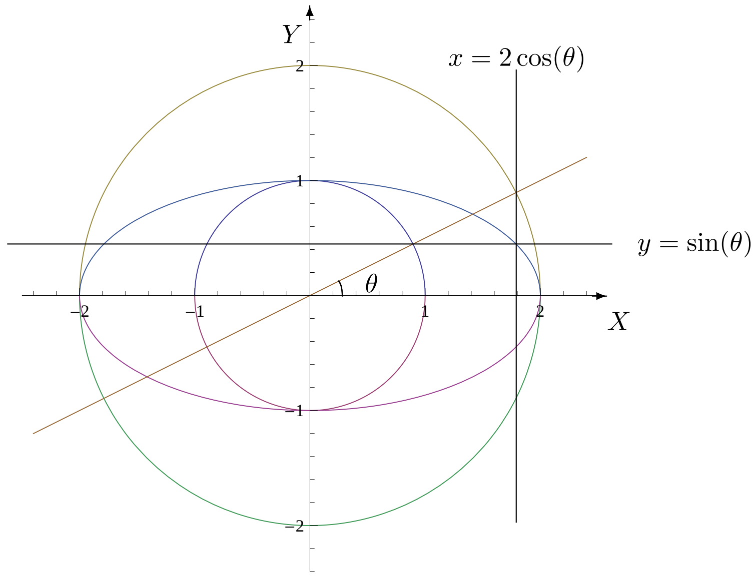
Pour débourser le moins possible, il faut donc attendre les soldes puisqu'on ne paiera alors que 91 % du prix actuel.

12. **a) Dans une question de physique relative au mouvement des corps, on lit que *Le corps A se déplace le long d'une courbe décrite par***

$$\{(2\cos(\theta), \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

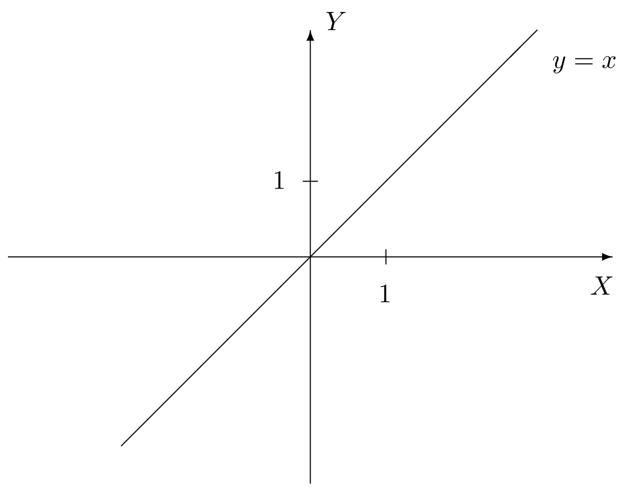
Dans un repère orthonormé, représenter cette courbe et donner une interprétation graphique de θ.

Solution. L'équation cartésienne de cette courbe est $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$: c'est l'équation d'une ellipse dont voici la représentation graphique



b) On se place dans un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble des points dont la tangente de l'angle polaire est toujours égale à 1 et donner une équation cartésienne de cet ensemble.

Solution. Comme $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$, si $x \neq 0$, on a $\mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{y}{x} = 1$ et l'ensemble des points demandé est la droite d'équation cartésienne $y = x$.



13. **Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à 10 mètres ?**

Solution. Supposons que les deux bateaux partent de l'origine d'un repère orthonormé. Après t minutes, l'un se trouvera au point de coordonnées $(0, 3t)$ et l'autre au point de coordonnées $(4t, 0)$. La distance en mètres entre ces deux points est donnée par $\sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5t$ et elle sera supérieure à 10 mètres si $t > 2$.
Ainsi, après 2 minutes la distance entre les deux bateaux est supérieure à 10 mètres.

14. **En combien de temps dix ouvriers construiront-ils un certain mur que quinze ouvriers ont pu élever en douze jours ?**

    Solution. Si 15 ouvriers construisent le mur en 12 jours alors 5 ouvriers le construisent en 3 fois plus de jours donc en 12 . 3 jours et 10 ouvriers le construisent en 2 fois moins de jours donc en $\frac{12\ .\ 3}{2} = 18$ jours.
    Ce mur est donc construit en 18 jours par 10 ouvriers.

15. **Une équipe de 18 ouvriers travaillant à raison de 8 heures par jour ont pavé en 10 jours une rue de cent cinquante mètres. Combien faut-il d'ouvriers travaillant 6 heures par jour pour paver en 15 jours une rue longue de 75 m, rue de même largeur que la précédente ?**

    Solution. Le nombre d'heures de travail de la première équipe pour paver 150 m est égal à 18 . 8 . 10 heures. Pour paver 1 m, il leur faut donc $\frac{18\ .\ 8\ .\ 10}{150}$ heures.
    Si x est le nombre d'ouvriers de la seconde équipe alors, le nombre d'heures pour paver 1 m vaut $\frac{x\ .\ 6\ .\ 15}{75}$ heures.
    En égalant ces nombres d'heures, on a
    $$\frac{18\ .\ 8\ .\ 10}{150} = \frac{x\ .\ 6\ .\ 15}{75} \Leftrightarrow \frac{18\ .\ 8\ .\ 2}{2} = x\ .\ 6\ .\ 3 \Leftrightarrow x = 8.$$
    Ainsi, il faut 8 ouvriers pour paver en 15 jours une rue de 75 m de long à raison de 6 heures par jour.

16. **Françoise a trois fois l'âge que Nicolas avait quand elle avait l'âge actuel de Nicolas. Quand Nicolas aura l'âge de Françoise, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges actuels de Nicolas et de Françoise ?**

    Solution. Soit x l'âge actuel de Nicolas et $x + y$ celui de Françoise, les âges étant donnés en années.
    Quand Françoise avait x années, Nicolas en avait $x - y$ et quand Nicolas aura $x + y$ années, Françoise en aura $x + 2y$. Dès lors, on a le système d'équations
    $$\left\{\begin{array}{l} x + y = 3(x - y) \\ x + y + x + 2y = 112 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 4y \\ 7y = 112 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 32 \\ y = 16 \end{array}\right. .$$
    Ainsi, Nicolas a 32 ans et Françoise en a 32+16=48 ans.

17. **Si on compte les arbres d'un jardin par groupes de 8, il en reste 5 et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce jardin ?**

    Solution. Soit x le nombre de groupes de 8 arbres et $x+3$ celui de groupes de 7 arbres du jardin. Le nombre d'arbres du jardin vaut donc
    $$8x + 5 = 7(x + 3) + 2 \Leftrightarrow x = 21 + 2 - 5 \Leftrightarrow x = 18.$$
    Ainsi, le nombre d'arbres du jardin est égal à 18 . 8 + 5 = 149 arbres.

18. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 1.28 mètres cube de glace ?**

    Solution. Quand l'eau se transforme en glace, le volume de la glace vaut $\frac{16}{15}$ du volume de l'eau et donc le volume de l'eau vaut $\frac{15}{16}$ de celui de la glace. Comme 1.28 m^3 correspondent à 1280 litres, le nombre de litres d'eau à transformer en glace vaut $1280\ .\ \frac{15}{16} = 1200$ litres.
    Ainsi, pour obtenir 1.28 mètres cube de glace, on a besoin de 1200 litres d'eau.

19. **Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25oint. Sachant qu'il obtient 53,75 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?**
p *Solution.* Soit x le nombre de réponses correctes fournies ; On a

$$x - \frac{1}{4}(100 - x) = 53,75$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{5}{4}x = 53,75 + 25 = 78,75 \Leftrightarrow x = \frac{78,75 \ . \ 4}{5} = 63.$$

On a donc que le nombre de réponses correctes est 63.

20. **Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100m en parcourant la distance en 9.58 secondes. A quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?**

Solution. Comme 100 m $= 10^{-1}$ km et 9.58s$= \dfrac{9.58}{3600}$h, la vitesse moyenne de Usain Bolt vaut

$$\frac{10^{-1}}{\frac{9.58}{3600}} = \frac{360}{9.58} = 37.578 \text{ km/h}.$$

Ainsi, Usain Bolt a couru le 100m à une vitesse moyenne de 37.578 km/h.

21. **A submarine dives at an angle of 30° with the horizontal and follows a straight-line path for a total distance of 50 m. How far is the submarine below the surface of the water ?**

Solution. Dans le triangle rectangle formé par l'horizontale, la trajectoire suivie par le sous-marin et la projection orthogonale de la position du sous-marin sur l'horizontale, la profondeur à laquelle se trouve le sous-marin est donnée par $50 \sin(30^\circ) = 50 \times \frac{1}{2} = 25$ m.
Ainsi le sous-marin se trouve à 25 m sous la surface de l'eau.

22. **En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le *système ISO A*. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle en 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre. Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100g. Le papier employé est de la catégorie commerciale " $80g/m^2$" ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de 1m^2 et que l'enveloppe utilisée pèse 20g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?**

Solution. L'aire d'une feuille Ai+1 vaut la moitié de l'aire d'une feuille Ai puisqu'on divise la longueur d'un des côtés par 2. Comme l'aire d'une feuille A0 vaut 1 m^2, l'aire d'une feuille A4 vaut $1. \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ m^2.
Sachant que 1 m^2 de papier pèse 80 g, une feuille A4 pèse donc $80. \frac{1}{16} = 5$ g.
Comme l'enveloppe pèse 20 g, le nombre de feuilles A4 dans l'enveloppe est (100-20) : 5 = 16 feuilles.
Ainsi, on pourra mettre 16 feuilles A4 dans l'enveloppe.

23. **Le nombre d'or est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport de la somme de celles-ci sur la plus grande soit égal à celui de la plus grande sur la plus petite. Que vaut ce nombre**

d'or ?

Solution. Soit $\varphi = \frac{L}{l}$ le nombre d'or avec $L > l > 0$.
Comme $\frac{L+l}{L} = \frac{L}{l}$, on a successivement

$$1 + \frac{l}{L} = \frac{L}{l} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \Leftrightarrow \varphi + 1 = \varphi^2 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

On résout cette équation en sachant que $\varphi > 0$. Comme $\Delta = 1 + 4 = 5$, on a $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, le nombre d'or vaut

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

24. **Un mélange contient 45 litres d'eau salée et 30 litres d'eau pure. On désire en faire un mélange qui, sur deux litres, contienne 1/2 litre d'eau salée. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter ?**

Solution. Dans le mélange à réaliser, l'eau salée représente le quart de la quantité totale puisqu'on a 1/2 litre d'eau salée sur deux litres. Comme on a 45 litres d'eau salée, le nombre de litres du mélange à réaliser vaut $4.45 = 180$ litres. La quantité d'eau pure à ajouter au mélange initial vaut 180 - (45+30) = 105 litres.
Ainsi, on ajoutera 105 litres d'eau pure pour obtenir le mélange souhaité.

25. **Une rivière coule au pied d'une falaise du haut de laquelle on laisse tomber une pierre. On entend l'impact 6 secondes après l'avoir lâchée. La distance d en m parcourue par la pierre jusqu'à la rivière en t secondes est donnée par $d = \frac{1}{2}gt^2$ où $g = 10$ m/s^2 et la vitesse du son est de 330 m/s. En mètres, que vaut approximativement la hauteur de la falaise ?**

Solution. Si la pierre met t secondes pour atteindre la rivière, le son met $6 - t$ secondes pour parcourir la même distance en sens inverse puisqu'on entend l'impact après 6 secondes. La hauteur H de la falaise vaut $\frac{1}{2}gt^2 = 5t^2$ mais aussi $330(6 - t)$ selon qu'on considère la pierre ou le son. Ainsi, on a

$$5t^2 = 330(6-t) \Leftrightarrow t^2 = 66(6-t) \Leftrightarrow t^2 + 66t - 396 = 0.$$

Comme $t > 0$ et $\Delta = 66^2 + 4.396 = 36.165$, on a

$$t = \frac{-66 + 6\sqrt{165}}{2} = -33 + 3\sqrt{165} \text{ et } H = 330(6 + 33 - 3\sqrt{165}) = 153,22\ldots$$

La hauteur de la falaise vaut donc approximativement $153,22$ m.

26. **Si a et b sont deux nombres réels, comment s'exprime la tangente de leur différence en fonction de la tangente de chacun d'eux ? Utiliser votre réponse pour déterminer la valeur exacte de la tangente de $\frac{\pi}{12}$.**

Solution. Soient a, b et $a - b$ des réels différents de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On a

$$\mathrm{tg}(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$$

et en divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b)$, on obtient

$$\mathrm{tg}(a-b) = \frac{\mathrm{tg}(a) - \mathrm{tg}(b)}{1 + \mathrm{tg}(a)\ \mathrm{tg}(b)}.$$

Dès lors, comme $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, que $\text{tg}(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ et que $\text{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$, on a

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{tg}(\frac{\pi}{3}) - \text{tg}(\frac{\pi}{4})}{1 + \text{tg}(\frac{\pi}{3})\text{tg}(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

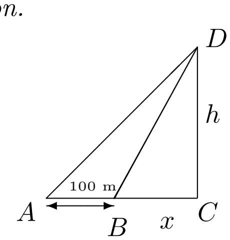
et en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{3} - 1$, on obtient finalement

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ainsi, $\quad \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}.$

27. **Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve $60°$. Il recule de 100 m et son évaluation donne alors $45°$. Quelle est approximativement la hauteur du monument ? (Note : le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.)**

Solution.



Considérons les triangles ACD et BCD rectangles en C. Si h est la hauteur du monument et x la distance entre B et C, vu les formules dans les triangles rectangles, on a

$$h = (100 + x)\ \text{tg}(45°) = x\ \text{tg}(60°).$$

Comme $\text{tg}(45°) = 1$ et $\text{tg}(60°) = \sqrt{3}$, on a

$$100 + x = \sqrt{3}\ x \Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)x = 100 \Leftrightarrow 2x = 100(\sqrt{3}+1) \Leftrightarrow x = 50(\sqrt{3}+1).$$

Dès lors, $h = 100 + x = 100 + 50(\sqrt{3}+1) \approx 236,6$.

Ainsi, la hauteur du monument est de 236,6 mètres.

28. **Sur un plan à l'échelle 1/200, les dimensions d'un jardin rectangulaire sont 4,5 cm et 3 cm. Quelle aire en ares manque-t-il dans la réalité pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are ?**

Solution. Vu l'échelle, les dimensions réelles s'obtiennent en multipliant par 200 les dimensions sur la carte. Les dimensions réelles sont donc $4,5\ .\ 200 = 900$ cm $= 0,9$ dam et $3\ .\ 200 = 600$ cm $= 0,6$ dam.
Comme $1\ \text{dam}^2 = 1$ a, l'aire du jardin vaut $0,9\ .\ 0,6 = 0,54$ a et pour avoir un jardin dont l'aire vaut 1 a, il manque $1 - 0,54 = 0,46$ a.
Il manque donc $0,46$ a pour avoir un jardin dont la superficie vaut 1 are.

29. **Une population de bactéries est attaquée par un agent extérieur faisant en sorte qu'à chaque instant, le taux de changement de la population soit proportionnel à celle-ci. Si on suppose que la constante de proportionnalité est égale à -0.028,**
- écrire une équation reliant la population et le taux de changement de celle-ci à chaque instant
- que vaut le taux de changement après une minute si la population à ce moment est

de 3 millions d'individus ?

Solution. A chaque instant t, la population P et le taux de changement de celle-ci DP sont reliés par l'équation $DP(t) = -0,028\ P(t)$.
Le taux de changement après une minute vaut $DP(1) = -0,028\ .\ 3\ 10^6 = -84\ 10^3$ si la population à ce moment est de 3 millions d'individus.
Après une minute, le taux de changement de la population est de $-84\ 10^3$ si la population à ce moment est de 3 millions d'individus.

30. **Rédiger une démonstration de la propriété suivante, suggérée au cours : *Soit un naturel strictement positif* m*. La fonction polynomiale* $x \mapsto x^m$ *est dérivable en tout réel* x *et sa dérivée a la forme explicite* $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.**

Solution. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}_0$. En appliquant la définition de la dérivabilité, montrons que la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

existe, est finie et vaut mx^{m-1}.

Vu la formule du binôme de Newton, on a

$$(x+h)^m - x^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j h^j x^{m-j} - x^m = \sum_{j=1}^{m} C_m^j h^j x^{m-j} + C_m^0 x^m - x^m = \sum_{j=1}^{m} C_m^j h^{j-1}\ h\ x^{m-j}.$$

Dès lors,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\sum_{j=1}^{m} C_m^j h^{j-1} x^{m-j} \right) = C_m^1 x^{m-1} = mx^{m-1}.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x^m$ est dérivable en tout réel x et sa dérivée a la forme explicite $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2017-2018

Mathématique

Listes d'exercices du 1er quadrimestre 2017-2018

Version 22 août 2017

Chapitre 2

Listes d'exercices

Liste 1 : problèmes élémentaires, unités et puissances de 10

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Problème élémentaire

Schéma de résolution d'un problème :

1. Que cherche-t-on ?
2. Quelles sont les données ?
3. Si on nomme x l'inconnue, que représente x de façon précise ? (Mentionner l'unité si nécessaire) [1]
4. Que peut-on calculer successivement en utilisant l'inconnue ?
5. Quelle est l'équation obtenue ?
6. La résoudre.
7. Donner la solution du problème en rédigeant une conclusion.

II. Unités et puissances de 10

1. Dans le système international SI quelle est l'unité de référence pour mesurer
   a) une longueur ? b) une masse ?
2. Découlant des précédentes, quelle est l'unité pour mesurer
   a) une aire ? b) un volume c) une capacité ?
   d) Quel est le lien entre capacité et volume ?
3. Que vaut a) 1 ca ? b) 1 a ? c) 1 ha ?
4. Comment passe-t-on d'une unité de longueur, de masse ou de capacité à l'unité directement
   a) inférieure ? b) supérieure ?
5. Même question pour les unités d'aire, de volume.
6. Définir 10^n avec n naturel. Comment peut-on écrire rapidement la valeur de ce nombre ?
7. Définir 10^{-n} avec n naturel. Comment peut-on écrire rapidement, sous forme décimale, la valeur de ce nombre ?
8. Comment multiplie-t-on un nombre décimal par 10^n si n est un naturel ?
9. Même question dans le cas d'une division.

---

1. Plusieurs inconnues sont parfois nécessaires ; dans ce cas, on aura un système d'équations.

Préambule

En sciences, on est fréquemment amené à résoudre des problèmes et à rédiger leur solution. Bien souvent on doit transformer une unité en une autre afin de rester cohérent. Dès lors, les puissances de 10 jouent un grand rôle, une division par 10^n avec n naturel équivalant à une multiplication par 10^{-n}.

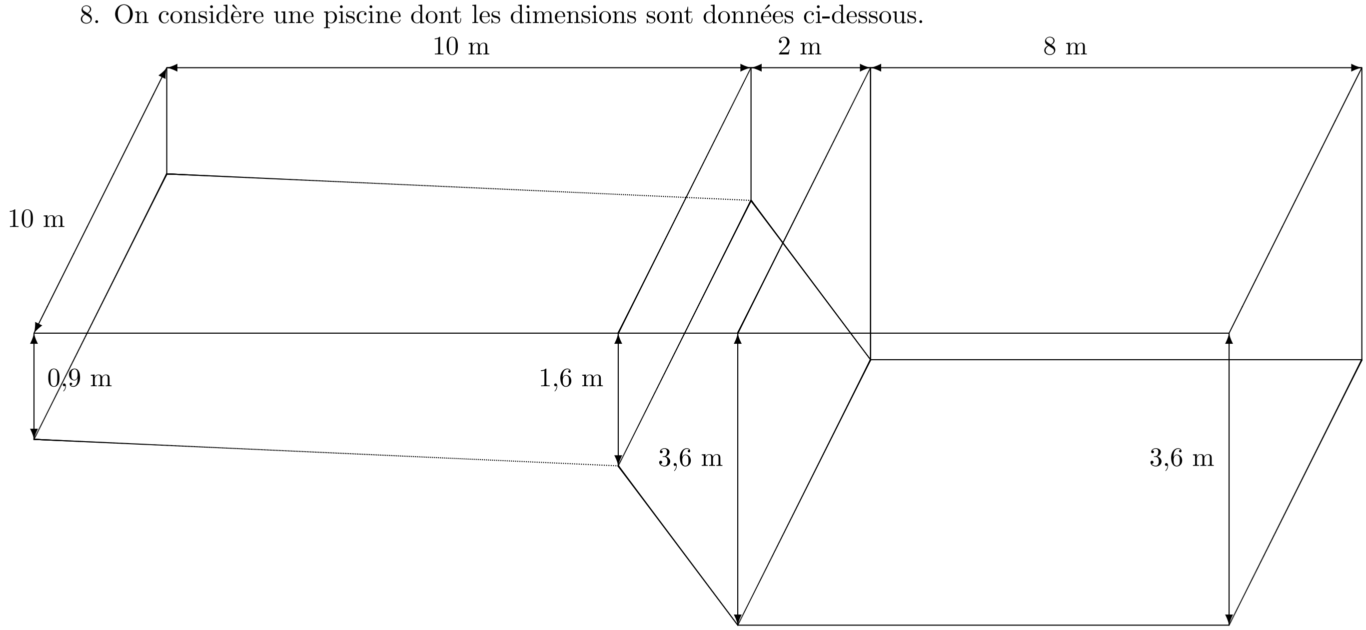
A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.2 et I.6 seront résolus par l'assistant.

I. Problème élémentaire

Résoudre les problèmes suivants en **rédigeant** la solution selon le schéma donné ci-dessus :

1. Un terrassier a creusé les 4/5 de la longueur d'un fossé. Il creuse encore une longueur de 4,5 m et constate qu'il n'a plus qu'à creuser les 14 % de la longueur pour en avoir terminé. Quelle est la longueur du fossé en mètres ?
2. 1 litre d'eau de mer pèse 1,025 kg et contient 3% de sa masse en sel. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter à 2 litres d'eau de mer pour obtenir de l'eau contenant 1% de sa masse en sel ?
3. Un train parcourt 120 km à l'heure. Après 2 heures de marche, il est obligé de s'arrêter et d'attendre 1 heure. Ensuite il continue sa marche à une vitesse de 60 km à l'heure et arrive 3 heures en retard. Quel temps le train aurait-il mis s'il n'avait pas dû s'arrêter et s'il avait parcouru toute la distance avec la vitesse primitive ?
4. Un nombre est composé de 2 chiffres dont la somme est 6 ; si on retranche 18 de ce nombre, on obtient le nombre renversé. Quel est ce nombre ?
5. Un père a 40 ans et son fils 10 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de celui du fils ?
6. On a acheté 15 bouteilles de champagne et 17 bouteilles de vin rouge pour 504 €. Si le prix du champagne augmentait de 75 centimes par bouteille et si celui du vin rouge diminuait de 30 centimes par bouteille, on payerait 649 € pour 20 bouteilles de chaque sorte. Quel est le prix d'une bouteille de chaque vin ?
7. Trouver deux nombres dont la somme est 3 sachant que leur rapport augmenté de leur rapport inverse vaut 13/6.
8. On considère une piscine dont les dimensions sont données ci-dessous.



(a) Combien de litres d'eau cette piscine contient-elle quand elle est remplie à 10 cm du bord ?
(b) Un m^3 d'eau coûte 4 euros. Combien cela coûte-t-il de la remplir ?
(c) Sachant que la pompe filtre 50 000 litres par heure, combien de temps faut-il (en théorie) pour filtrer la totalité de l'eau du bassin ?
(d) Quel est le pourcentage de chacune des deux pentes ?

II. Unités et puissances de 10

1. Compléter
   - en français :
   a) 10^6 correspond à ... b) $0,0001$ peut se lire ... c) 10^9 correspond à ...
   d) 10^{-9} correspond à ... e) 10^{-2} c'est ... f) mille millards de mille sabords, c'est ... de sabords.
   - sous forme d'un entier ou d'un décimal :
   g) un millième peut s'écrire ... h) 10^0 égal ... i) un centième s'écrit ...
   j) 1 milliard équivaut à ... millions k) un milliard vingt millions s'écrit ...
   - sous forme de puissance de 10 :
   l) $10^3.10^9.10^{13}$ =...

2. Sans se servir d'un abaque, en utilisant les puissances de 10 et en effectuant les transformations, compléter le tableau ci-dessous

	Forme décimale		Puissance de 10
(1)	$543,5\ hm$	=	$5,435\ .10^{\cdots\cdots}\ mm$
(2)	$\frac{3}{8}\ dm$	=	.... m
(3)	.... km	=	$805\ .10^{-4}\ m$
(4)	$\frac{23}{50}\ km$	=	.... cm
(5)	$481,96\ dm^2$	=	$4,8196\ .10^{\cdots\cdots}\ ha$
(6)	$32,5\ cm^2$	=	.... a
(7)	$\frac{17}{25}\ m^2$	=	.... km^2
(8)	$0,25m^3$	=	$2,5\ .10^{\cdots\cdots}\ ml$
(9)	.... hl	=	$4\ .10^4\ cm^3$
(10)	$2,75\ m^3$	=	.... mm^3
(11)	$4\ 800\ cl$	=	.... kl
(12)	.... kg	=	$17\ .10^2\ dg$
(13)	$35\ cg$	=	$3,5\ .10^{\cdots\cdots}\ kg$
(14)	.... mg	=	$4\ .10^{-7}\ t$

Liste 2 : Équations, inéquations et puissances

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Définitions et résolution d'équations

1. a) Définir une équation du premier degré à **une** inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée.
   b) Comment résout-on une équation de ce type ? Exprimer avec précision les opérations utilisées (addition, soustraction, multiplication, division)
   c) Une équation du premier degré à une inconnue peut-elle parfois avoir plus d'une (ou moins d'une) solution ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ?
2. Définir une équation du premier degré à **deux** inconnues.
   Dans un repère cartésien du plan, comment se représente graphiquement une telle équation ? Répondre de façon précise en envisageant tous les cas possibles.
3. a) Définir une équation du second degré à une inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée.
   b) Comment résout-on une équation de ce type ?
4. Donner les formules des produits remarquables (carré et cube)
5. Quels sont les processus possibles pour résoudre une équation de degré strictement supérieur à 2 ?
   Si vous manquez d'imagination, voir le fascicule "bases pour les mathématiques" à l'adresse http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html
6. a) Définir une équation fractionnaire.
   b) Quel est le processus de résolution d'une telle équation ?

II. Valeur absolue et équations

1. Définir en français et en symboles mathématiques la valeur absolue d'un réel.
2. Si deux réels ont la même valeur absolue, que peut-on dire de ces réels ? Exprimer la réponse à cette question en français (par une phrase complète) et en symboles mathématiques.
3. Si on prend la valeur absolue d'un réel, quel type de réel obtient-on ? Rédiger une phrase complète.
4. a) Si x est un réel et n un naturel non nul, que peut-on dire du signe de x^{2n} ? de x^{2n+1} ?
   b) En tenant compte de ces renseignements, que vaut $|x^{2n}|$? $|x^{2n+1}|$?

III. Résolution d'inéquations

1. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue et celle d'une inéquation du même type ?
2. Comment résout-on une inéquation à une inconnue d'un degré autre que le premier ? Décrire de façon précise les différentes étapes de la résolution.
3. Que sait-on du signe
   a) d'un binôme du premier degré ?
   b) d'un trinôme du second degré ?
4. Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation fractionnaire et celle d'une inéquation fractionnaire ?
5. Si la valeur absolue d'un réel est
   a) supérieure à un réel strictement positif donné, que peut-on dire de l'un par rapport à l'autre ?
   b) même question en remplaçant "supérieure" par "inférieure".

IV. Racines de réels et puissances

a) Pour quels réels une racine d'indice pair est-elle définie ? Quel est le signe de sa valeur ?
b) Mêmes questions dans le cas d'une racine d'indice impair.

V. Sommes et symboles sommatoires

a) Ecrire explicitement la somme des N premières puissances naturelles d'un réel (N est un naturel non nul) puis l'écrire avec des symboles sommatoires.
b) Que vaut cette somme ?

Préambule

Bien des problèmes en sciences donnent lieu à des équations ou inéquations qu'on doit pouvoir résoudre.

— Ainsi, par exemple, un mouvement rectiligne uniforme donne lieu à une équation du premier degré décrivant la position du mobile en fonction du temps. Graphiquement, le mouvement se représente donc par une droite. Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on est en présence d'une équation du second degré pour décrire la position du mobile en fonction du temps et la représentation graphique est une parabole.

— Si l'on souhaite rechercher le point de rencontre de deux mobiles, on détermine les coordonnées du point d'intersection des graphiques représentant leurs positions en fonction du temps ; analytiquement, on résout un système de deux équations.

— En optique, l'agrandissement d'un objet situé à une distance p d'une lentille convexe de distance focale f ($f > p$) est donné par $A = \dfrac{f}{f-p}$, ce qui nécessite la résolution d'une équation fractionnaire si p est inconnu ou d'une inéquation si l'agrandissement doit être au moins égal à une valeur donnée.

— Pour calculer la norme de la résultante de deux forces de directions perpendiculaires, après application du théorème de Pythagore, on est amené à calculer une racine carrée.

— Le rayon d'une sphère dont on connaît le volume (excès de liquide lorsqu'on plonge une bille dans un récipient rempli d'eau par exemple) exige le calcul d'une racine cubique.

— Quant aux valeurs absolues, on les utilise notamment pour exprimer la distance entre deux réels donc lorsqu'on travaille avec des valeurs approchées à ε près ou encore pour les erreurs absolue ou relative.

etc !

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est assez détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la deuxième séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux ≪ questions à se poser ≫ lors de la confrontation à la résolution.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices II. 2(c), III.2(c) et V.2 seront résolus par l'assistant.

I. Résolution d'équations (x est l'inconnue réelle)

Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.

$$a)\ \pi^2 x - \frac{1}{3} = -\frac{x}{\pi} \qquad b)\ 64x^2 + 1 = 0 \qquad c)\ 64x^3 + 1 = 0 \qquad d)\ 2x - \frac{2}{x} = 1$$

II. Valeur absolue et équations (A est l'inconnue réelle)

1. a) Si un réel est noté $A - 2$, définir la valeur absolue de $A - 2$.
   b) Dans ce cas, quelle est la valeur de A qui joue un rôle différent des autres valeurs ?
   c) Répondre aux mêmes questions en considérant le réel $A^2 - 2$
2. Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.

$$a)\ |-A + \sqrt{2}| = |-2A| \qquad b)\ \left|A^2 - |A^4|\right| + 1 = 0 \qquad c)\ \left|A^2 - |A^4|\right| - 1 = 0$$

III. Résolution d'inéquations (x est l'inconnue réelle)

1. Si on a $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ $(a, b \in \mathbb{R}_0)$ peut-on toujours dire que cette inégalité est équivalente à $a > b$?
   a) Si oui, le prouver.
   b) Si non, donner un contre-exemple et dire dans quel(s) cas cette équivalence pourrait être correcte.
2. Résoudre les inéquations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes inéquations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions

$$a)\ \frac{-1}{2x-1} \leq \frac{-1}{x-2} \qquad b)\ |3x - 2| > 3 \qquad c)\ \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{|5x - 2x^2 - 3|} \qquad d) |x^2 + x - 2| \leq 1 - x$$

IV. Racines de réels et puissances

1. Que valent (a) $\sqrt{(-\pi)^4}$ (b) $\sqrt[3]{(-4)^3}$?
2. a) Pour quelles valeurs de x la racine $\sqrt{4x^2}$ est-elle définie ?
   b) Peut-on dire que $\sqrt{4x^2} = 2x$? Justifier votre réponse.
   c) Si x est un réel négatif, que vaut $\sqrt{4x^2}$?
3. a) Si n est un naturel non nul, comparer les réels $(-x)^{2n}$ et $-x^{2n}$: sont-ils égaux ou différents ? Justifier votre réponse.
   b) Même question avec $(-x)^{2n+1}$ et $-x^{2n+1}$.

V. Sommes et symboles sommatoires

1. a) On considère la somme $s_1 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$. Exprimer en français la somme considérée.
   b) Comment note-t-on de façon générale un terme de ce type ?
   c) Ecrire cette somme à l'aide d'un symbole sommatoire
   .

2. a) On considère la somme $s_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$. Comment caractériser chacun des termes de cette somme sans tenir compte de son signe ?
   b) Comment, dans une somme, peut-on passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif ?
   c) Ecrire s_2 à l'aide d'un symbole sommatoire.

3. On considère la somme $S_1 = \sum_{j=2}^{4} (-2)^{2j}$.
   a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
   b) Que vaut le terme correspondant à $j = 3$?
   c) Que vaut cette somme ?
   d) Si j variait de 2 à 20, quelle formule pratique pourrait-on utiliser pour calculer la somme ? L'appliquer sans calculer le résultat numérique final.

4. On considère la somme $S_2 = \sum_{l=0}^{7} (\sqrt[3]{2})^2$.
   a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
   b) Que vaut le terme correspondant à $l = 3$?
   c) Que vaut cette somme ?

Liste 3 :
droites et trigonométrie

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Quelle est la forme canonique de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan ? Indiquer ce que représente chacune des lettres utilisées.
2. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et de coefficient angulaire m (x_1, y_1, m sont des réels) ?
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre m et (a, b) ? a et b peuvent-ils être des réels quelconques ? Expliquer.
   c) Quel lien existe-t-il entre le coefficient angulaire d'une droite et la mesure de l'angle $\theta \in [0, \pi]$ que cette droite forme avec l'axe des abscisses ?
3. a) Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par les points distincts de coordonnées cartésiennes respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ? Envisager tous les cas possibles.
   b) Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (a, b) ?
4. Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et parallèle à
   a) l'axe des abscisses ?
   b) l'axe des ordonnées ?
5. Si deux droites non parallèles aux axes sont
   a) orthogonales entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?
   b) parallèles entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?
6. Soit la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et dont un vecteur directeur a pour composantes (a, b). Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.

II. Résolution de systèmes linéaires

Quels sont les processus les plus fréquemment utilisés pour résoudre les systèmes linéaires ?

III. Trigonométrie

1. a) Comment associe-t-on un point du cercle trigonométrique à un réel donné ?
   b) Etant donné un point du cercle trigonométrique associé à un réel x, comment définir le sinus et le cosinus de ce réel ?
2. a) Pour quelle(s) valeur(s) de x le réel $\sin(x)$ est-il nul ?
   b) Même question pour $\cos(x)$.
   c) Déduire des points précédents pour quelle(s) valeur(s) de x les réels $\mathrm{tg}(x)$ et $\mathrm{cotg}(x)$ sont définis.
3. a) Quelles sont les formules de trigonométrie qui lient au moins 2 des réels $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{tg}(x)$ et $\mathrm{cotg}(x)$ si x est un réel ? Les citer.
   b) Quels signes ont ces nombres dans les différents quadrants ?
4. Quelles sont les formules de trigonométrie qui permettent de passer de sommes ou différences de nombres trigonométriques à des produits de tels nombres ? Les citer.
5. a) Comment peut-on transformer le cosinus d'un réel en un sinus sans utiliser la formule fondamentale de trigonométrie ?
   b) Si les sinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de 2π près ?

6. Si les cosinus de 2 réels sont égaux, que peut-on dire de ces réels à un multiple entier de 2π près ?

Préambule

On utilise notamment la trigonométrie en mécanique (plan incliné, mouvement circulaire), en électricité (courant alternatif), pour étudier les phénomènes ondulatoires (vagues, ondes sismiques, son, lumière, ondes radio ...). Beaucoup de phénomènes naturels varient de façon périodique (alternance d'inspirations et d'expirations dans la respiration, hauteur de la marée à un endroit précis ...) et il est parfois possible de représenter de tels comportements grâce à des fonctions trigonométriques.

Classiquement, on définit un *nombre trigonométrique* comme étant une valeur d'une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente, cotangente). Les nombres trigonométriques sont fondamentaux dans l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du plan à l'aide des coordonnées polaires et dans la forme trigonométrique (ou polaire) des nombres complexes.

En analyse, les fonctions trigonométriques sont des fonctions définies sur l'ensemble des réels ou sur une partie de celui-ci. La définition géométrique contient celle de la notion de ≪ mesure d'angle ≫ en radians. Une autre mesure d'angle est bien sûr le degré, 2π radians correspondant à 360 degrés. *Avez-vous une idée d'où provient la mesure en degrés (et ... pourquoi 360 degrés ?) et connaissez-vous un avantage primordial de la mesure en radians ?*

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est assez détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux ≪ questions à se poser ≫ lors de la confrontation à la résolution.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.4 - II.3(c) et III.5 seront résolus par l'assistant.

I. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Sans en déterminer une équation cartésienne, représenter graphiquement la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(1, -2)$ et de coefficient angulaire $-\frac{1}{2}$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnée $(1, 0)$ et orthogonale à la droite d'équation $2x + y + 2 = 0$. Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.
3. a) Donner une équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(2, 3)$ et $(1, 2)$ ainsi que celle de la droite passant par $(2, 3)$ et $(2, 0)$.
   b) Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.
4. On considère la droite d'équation cartésienne $2x + y + 2 = 0$.
   a) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
   b) Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.
   c) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.
   d) La droite passe par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point ?

II. Résolution de systèmes linéaires

1. a) Si on considère l'équation $2y - x = 3$, représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans un repère cartésien du plan. Quel est le nom de cette courbe ?
   b) Résoudre le système $\begin{cases} y + x = 0 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$
   Ne pas oublier de mentionner l'ensemble des solutions.
   c) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
2. a) Dans le plan, représenter graphiquement les solutions du système $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 3 \end{cases}$
   b) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
   c) Résoudre ce système et donner son ensemble de solutions.
   d) Faire de même avec le système $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$
3. a) Si on considère l'équation $y + 2x + z = 2$, comment peut-on représenter graphiquement les solutions dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom de cet élément ?
   b) Si on a un système formé de deux équations de ce type, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.
   c) Résoudre $\begin{cases} y + 2x + z = 2 \\ y - 2x + 2z = 0 \end{cases}$

III. Trigonométrie

1. a) Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, dans quel quadrant travaille-t-on ?
   b) Dans ce quadrant, on sait que $\mathrm{tg}(x) = -\frac{4}{3}$. Sans utiliser de calculatrice, déterminer la valeur des trois autres nombres trigonométriques ?
2. a) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $\mathrm{tg}(x) + \mathrm{cotg}(x) - \dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)}$ est-elle définie ?
   b) En simplifiant cette expression, montrer qu'elle est indépendante de x.
3. a) Rapprocher $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$ d'un produit remarquable qui permettrait de simplifier cette expression. Lequel envisager ?
   b) Transformer l'expression ci-dessus en utilisant la formule trouvée pour simplifier au maximum cette expression.
4. a) Parmi les formules de trigonométrie, quelle est celle qui permet de transformer un double produit de sinus cosinus ? La citer.
   b) Prouver que $4\sin\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)\cos\left(\dfrac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{2} - 1$.
5. a) Résoudre l'équation $\sin(4x) = \cos(2x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
   b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
6. a) Résoudre l'équation $\cos(4x) = \cos(2x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
   b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$.
7. a) Si un produit de 2 facteurs est négatif, que peut-on affirmer à propos de ces facteurs ?
   b) Transformer $\sin(2x)$ en un produit de 2 facteurs.
   c) Résoudre $\sin(2x) \leq \cos(x)$ (note : x est l'inconnue réelle)
   d) Parmi toutes les solutions, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
8. Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, résoudre les équations suivantes

   a) $1 + \cos(x) = \sin(x)$. b) $\cos(2x)\cos(4x) = \sin(2x)\sin(4x)$.
   c) $\cos(x) + \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$. d) $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$.
   e) $\cos(2x) + \sin(x) = 0$. f) $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(2x)$.
   g) $2\sin^2(x) + \sin(2x) = 0$. h) $\sin(3x)\cos(2x) + \sin^2(x) = \frac{1}{2}$.

Liste 4 :
calcul vectoriel et coniques

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

1. Dans un repère orthonormé d'origine O du plan, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par son origine A et son extrémité B.
   a) Comment écrire $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
   b) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ si A et B ont respectivement pour coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) ?

2. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$.
   a) Comment calcule-t-on le produit scalaire de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en français et en symboles mathématiques. Quel type d'élément mathématique obtient-on ?
   b) Comment calcule-t-on le produit vectoriel de 2 vecteurs de l'espace dont on connaît les composantes dans une base orthonormée ? Exprimer la réponse en symboles mathématiques. Quel type d'élément mathématique obtient-on ?
   c) Le produit scalaire de 2 vecteurs est-il commutatif ? Et le produit vectoriel ?

3. Quelle est l'expression vectorielle qui permet de calculer la projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sur la droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$?

II. Les coniques

1. Soit un repère orthonormé du plan.
   a) Donner l'équation canonique du cercle centré au point de coordonnées (x_1, y_1) et de rayon R.
   b) Que devient cette équation si le cercle est centré à l'origine ?
   c) Quelle caractéristique commune ces équations ont-elles permettant de les différencier des équations d'autres coniques ?
   d) Donner l'équation canonique d'une ellipse.
   e) Comment, à la lecture de cette équation et de celles qui précèdent, peut-on immédiatement différencier celle d'un cercle de celle d'une ellipse ?
   f) Donner l'équation canonique d'une hyperbole.
   g) Comment, à la lecture de cette équation et de celle d'une ellipse, peut-on immédiatement les différencier ?
   h) Donner l'équation canonique d'une parabole.
   i) Comment, à la lecture de cette équation et de celles ci-dessus, peut-on immédiatement repérer que c'est celle d'une parabole ?

2. a) Si on considère l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes et la valeur de son excentricité.
   b) Si on considère l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes de ses asymptotes et la valeur de son excentricité.
   c) Si on considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$, donner les coordonnées de son foyer, de son point d'intersection avec l'axe des abscisses et la valeur de son excentricité.

Préambule

La notion de vecteur est fondamentale en physique ; elle est notamment utilisée pour caractériser un déplacement, une vitesse, une force, un champ électromagnétique. En effet, un vecteur permet de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre comme une température ou une masse. Pour définir un déplacement, par exemple, on a besoin d'une direction et d'un sens en plus d'une longueur. On utilise le produit scalaire pour déterminer le travail d'une force ou la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite. Le produit vectoriel intervient dans le calcul du moment d'une force par rapport à un point, pour déterminer la force magnétique dans un champ ...

Un cône circulaire droit à deux nappes (« diabolo ») peut être engendré par la rotation d'une droite sécante à une autre autour de cette autre prise comme axe de la rotation. Les coniques (ou sections coniques) peuvent être obtenues par l'intersection d'un tel cône par un plan. Selon la position de celui-ci, on obtient un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

La trajectoire d'un corps céleste en orbite autour d'une étoile ou d'une autre planète (la Terre autour du Soleil, par exemple) est une ellipse dont l'étoile ou la planète occupe l'un des foyers. De nombreuses comètes ont des orbites elliptiques dont l'excentricité est proche de 1 mais certaines comètes peuvent avoir des trajectoires hyperboliques ou paraboliques.

En effectuant une rotation d'une ellipse autour de son axe focal, on engendre un ellipsoïde de révolution qui jouit de la propriété de réflexion suivante : toute onde émise à partir d'un des foyers est réfléchie par l'ellipsoïde vers le second foyer. La Rotonde du Capitole à Washington est une galerie à écho de ce type à plafond elliptique : toute personne qui chuchote en l'un des foyers peut être entendue par une personne placée à l'autre foyer. Cette propriété de réflexion est également utilisée en médecine pour désintégrer des calculs rénaux au moyen d'ondes de haute densité. Le médecin positionne le patient de telle sorte que le calcul se trouve en l'un des foyers et l'émetteur des ondes réfléchies par l'ellipsoïde en l'autre foyer.

La trajectoire d'un électron qui, sans interaction, passerait en ligne droite tout près d'un ion négatif au repos, est en fait une trajectoire hyperbolique à cause de la force de répulsion.
Si des ondes circulaires émises par deux sources oscillant en phase interfèrent, les points où l'amplitude est maximale ou minimale sont situés sur des hyperboles dont les sources en sont les foyers.

La trajectoire décrite par un objet (ballon, saut d'un animal ...) lancé et soumis à la pesanteur est une parabole.
En effectuant une rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie, on obtient un paraboloïde de révolution qui, grâce à la propriété optique des paraboles, permet de concentrer des ondes ou des rayons en un point (antenne parabolique, four solaire, miroir de télescope ...) ou de diffuser sous forme d'un faisceau cylindrique de la lumière produite par une ampoule située au foyer (lampe de poche, phare ...).

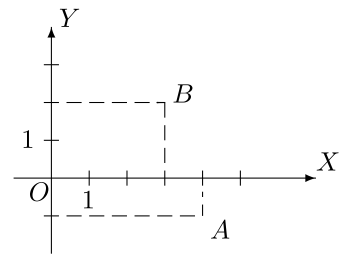
A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est assez détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux « questions à se poser » lors de la confrontation à la résolution.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

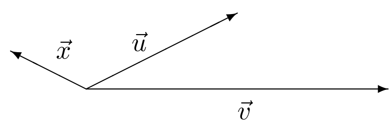
Lors de la répétition, les exercices I.3(a-b-c-d) et II. 2(e, f et g : équations (2) et (6)) seront résolus par l'assistant.

I. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel



1. a) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base correspondant au repère orthonormé ci-contre ?
b) Donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$

2. Soit la base du plan définie par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a) Si $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$, donner les composantes de $\vec{a}$ dans la base $\vec{u}$, $\vec{v}$.
b) Représenter $\vec{a}$.



c) On considère le vecteur $\vec{x}$. Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis en donner les composantes dans cette base.

3. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$.
a) Si $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$, quelles sont les composantes de $\vec{a}$ dans cette base ?
b) De même pour $\vec{b} = \vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3}$.
c) Déterminer le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$.
d) Déterminer le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$.
e) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge \vec{a}$, celles de $\vec{y} = (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{a}$ et celles de $\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$.

4. a) Dans une base orthonormée du plan, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(-1, 2)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $(1, 3)$. Représenter ces vecteurs.
b) Dans une base orthonormée de l'espace, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(0, 1, -2)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $(-1, 2, -2)$.

II. Les coniques

1. Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes

$$(1)\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 4 \qquad (2)\ x = y^2 + 2 \qquad (3)\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 4 \qquad (4)\ x^2 + y^2 + y = 0$$

$$(5)\ x^2 = -y^2 \qquad (6)\ \frac{y^2}{4} - x^2 = 4 \qquad (7)\ y = xy^2 \qquad (8)\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 4$$

Sans faire aucun calcul, quelles sont celles qui pourraient être l'équation cartésienne
a) d'un cercle ? b) d'une ellipse ? c) d'une hyperbole ? d) d'une parabole ?

2. a) Ecrire $y^2 + y$ sous la forme d'un carré parfait auquel on ajoute (ou on soustrait) une constante.
b) Déterminer les coordonnées du centre et la valeur du rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$. Le représenter graphiquement.
c) Pour chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent, déterminer les coordonnées de leurs

points d'intersection avec les axes. Les représenter graphiquement.
d) Donner les coordonnées des foyers et la valeur de l'excentricité des ellipses représentées ci-dessus.
e) Donner les coordonnées des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes des asymptotes et la valeur de l'excentricité des hyperboles repérées dans l'exercice ci-dessus.
f) Représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.
g) Donner les coordonnées du foyer et la valeur de l'excentricité des éventuelles paraboles repérées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement.
h) Si, dans l'exercice précédent, il reste des équations de courbes non encore représentées, les analyser afin d'en donner aussi une représentation graphique.

Liste 5 : représentation d'ensembles

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

Représentation d'ensembles

Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f dont la représentation graphique a pour équation $y = f(x)$. Pour une même abscisse x du domaine de définition de f, on considère un point P_1 situé sous la courbe et d'ordonnée y_1, un point P_2 situé sur la courbe et d'ordonnée y_2 ainsi qu'un point P_3 situé au-dessus de la courbe et d'ordonnée y_3. Comparer $y_1,\ y_2,\ y_3$ à $f(x)$.
La courbe partage le plan en deux régions, l'une positive pour laquelle $y-f(x) > 0$ et l'autre négative pour laquelle $y - f(x) < 0$, quelle que soit la valeur du réel x du domaine de définition de f. Pour représenter un ensemble de points défini à l'aide d'inégalités, on commencera donc toujours par représenter ses ≪ bords ≫ qui correspondent à l'égalité.

Préambule

Les descriptions d'ensembles sont notamment utiles pour le calcul des intégrales doubles, lesquelles permettent par exemple de calculer des volumes mais aussi des centres de masse, des moments d'inertie ...

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est assez détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux ≪ questions à se poser ≫ lors de la confrontation à la résolution.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

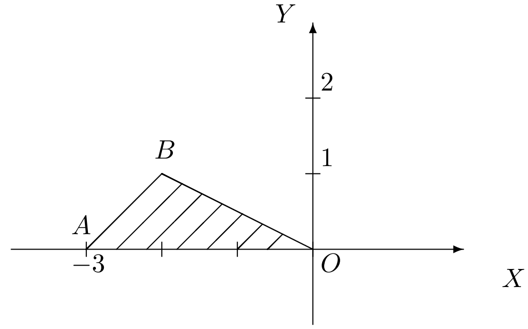
Lors de la répétition, les exercices 2 et 7 seront résolus par l'assistant.

Représentation d'ensembles

1. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\{(t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1]\}.$$
   a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.
   b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.
   c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.
   d) Représenter graphiquement la courbe.
2. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\{(2\sqrt{1+x^2}, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$
   a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.
   b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.
   c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.
   d) Représenter graphiquement la courbe.

3. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, |x+y-1| \leq 1\}.$$
a) Si la valeur absolue d'un nombre vaut 1, que vaut ce nombre ?
b) Comment écrire $|x+y-1| = 1$ de façon équivalente ?
c) Représenter graphiquement la (les) équation(s) obtenue(s) ci-dessus.
d) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné en la(les) hachurant. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
4. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \geq 1+x^2 \text{ et } x^2+2x+y^2 \geq 3\right\}.$$
a) Représenter la courbe d'équation $y = 1+x^2$ ainsi que celle d'équation $x^2+2x+y^2 = 3$.
b) Déterminer la région du plan qui correspond à $y \geq 1+x^2$.
c) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à $x^2+2x+y^2 \geq 3$.
d) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
5. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{xy} \leq 1\right\}.$$
a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
b) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
c) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?

6. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x^2-y^2} \geq 1\right\}.$$
a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
b) Si $P_1(x,y)$ avec $x,y > 0$ appartient à l'ensemble, que peut-on dire des points $P_2(-x,y)$, $P_3(-x,-y)$, $P_4(x,-y)$ à propos de leur éventuelle appartenance à l'ensemble ?
c) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
d) Quel est le signe de la fraction $\dfrac{1}{x^2-y^2}$? Que peut-on en déduire ?
e) Dans le premier quadrant, hachurer l'ensemble des points correspondants à $\dfrac{1}{x^2-y^2} \geq 1$.
f) Dans une autre couleur, hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
7. Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.



a) Donner les coordonnées cartésiennes des sommets du triangle ABO.
b) Déterminer les équations cartésiennes des droites AB, BO et AO.
c) Décrire analytiquement l'ensemble E comme dans les exercices ci-dessus.
d) Quel est l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ?
e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
f) Donner une description analytique de E autre que celle donnée en c) en se servant des deux items précédents.
g) Quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, peut-on donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ? Si oui, le donner. Si non, que doit-on faire ?
i) Donner une description analytique de E autre que celles données en c) et en f) en se servant des deux items précédents.

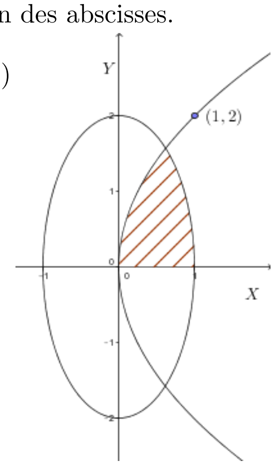
8. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B si

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x-2 \leq y \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 4\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

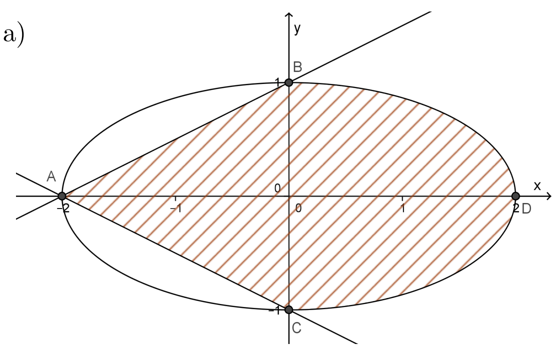
Pour chacun de ces 2 ensembles,
a) déterminer leur ensemble X (respectivement Y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées)
b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans X (resp. Y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points
c) donner 2 descriptions analytiques en se servant des 2 items précédents.

9. Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.

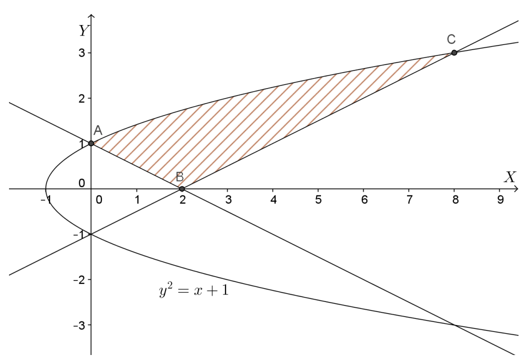
b)



a)



c)



10. On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \sin(2x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$

Liste 6 : nombres complexes

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Les nombres complexes

1. Définir un nombre complexe puis en donner sa notation pratique.
2. Définir a) les parties réelle et imaginaire, b) le conjugué, c) le module d'un nombre complexe.
3. Dans le plan complexe,
   a) quelle est l'interprétation graphique du module d'un nombre complexe ?
   b) que dire de la représentation d'un nombre complexe et de son conjugué ?
4. Que peut-on dire des puissances naturelles de i ?
5. Si z est un nombre complexe non nul, comment rendre réel le dénominateur de $\frac{1}{z}$?
6. Si $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, en donner la forme trigonométrique.
   Quel lien peut-on faire avec les coordonnées polaires ?
7. Quelles différences y a-t-il entre la résolution et les solutions d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$?

Préambule

Cette liste concerne essentiellement les nombres complexes ; une introduction et les notions fondamentales ont été présentées au cours, de même que des exercices de base. Il est important de pouvoir manipuler les liens qui existent entre la trigonométrie et les opérations définies au sein de l'ensemble des complexes.

Cette liste présente également encore des descriptions d'ensembles, dont la manipulation est régulière tout au long de l'année (et aussi dans les années suivantes !)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.1(4), I.3(4) et I.4(2) seront résolus par l'assistant.

I. Exercices de base sur les nombres complexes

1. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$$i + 1, \quad (-i + 1)(-1 - 2i), \quad \frac{1}{-i + 1}, \quad \frac{i^7}{i - 1}, \quad (1 - i)^2$$

2. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$$-i, \quad i + 1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i).$$

3. On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫) en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha), \quad \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}, \quad (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)), \quad \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha).$$

4. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)

(1) $z^2 + 8 = 0$ (2) $27z^3 + 1 = 0$ (3) $z^2 + 2 = iz$ (4) $z^2 - z + 1 + i = 0$ (5) $z^2 - (1-2i)z = 1 + i$

II. Divers

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1, telles que $0 < x_1 < y_1$. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ de 30° dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine O. En fonction des coordonnées de P_1, déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité P_2 du vecteur obtenu après rotation.
a) Représenter graphiquement la situation.
b) En faisant appel à la trigonométrie, écrire les coordonnées de P_1 sous une autre forme.
c) En déduire les coordonnées de P_2.
d) Donner les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1.
e) Interpréter cet exercice en utilisant les nombres complexes.

2. Représenter graphiquement l'ensemble des complexes z qui vérifient $|z - 2| \leq 1$.

3. On donne l'ensemble A suivant du plan. Décrire cet ensemble à l'aide des coordonnées polaires.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9, x < 0, y < 0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 3, \Re z < 0, \Im z < 0\}.$$

Liste 7 :
Éléments de base relatifs aux fonctions

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

Eléments de base relatifs aux fonctions

1. A partir du graphique d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ comment représenter le graphique de
   a) $g : x \mapsto |f(x)|$
   b) $h : x \mapsto -f(x)$
   c) $i : x \mapsto f(x+a)$ (envisager $a > 0$ et $a < 0$)
   d) $i : x \mapsto f(x) + a$ (envisager $a > 0$ et $a < 0$)
2. Soit une fonction f. Définir
   a) le domaine de définition de f
   b) l'image de f
   c) une fonction f paire (respectivement impaire)
   d) une fonction f périodique
   e) une fonction f injective, surjective, bijective
3. Comment représenter le graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$?
4. a) A quelle condition une fonction admet-elle une fonction inverse ?
   b) Si cette condition n'est pas satisfaite, que doit-on faire si on veut quand même définir une fonction inverse ?
   c) Si une fonction admet une fonction inverse, définir cette dernière.
   d) Que peut-on dire des représentations graphiques de 2 fonctions inverses l'une de l'autre ?
5. Donner le domaine de définition de chacune des fonctions élémentaires.
6. Définir une fonction composée et représenter schématiquement la composition.

Préambule

Cette liste concerne les éléments de base relatifs aux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 2(3), 3(2), 4(g) et 6 seront résolus par l'assistant.

Exercices sur les éléments de base relatifs aux fonctions

1. Représenter graphiquement les fonctions données explicitement ci-dessous, toutes définies sur $\mathbb{R}$

$$f_1(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad f_2(x) = |-x^2 + 2x + 3|$$

$$f_3(x) = -f_1(x), \quad f_4(x) = f_1(x-1), \quad f_5(x) = f_1(x) + 2.$$

2. Déterminer les domaines de définition, la parité, la périodicité et le graphique des fonctions données explicitement ci-dessous

$$f_1(x) = \cos(\pi x),\ f_2(x) = |\sin(x)|,\ f_3(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right),\ f_4(x) = \text{arcos}(x),\ f_5(x) = \text{arcos}(\cos(x)).$$

3. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image (x est une variable réelle). Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe ; au besoin, réduire le domaine de définition pour pouvoir en définir une. Représenter alors f et son inverse dans le même repère orthonormé.

$$f_1(x) = x - 1, \quad f_2(x) = -x^2, \quad f_3(x) = \frac{-1}{x}, \quad f_4(x) = |x+2|.$$

4. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous. Dans les cas (b), (c), (g) et (h), mentionner de quelles fonctions élémentaires chacune de ces fonctions est la composée

$$(a)\ \frac{1}{2-|x+1|}, \quad (b)\ \ln(-x^2-2x+3), \quad (c)\ \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}, \quad (d)\ \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, \quad (e)\ \ln(e^x-1)$$

$$(f)\ \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), \quad (g)\ \arcsin(x^2-1), \quad (h)\ \operatorname{arcotg}(\ln(x))$$

5. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de ln et de l'exponentielle).

$$\ln(-x), \quad -\ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |-\ln(x)|, \quad -\exp(x), \quad \exp(x+1), \quad (\exp(x))+1.$$

6. On donne la fonction $f : y \mapsto f(y) = g(\arcsin(y-2))$ et la fonction g définie sur $[0,2]$.
a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Si elle existe, que vaut l'image de 2 par f sachant que $g(0) = 3,\ g(1) = 4$ et $g(2) = 7$?

7. a) Déterminer le domaine de définition de f si $f : x \mapsto f(x) = g(\sqrt{5x-x^2})$ et si g est défini sur $[-1,2]$.
b) Si elle existe, que vaut l'image de $\frac{9}{2}$ par f sachant que $g(\frac{1}{2}) = -5,\ g(1) = \sqrt{3}$ et $g(\frac{3}{2}) = \sqrt{2}$?

Liste 8 :

DÉCOMPOSITION EN FRACTIONS SIMPLES ET MANIPULATION DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie.)

I. Décomposition en fractions simples

1. Définir la division de 2 polynômes.
2. Définir
   a) fraction rationnelle
   b) fraction rationnelle propre
   c) fraction rationnelle simple
3. Quel est le processus à suivre pour décomposer une fraction rationnelle en une somme de fractions simples ?

II. Manipulation des fonctions élémentaires

1. Définir les fonctions trigonométriques inverses.
2. Donner la propriété faisant intervenir une somme et un produit
   a) pour l'exponentielle
   b) pour le logarithme népérien

Préambule

Cette liste concerne
— les décompositions en fractions simples (utilisées notamment pour la primitivation et le calcul intégral)
— et toujours ... les fonctions élémentaires et la manipulation de leurs valeurs et propriétés standards

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.(3, 6) et II(5) seront résolus par l'assistant.

I. Décomposition en fractions simples

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

$$(1)\ \frac{1}{x^2-4x+4},\qquad (2)\ \frac{x}{-x^2+2x+3},\qquad (3)\ \frac{x^3}{x^3+1}$$

$$(4)\ \frac{x^2+1}{3x+1},\qquad (5)\ \frac{x^2-2}{x^2+2},\qquad (6)\ \frac{2}{x(x^2-4x+4)}$$

$$(7)\ \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1},\qquad (8)\ \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\qquad (9)\ \frac{-2}{(x^2+1)(x+1)^2}$$

II. Manipulation des fonctions élémentaires

Si elles sont définies, simplifier les expressions suivantes au maximum

$$(1)\ \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+\ln\left(\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)^2\right),\quad (2)\ \operatorname{tg}\left(\ln(e^{3\pi}/2)\right),\quad (3)\ \exp(3\ln(2e)),\quad (4)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$(5)\ \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right),\ (6)\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ (7)\ \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ (8)\ \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right).$$

Liste 9 : limites, continuité et dérivation

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

I. Limites des valeurs des fonctions

1. Si on calcule la limite d'une fonction
   a) en un réel, quelle condition doit-il satisfaire ?
   b) à gauche (resp. à droite) d'un réel, quelle condition doit-il satisfaire ?
   c) en l'infini, quelle condition le domaine de définition de la fonction doit-il satisfaire ?
   d) Même question pour une limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Si cette condition est satisfaite alors le calcul de la limite peut être envisagé ; sinon, le calcul n'a pas de sens. Attention, ce n'est pas parce qu'on peut envisager de calculer une limite que la limite existe toujours !
2. Enoncer le théorème de l'étau pour une limite en un réel ainsi que pour une limite en l'infini.
3. Enoncer le théorème de la limite des fonctions composées.
4. Qu'appelle-t-on indétermination et quels sont les différents cas d'indétermination ?
5. Quel est le processus à suivre dans le cas d'un calcul de limite ?
6. Comment calcule-t-on la limite en $-\infty$ (resp. en $+\infty$)
   a) d'un polynôme ?
   b) d'une fraction rationnelle ?
7. Comment lève-t-on une indétermination du type "$\frac{0}{0}$" dans le cas d'une fraction rationnelle ?

II. Continuité et dérivation

1. Quand dit-on qu'une fonction est continue en un point de son domaine ?
2. A quelle(s) condition(s) une fonction composée est-elle continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$?
3. Donner les domaines de continuité des fonctions élémentaires.
4. (a) Quand dit-on qu'une fonction est dérivable en un point de son domaine ?
   (b) Que vaut alors sa dérivée en ce point ?
5. Quelle interprétation graphique peut-on donner de la dérivée d'une fonction en un point de son domaine de dérivabilité ?
6. Donner une équation cartésienne de la tangente au graphique de f en son point d'abscisse x_0 si f est dérivable en ce point.
7. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?
8. (a) A quelle(s) condition(s) une fonction composée est-elle dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$?
   (b) Que vaut alors sa dérivée sur cet intervalle ?
9. Donner les domaines de dérivabilité des fonctions élémentaires ainsi que leurs dérivées.
10. Donner les énoncés des théorèmes de dérivation
    (a) d'une combinaison linéaire de fonctions.
    (b) d'un produit de 2 fonctions.
    (c) d'un quotient de 2 fonctions.
11. Quel est le lien entre la dérivée d'une fonction (resp. sa dérivée seconde) et sa croissance (resp. sa concavité) ?
12. Quel est le processus à suivre pour calculer la dérivée d'une fonction f
    (a) en tout point de son domaine de dérivabilité ?

(b) en un point x_0 de son domaine de dérivabilité ?

Préambule

Cette liste concerne les limites et la dérivation des fonctions (et des applications)

Ces notions et leurs propriétés sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles.

En voici un exemple élémentaire. La loi de chute libre des corps (mise en évidence déjà par Galileo Galilei, 1564-1642, à la fin du XVIeme siècle) affirme que lorsqu'on lâche un corps près de la surface de la Terre, la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps durant lequel on le laisse tomber. Si on néglige la résistance de l'air, la distance y est donnée par $y = 16\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en pieds, et par $y = 4,9\ t^2$ lorsqu'elle est mesurée en mètres [2]. Ainsi, la vitesse moyenne pendant les deux premières secondes est

$$\frac{16.2^2 - 16.0^2}{2} = 32 \text{ pieds par seconde}$$

et la vitesse moyenne entre la première et la deuxième seconde est

$$\frac{16.2^2 - 16.1^2}{1} = 48 \text{ pieds par seconde}$$

Si on s'intéresse plutôt à la vitese « instantanée » au temps t_0, on est amené à calculer les quotients

$$\frac{16.(t_0 + h)^2 - 16.t_0^2}{h}$$

pour des valeurs de h de plus en plus petites. Cela conduit bien sûr à la notion de *dérivée* de la fonction $t \mapsto y(t)$ en t_0...

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.2(a, c), I.3(5) et II.2(e), 3(a,b) seront résolus par l'assistant.

I. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

1. On a
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$
Exprimer mathématiquement explicitement la définition qui « se cache » derrière cette succession de symboles (qui « résument » en fait la définition) et en donner une interprétation graphique.

2. Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire les quelques limites suivantes par application du théorème de la limite des fonctions composées
$$(a)\ \lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad (b)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\ln(x^2)}, \quad (c)\ \lim_{x \to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

2. attention donc aux lois trouvées dans diverses références ! Prendre garde aux unités de mesure, au SI, etc

3. Calculer (si possible) les limites suivantes, ***sans appliquer le théorème de l'Hospital***

(1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2-4}$	(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-2x)$	(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^6}}{x^3}$
(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{cotg}(x)}{\sin(3x)}$	(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+2x^2}-\sqrt{2x^2+3}\right)$	(6) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \ln(\operatorname{arctg}(x))$
(7) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{\lvert 1-x\rvert}$	(8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+5x}{x^2+3}$	(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{\sin(2x)}$
(10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\lvert -x+\pi\rvert)$	(11) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(3x+2)-\ln(3x))$	(12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-2x}{2x^2-1}$
(13) $\lim\limits_{y\to+\infty} \log_y(3)$	(14) $\lim\limits_{u\to-\infty} u\, e^{\frac{1}{u-1}}$	(15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left(-\dfrac{1}{x+2}\right)$

II. Continuité et dérivation

1. En appliquant la définition, montrer que $f : x \mapsto 3x^2 + x$ est dérivable en 1 et donner la valeur de sa dérivée en ce point.
2. α) On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$(a)\sqrt[5]{3x^2+1}$	$(b)\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$	$(c)\dfrac{1}{3x^2+6x+3}$	$(d)\operatorname{arctg}(\cos(x))$	$(e)\sqrt{\sin(2x)}$	$(f)\sin(\operatorname{cotg}(x))$
$(g)e^{\arccos(x)}$	$(h)e^{e^x}$	$(i)\ln(x^4)$	$(j)\ln(x^2+x-2)$	$(k)(\ln(4))^x$	$(l)x\lvert x\rvert$

β) Représenter la fonction $x \mapsto x|x|$ dans un repère orthonormé.

3. On donne la fonction g dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction $f : t \mapsto f(t) = g(\ln(t-1))$.
   a) Déterminer le plus grand ouvert dans lequel f est dérivable.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction de la dérivée de g.
   c) Mêmes questions si g est dérivable sur $]0,4[$ et si f est la fonction $y \mapsto f(y) = g(\sqrt{y^2-4})$.
   d) Mêmes questions si g est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et si f est la fonction $a \mapsto f(a) = g(\arcsin(\sqrt{1-a}))$.
4. Soit $F : t \mapsto F(t) = f(x(t))$ avec $x(4) = 3$, $Dx(4) = -2$ et $(D_x f)(3) = 5$. En supposant F dérivable en 4, que vaut $(DF)(4)$?

Liste 10 :

Étude de fonctions et application du théorème de l'Hospital

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

I. Etude d'une fonction

1. Etapes d'une étude de fonction :
   (a) Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité.
   (b) Examiner si la fonction est paire, impaire, périodique.
   (c) Déterminer les zéros de la fonction.
   (d) Etudier la fonction aux extrémités du domaine de définition de la fonction (limites, asymptotes).
   (e) Etudier la monotonie (étude du signe de la dérivée première) et la concavité (étude du signe de la dérivée seconde) de la fonction.
   (f) Construire un tableau reprenant tous les renseignements obtenus ci-dessus.
   (g) Représenter le graphique de la fonction sans oublier de mentionner le nom des axes et les unités sur chacun d'eux.
2. Comment détermine-t-on l'existence ou non d'une asymptote
   (a) verticale en un point ?
   (b) horizontale en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ?
   (c) oblique en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ?

   Dans chaque cas, en donner l'équation cartésienne.

II. Théorème de l'Hospital

1. (a) Quelles sont les hypothèses à vérifier pour l'application du théorème de l'Hospital ?
   (b) Si ces hypothèses sont vérifiées, quelle est la thèse du théorème de l'Hospital ?

ATTENTION : lors de l'application du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to a}\frac{Df(x)}{Dg(x)} = l^+ \textbf{ n'entraîne pas } \text{que } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l^+.$$

Préambule

Cette liste concerne la dérivation des fonctions, et des applications
Elle constitue une suite immédiate de la liste 9.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices II.1(4, 5 et 12) et 3 seront résolus par l'assistant.

I. Etude d'une fonction

1. Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$. Représenter cette fonction et cette tangente.
2. Représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 suivantes

$$f_1(x) = \frac{-x - x^2 + 1}{2 - x}, \qquad f_2(x) = xe^{-3x}.$$

II. Théorème de l'Hospital

1. Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x})$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{\operatorname{arctg}(x^2+2)}$

(7) $\displaystyle\lim_{t\to 1^+} (1-t)\ln(t^2-1)$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$ (9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(\ln(|2-x|) - \ln(x^2)\big)$ (11) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$

(13) $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{u^2}{e^{3u}}$ (14) $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} y\,e^{-y^2}$ (15) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$

2. Une lentille convexe est caractérisée par une distance focale f. Si un objet se trouve à une distance p de la lentille, son image sera à une distance q liée à p par la relation $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, quelle est la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm ?

3. Démontrer par récurrence que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = +\infty$$
avec $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ en admettant que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.[3]
En déduire que
$$\lim_{x\to-\infty} (x^n e^{ax}) = 0.$$
On résume ces 2 propriétés en disant que " à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x".

3. Cette limite sera établie dans le cours 'Mathématiques générales (partim B)".

Liste 11 : primitivation (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert A de $\mathbb{R}$. Qu'appelle-t-on primitive de f sur A ?
2. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction admette une primitive.
3. (a) Une fonction primitivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plus d'une primitive ?
   (b) Si oui, existe-t-il un lien entre elles ? Lequel ?
4. Quelles sont les primitives immédiates ?
5. Soit G une fonction définie par $G(x) = af(x) + b\,g(x)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et où f et g sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
   (a) Quelles sont les conditions pour que G soit primitivable sur I ?
   (b) Que vaut alors une primitive de G sur I ?
6. Soit G une fonction définie par $G(x) = f(x)Dg(x)$ où f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et où g est une fonction dérivable sur I.
   (a) Quelles sont les conditions pour que G soit primitivable sur I ?
   (b) Que vaut alors une primitive de G sur I ?
7. Soit G une fonction définie par $G(x) = f(g(x))Dg(x)$ où f est une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et g est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
   (a) Quelles sont les conditions pour que G soit primitivable sur I ?
   (b) Que vaut alors une primitive de G sur I ?
8. Qu'est-ce qu'un changement de variables ?
9. Citer l'énoncé du théorème de primitivation par changement de variables.
10. (a) Quelles sont les différentes techniques de primitivation ?
    (b) Dans quel cas applique-t-on chacune d'entre elles ?
11. Quel est le processus à suivre pour calculer une primitive ?

Préambule

Cette liste concerne les primitives de fonctions.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 1.(1, 9, 11, 14) et 2.(1) seront résolus par l'assistant.

1. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle dans lequel on travaille.

(1) $\sqrt{1-2x}$	(2) $x^3 + x\sin(2x)$	(3) $x^3\sin(3x^4)$	(4) $\cos^2(3x)$
(5) $x\ln(2x+1)$	(6) $\arcos(x)$	(7) $\sqrt{x}\ln(x)$	(8) $(3x-4)e^{-x}$
(9) $x\sin^2(3x)$	(10) $x\sqrt{1+3x^2}$	(11) $\sin(\pi x)\ e^{2x}$	(12) π^x
(13) x^π	(14) $\dfrac{1}{8x^3+2x}$	(15) $\dfrac{1+3x}{2x+1}$	(16) $\dfrac{1}{1-2x+x^2}$

2. (1) Que vaut la primitive de $x \mapsto 2x^2+1$ qui prend la valeur 3 en -1 ?
   (2) Que vaut la primitive de $y \mapsto \cos(3y)$ qui prend la valeur 2 en $\frac{\pi}{2}$?

Liste 12 : primitivation (2)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 1.(3, 5, 6) seront résolus par l'assistant.

Primitivation

1. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier les intervalles dans lesquels on travaille.

$(1)\,\dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad(2)\,\dfrac{\sin^3(x)-1}{\sin^2(x)}$ $\quad(3)\,x\,\mathrm{arctg}(x)$ $\quad(4)\,x\ln(x^2)$ $\quad(5)\,\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

$(6)\,\dfrac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$ $\quad(7)\,\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ $\quad(8)\,\dfrac{x^5}{x^3-1}$ $\quad(9)\,\dfrac{2x^2+6x-1}{(x^2+1)(x+2)}$ $\quad(10)\,\dfrac{3x^2-2x-1}{(x^2+1)(x+2)}$

2. Sans effectuer la primitivation, montrer que l'égalité suivante est correcte et préciser les intervalles dans lesquels on travaille.

$$\int \frac{1-2x}{(1-x)(x-2)}\,dx \simeq \ln\left(\left|\frac{(x-2)^3}{1-x}\right|\right)$$

Liste 13 :
calcul intégral sur un ensemble borné fermé

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

I. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. Définir une fonction intégrable sur $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. Définir l'intégrale de f sur $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction soit intégrable sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$.
4. Comment les primitives permettent-elles de calculer une intégrale ?
5. Citer l'énoncé du théorème d'intégration par variation de primitives

II. Calcul d'aires

Quelle est l'interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive (resp. négative) sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$?

Préambule

Cette liste concerne l'intégration de fonctions d'une variable réelle

Cette notion et ses propriétés sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles.

En voici un exemple élémentaire. On suppose que $T = f(t)$ est la température relevée au temps t dans une station météo. La station effectue des mesures toutes les heures, durant 24h. Pour avoir une idée de la température pour un jour donné, on peut bien sûr prendre par exemple six températures dans des intervalles de temps de 4h, à savoir $T_1 = f(4)$, $T_2 = f(8)$, $T_3 = f(12)$, $T_4 = f(16)$, $T_5 = f(20)$, $T_6 = f(24)$ et en chercher la moyenne

$$T_{moyen} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{6}.$$

Cette façon de procéder peut ne pas refléter de manière satisfaisante ce qui s'est vraiment passé car il est bien sûr possible que de brèves perturbations se produisent dans un laps de temps qui n'est pas pris en compte par nos calculs (par exemple orage soudain entre T_2 et T_3).

La fonction « température » étant continue, il semble raisonnable de *définir la valeur moyenne* de cette température en prenant une « limite de moyennes quand le nombre d'échantillons devient grand ». Une définition correcte de ce processus consiste ainsi à définir

$$T_{moyen} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)$$

où $t_j = j\ \frac{24}{n}$. En posant $t_0 = 0$, on a donc

$$T_{moyen} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_j) = \frac{1}{24} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})\ f(t_j) = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)\ dt.$$

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.1(a), I.2(2, 12) et II.1 seront résolus par l'assistant.

I. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que
   (a) si f est une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
   (b) si f est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

(1) $\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x)\ dx$	(2) $\int_{-1}^{1} xe^{x}\ dx$	(3) $\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx$
(4) $\int_{1/2}^{3} \sqrt{3 + \frac{x}{2}}\ dx$	(5) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(x)\ dx$	(6) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{cotg}^2(x)\ dx$
(7) $\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx$	(8) $\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\ dx$	(9) $\int_{-1}^{4} \frac{x+1}{x+2}\ dx$
(10) $\int_{-1}^{1} \mathrm{arctg}(x)\ dx$	(11) $\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\ dx$	(12) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$

II. Calcul d'aires

1. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x, y) : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], y \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(x) \leq y \leq \sin(2x)\right\}.$$
   Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\{(x, y) : x \in [-2, 1],\ y \in [x - 1, 1 - x^2]\}.$$
   Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

LISTE 14 :

CALCUL INTÉGRAL SUR UN ENSEMBLE NON BORNÉ FERMÉ

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $b = +\infty$).
   (a) Donner la définition de l'intégrabilité de f sur $[a, b[$.
   (b) Que devient-elle si f est positive (resp. négative) sur $[a, b[$?
   (c) Donner la définition de l'intégrale de f sur $[a, b[$ si f y est intégrable.
2. Soit $s \in \mathbb{R}$. Quand la fontion f définie par $f(x) = 1/x^s$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$ (resp. sur $[1, +\infty[$) ?
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $b = +\infty$).
   (a) Citer le(s) critère(s) d'intégrabilité pouvant être utilisé(s) pour prouver l'intégrabilité de f sur $[a, b[$
   — lorsque $b \in \mathbb{R}$
   — lorsque $b = +\infty$
   (b) Citer le(s) critère(s) pouvant être utilisé(s) pour prouver la **non** intégrabilité de f sur $[a, b[$
   — lorsque $b \in \mathbb{R}$
   — lorsque $b = +\infty$
4. Quels sont les principales techniques d'intégration ?
   Citer l'énoncé du théorème d'intégration
   (a) par parties.
   (b) par changement de variables.

Préambule

Cette liste concerne l'intégration de fonctions d'une variable réelle

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices (3), (5), (7) et (9) seront résolus par l'assistant.

Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\, dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(|x|)\, dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\, dx$

(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\, dx$

(6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\, dx$

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$

(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\, dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\, e^x\, dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{2x}\, dx$

Liste 15 :

calcul intégral

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

Divers

Soit un réel x pour lequel $\text{tg}(x/2)$ existe. Déterminer l'expression de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ en fonction de $\text{tg}(x/2)$

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I (5,6) et II (2,3) seront résolus par l'assistant.

I. Intégrabilité

Justifier l'intégrabilité éventuelle des intégrales suivantes

$$(1)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx \qquad (2)\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad (3)\ \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2(x)+2\sin^2(x)}\, dx$$

$$(4)\ \int_0^{\pi/2} \text{tg}(x)\, dx \qquad (5)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx \qquad (6)\ \int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\sin(x)\, dx$$

II. Calcul d'intégrales

Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$(1)\ \int_{-\pi/4}^{0} \text{tg}(x)\, dx, \qquad (2)\ \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+x}\, dx.$$

$$(3)\ \int_0^1 \ln(x)\, dx, \qquad (4)\ \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{x}\ \ln^2(x)\, dx,$$

$$(5)\ \int_0^1 \arcsin(x)\, dx, \qquad (6)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx.$$

III. Divers

En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est $\varphi \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, est donnée par

$$y(\varphi) = R\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos(u)} du.$$

Montrer que

$$y(\varphi) = R\ \ln\left(\left|\text{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right).$$

Liste 16 : équations différentielles ($1^{\text{ère}}$ partie)

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

1) Définir une EDLCC[4] d'ordre 1.
2) Donner l'équation homogène associée à cette équation.
3) Donner l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.
4) Donner l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène.
5) De combien de constantes arbitraires les solutions dépendent-elles ?
6) Répondre aux mêmes questions pour une EDLCC d'ordre 2.

Préambule

Cette liste concerne
— les équations différentielles

Les équations différentielles sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles. En voici un exemple.

Soient x et y les tailles de deux organes d'un même animal (considérées comme fonction du temps). Les données empiriques montrent que les taux de croissance spécifiques, à savoir

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}D_t x(t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}D_t y(t)$$

peuvent être considérés comme approximativement proportionnels. Cela signifie qu'il existe une constante non nulle k telle que

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} = k\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

En considérant que y est fonction de x, en utilisant la dérivation des fonctions de fonctions et en supposant que $\frac{dx}{dt}$ n'est pas nul, on a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dt}$$

donc (1) devient

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x} \qquad (2)$$

Cette équation est « à second membre séparé » et aussi « linéaire » ; elle peut être résolue par des méthodes directes (qui sont notamment présentées dans les notes de cours). Sa solution générale s'écrit

$$y = Cx^k$$

pour une certaine constante C (on parle de relation « allométrique »).

Il existe de nombreux types d'équations différentielles. Les méthodes de résolution ne sont pas toujours évidentes ni aisées à manipuler, sauf dans le cas des équations différentielles *linéaires à coeffcients constants*. Il est donc très important d'être capable de les reconnaître.

Tout ceci est abondamment illustré notamment dans les notes, où une attention toute particulière est accordée également à l'évolution des populations (en présence ou non de facteurs limitants).

4. abréviation pour "équation différentielle linéaire à coefficients constants"

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I (1, 3) et II (1) seront résolus par l'assistant.

I. Quelques manipulations

1. Si l'équation différentielle $(D_t y)^2 = 2y$ admet 2 solutions distinctes non nulles, peut-on affirmer qu'une combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de cette équation ?

2. Montrer que la fonction $g(t) = 3t^2 - 6t + 2,\ t \in \mathbb{R}$, vérifie le système $\begin{cases} (D_t y)^2 = 12(y+1) \\ y(0) = 2 \\ y(2) = 2 \end{cases}$

3. Montrer que[5] la fonction $g(t) = \operatorname{cotg}(t) - \dfrac{1}{\sin(t)},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation $2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = -1$.

4. Montrer que la fonction $u : x \mapsto C_1\, e^{C_2 x},\ x \in \mathbb{R}$, C_1 et C_2 étant des constantes complexes arbitraires, vérifie l'équation différentielle $v(x)D^2v(x) - (Dv(x))^2 = 0$.

5. Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{tg}(x) + \dfrac{1}{\cos(x)},\ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation différentielle

$$2Df - f^2 = 1.$$

II. Equations différentielles, résolutions

Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

1) $4Df(x) + 2if(x) = 0$	2)$D^2 f(t) = 2f(t)$
3)$D^2 f(u) = 0$	4) $D^2 f(x) + Df(x) - 2f(x) = 0$
5) $4D^2 f(x) - f(x) = 0$	6) $D^2 f(x) + f(x) = 0$

5. Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2 f}{dx^2}$

LISTE 17 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ($2^{\text{ÈME}}$ PARTIE)

A préparer AVANT de venir à la répétition

(Lors de la répétition, vous serez interrogé sur ces points de théorie)

1. Quelle est la forme générale de toute solution d'une EDLCC ?
2. a) Qu'appelle-t-on "méthode des exponentielles polynômes" ?
   b) Comment détermine-t-on une solution particulière dans ce cas pour une équation d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
   c) Si le second membre n'est pas une exponentielle polynôme, quels cas particuliers peut-on envisager pour quand même utiliser cette méthode ?
3. a) Qu'appelle-t-on "méthode de variation des constantes" ?
   b) Comment détermine-t-on une solution particulière dans ce cas pour une équation d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
4. Quel est le processus à suivre pour résoudre une EDLCC ?

Préambule

Cette liste concerne les équations différentielles

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 1(3 - 4 - 5) seront résolus par l'assistant.

Equations différentielles, résolutions

1. Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille (pour l'équation 3, en donner aussi les solutions réelles)

$$1)\ D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = e^x + 4x^2e^{2x} + 1$$

$$2)\ 4D^2f(x) - f(x) = \cos^2(x) - \tfrac{1}{2}$$

$$3)\ D^2f(x) + f(x) = x\,e^{2x}$$

$$4)\ D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = (2 + \cos(x))e^{-x}$$

$$5)\ \ Df(x) - f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

$$6)\ \ Df(x) - 2f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

2. Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle

$$Dy(t) = k(y(t) - y_0)$$

où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée ≪ Newton's law of cooling ≫ et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.

Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

LISTE 18 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ($3^{\text{ÈME}}$ PARTIE)

Préambule

Cette liste concerne
— les équations différentielles

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I (4) et II. 2 seront résolus par l'assistant.

I. Equations différentielles, résolutions

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles

(1) $D^2f(x) - f(x) = 1 + x^2$, (2) $9D^2f(x) - Df(x) = 1$
(3) $D^2f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}$, (4) $D^2f(x) + 4f(x) = \sin(4x)$

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants, du second ordre, avec conditions initiales

1. Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille
$$\begin{cases} 4D^2f(x) + f(x) = x^2 + x + 2 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 2 \end{cases}$$
2. Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.
$$2D^2f(x) + Df(x) = 2x$$
Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

III. Divers

1. Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement, cette population sera-t-elle triple sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?
2. La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est de 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s^2. Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?
3. Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle
$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$
4. Soit L la longueur d'un pendule et soit T sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant T et L est l'équation différentielle
$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$
Montrer que cela implique que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

Chapitre 3

Révisions

3.1 Exercices de base sur le chapitre 1 (partim A)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. Résoudre les équations suivantes.

   1) $3x + \frac{7}{3} = -4x$ 3) $(2x-1)^2 = (-x+3)^2$
   2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 4) $|x-2| = |-x+1|$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

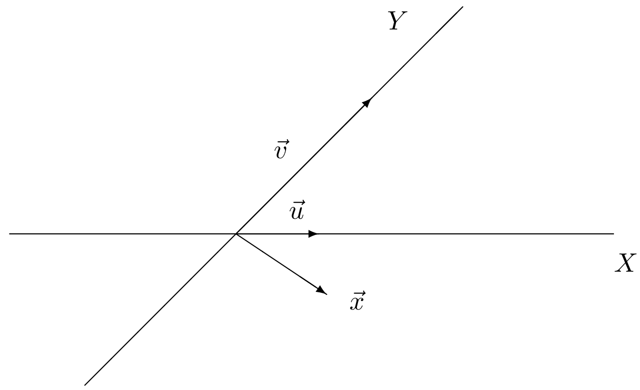
   1) $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$
   2) $\dfrac{(x-1)\ (2x+3)^3}{2x+1} \geq 0$
   3) $0 < \dfrac{x}{2x-1} \leq 1$
   4) $|2x+1| > 3$
   5) $|x|(x+1) \geq -x+2$

3. Calculer
$$\sqrt{(-4)^2},\quad \sqrt[3]{(-8)^2},\quad \sqrt{4x^2},\quad \sqrt[3]{8x^3},\quad \sqrt[3]{-8x^3}.$$

4. Ecrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole sommatoire.
$$1+3+5+7+9+11+13+15,\quad 3-9+27-81+243.$$

5. Que vaut le coefficient du terme en x^{27} dans le développement de $(1-x)^{100}$?
6. Les ensembles suivants admettent-ils une borne inférieure, supérieure ? Si oui, que vaut-elle ? Est-elle réalisée ?
$$[1,\sqrt{3}[,\quad \left\{\frac{(-1)^m}{m} : m \in \mathbb{N}_0\right\},\quad \left\{\frac{1}{1+m^2} : m \in \mathbb{N}_0\right\},\quad [0,\sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}.$$

7. Pouvoir déterminer les composantes de vecteurs d'après une représentation graphique. Pouvoir représenter des vecteurs dont on donne les composantes. Voici un exemple.
   Déterminer (approximativement) les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$.



Dans une base non orthogonale (resp. une base orthonormée) $\vec{u}, \vec{v}$, représenter le vecteur de composantes $(2, -1)$ et le vecteur $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

8. a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d, parallèle à la droite d' d'équation $3x + y - 1 = 0$ et passant par le point A de coordonnées $(2, 3)$. Représenter ces droites dans un repère non orthogonal puis dans un repère orthonormé.

   b) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d, orthogonale à la droite d' d'équation $3x + y - 1 = 0$ et passant par le point A de coordonnées $(2, 3)$. Représenter ces droites dans un repère orthonormé.

   c) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par le point A de coordonnées $(1, 2)$ et le point B de coordonnées $(2, 1)$. Même question mais avec $A(1, 2)$ et $B(1, 3)$.

9. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.

$$i, \quad \frac{1}{i}, \quad i(-i+3), \quad \frac{2i+1}{2i-1}, \quad \frac{2i+1}{-2i+1}.$$

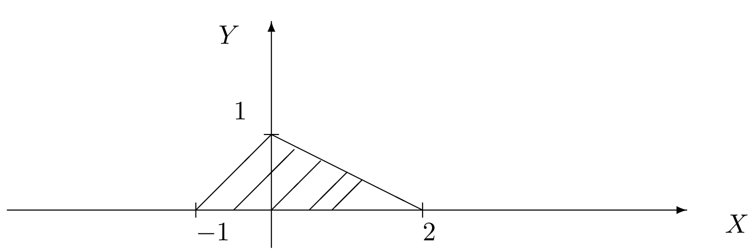
10. QCM (cf exemples d'énoncés dans ce qui suit).

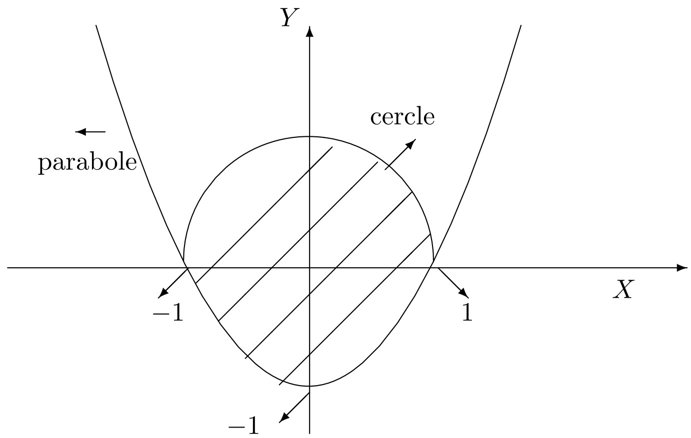
11. Représenter graphiquement les ensembles suivants

$$\begin{array}{ll} \{(x, x^2) \ : \ x \in \mathbb{R}\} & \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = 1\} \\ \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2\} & \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\} \end{array}$$

12. Représenter graphiquement l'ensemble fermé des points du plan borné par le demi cercle centré à l'origine et de rayon 1, par la représentation graphique de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\}$ et qui ont une ordonnée positive.

13. Décrire analytiquement les ensembles fermés hachurés suivants





Liste 2003/2004

1. Résoudre les équations suivantes.

1) $-2x + \frac{7}{5} = -3x$	3) $(x-1)^2 = (-2x+3)^2$	5) $x\|x\|^3 = x^2$
2) $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$	4) $\|x+2\| = \|-x+1\|$	6) $x\|x\| + 2x + 1 = 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

1) $-2x + 3 \geq 0$	4) $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{-x+2}$	7) $\|x\|(-x+2) \leq \|x\|^2 + x$
2) $2x^3 + 5x^2 - 3x \leq 0$	5) $x^2 \geq 4$	8) $x\|x\|^3 \geq x^2$
3) $\dfrac{x^2-3x+2}{(1-x)^3} \leq 0$	6) $\|x-3\| < 2$	9) $\|x-1\|x \geq -x+4$

3. Calculer
$$\sqrt{(-9)^2}, \quad \sqrt[3]{(-3)^3}, \quad \sqrt{2x^2}, \quad \sqrt{2x^4}, \quad \sqrt[3]{8x^3}, \quad \sqrt[3]{-8x^3}.$$

4. Ecrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole sommatoire.
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7, \quad 3 - 9 + 27 - 81 + 243.$$

5. Que vaut le coefficient du terme en x^{27} dans le développement de $(1-x)^{50}$?

6. Les ensembles suivants admettent-ils une borne inférieure, supérieure ? Si oui, que vaut-elle ? Est-elle réalisée ?
$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{\frac{(-1)^{2m}}{m^2} \ : \ m \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad \left\{1 - \frac{1}{m} \ : \ m \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad [-\frac{1}{3}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}.$$

7. Dans le plan, pouvoir déterminer les composantes de vecteurs d'après une représentation graphique. Pouvoir représenter des vecteurs dont on donne les composantes.

8. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On demande
- l'équation de la droite passant par le point de coordonnées $(1, 2)$ et orthogonale à la droite d'équation $2y + 3x + 4 = 0$,
- des équations paramétriques de la droite d'équation $2y + 3x + 4 = 0$,
- l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(1, 2)$ et $(-2, 3)$. Même question mais avec les points de coordonnées $(2, 2)$ et $(2, -7)$.

9. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.
$$i, \quad \frac{1}{i}, \quad i(-i+3), \quad \frac{2i+1}{2i-1}, \quad \frac{2i+1}{-2i+1}, \quad i^3, \quad \frac{1}{i^4}, \quad \frac{1}{-i+1}, \quad \frac{-3i+1}{i-1}$$

10. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

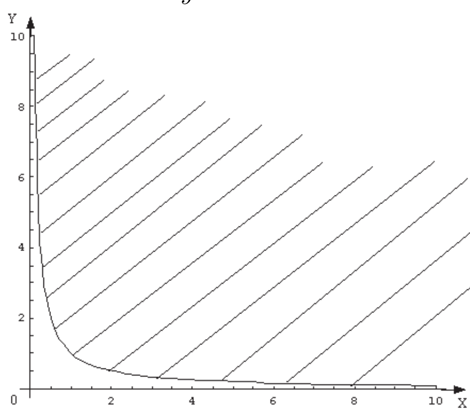
$$2iz + 3 = 0, \quad z^2 + 4 = 0, \quad z^2 + z + 1 = 0.$$

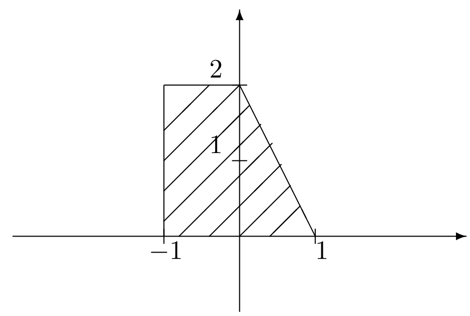
11. Représenter graphiquement les ensembles suivants

$$\{(x, 1 - x^2) \;:\; x \in \mathbb{R}\} \qquad \{(x, y) \;:\; x, y \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$$
$$\{(x, y) \;:\; x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq 1\} \qquad \{(x, y) \;:\; x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$$

12. Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan situés à l'intérieur du cercle centré au point de coordonnées $(0, 1)$, de rayon 2, et dont l'ordonnée est plus grande ou égale au carré de l'abscisse.

13. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants (dans le premier graphique, l'équation de la courbe est $xy = 1$ et cette courbe fait partie de l'ensemble)





14. Résoudre les systèmes suivants

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -4x + z = 0 \end{cases}, \quad 4) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -4x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

15. QCM

(a) En électricité, on trouve la formule $\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Alors la valeur de a est
$a = R - b$☐ $\quad a = \frac{R}{b}$☐ $\quad a = \frac{Rb}{R+b}$☐ $\quad a = \frac{1}{R-b}$☐ $\quad a = \frac{Rb}{b-R}$☐ $\quad$ aucune réponse correcte☐

(b) Si a est un réel, alors $\sqrt[4]{a^4}$ vaut toujours $\quad a$☐ $\quad -a$☐ $\quad \pm a$☐ $\quad$ aucune réponse correcte☐

(c) Si a est un réel, alors $\sqrt[3]{-a^9}$ vaut toujours a^3☐ $\quad -a^3$☐ $\quad \pm a^3$☐ $\quad$ aucune réponse correcte☐

(d) L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2$ est l'ensemble
$[-1, 1[$☐ $\quad \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$☐ $\quad]-1, 1[\setminus\{0\}$☐ $\quad]-\infty, 1[$☐ $\quad$ aucune réponse correcte☐

(e) La valeur absolue de la différence entre deux réels est toujours
inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels☐
supérieure ou égale à la valeur absolue de la somme entre ces réels☐
supérieure ou égale à la valeur absolue de la différence entre les valeurs absolues de ces réels☐
supérieure ou égale à la moitié du produit entre ces réels☐
aucune réponse correcte☐

(f) L'ensemble $\mathbb{Z} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$
admet une borne inférieure réalisée et une borne supérieure réalisée ☐
admet une borne inférieure réalisée et une borne supérieure non réalisée☐
n'admet pas de borne inférieure mais bien une borne supérieure non réalisée☐
n'admet pas de borne inférieure mais bien une borne supérieure réalisée☐
aucune proposition correcte☐

(g) Le carré d'un nombre complexe est toujours $\quad$ un nombre positif☐ $\quad$ un nombre négatif☐
un nombre imaginaire pur☐ $\quad$ aucune réponse correcte☐

(h) La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
au produit des parties réelles de ces nombres☐
à la somme des parties réelles de ces nombres☐
à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre☐
au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre☐
aucune réponse correcte☐

(i) Le conjugué du complexe $\frac{i}{i+1}$ est $\frac{-i}{i+1}$☐ $\frac{i}{-i+1}$☐ $\frac{-i}{-i+1}$☐ aucune réponse correcte☐

(j) Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$ Vrai☐ Faux☐

Liste 2004/2005

1. Résoudre les équations suivantes.

$$1)\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}x \qquad 2)\ 4x^3 - x = 0 \qquad 3)\ (-2x+1)^2 = 2x - 1 \qquad 4)\ |2x+1| = |-x|$$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

$$1)\ \frac{1}{2x+4} > \frac{1}{-x+2} \qquad 3)\ |2x-3| < 2 \qquad 5)\ |x - x^2| \geq 2$$

$$2)\ 4x^2 \leq x^4 \qquad 4)\ |x - \sqrt{2}|\ (x + \sqrt{2}) \leq |x| \qquad 6)\ \frac{1}{|-x+1|} < \frac{1}{x^2+x-2}$$

3. Calculer $\sqrt{(-13)^4}$, $\sqrt[3]{(-1)^3}$, $\sqrt{8x^2}$, $\sqrt[3]{-27x^6}$, $\sqrt[3]{(-x)^3}$, $|x^3|$, $|-x^4|$, $|-2x^5|$.

4. Ecrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole sommatoire.

$$s_1 = 1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5, \quad s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.$$

Calculer les sommes suivantes (r est un réel donné)

$$S_1 = \sum_{j=2}^{5} (-2)^{j-1}, \quad S_2 = \sum_{l=0}^{4} 2r.$$

5. Que vaut le coefficient du terme en x^{100} dans le développement de $(x^2 - x)^{50}$?

6. Les ensembles suivants admettent-ils une borne inférieure, supérieure ? Si oui, que vaut-elle ? Est-elle réalisée ?

$$\{|n| : n \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{N}_0, \quad \left\{\frac{(-1)^m}{m} \ : \ m \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad \left\{1 - \frac{1}{m^2} \ : \ m \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad [-\sqrt{3}, 0] \cap \mathbb{Q}.$$

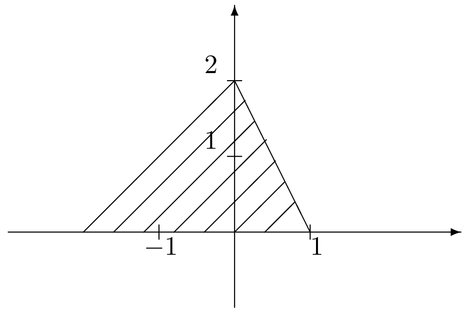
7. Dans le plan, pouvoir déterminer les composantes de vecteurs d'après une représentation graphique. Pouvoir représenter des vecteurs dont on donne les composantes.

8. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. On demande
- l'équation de la droite passant par le point de coordonnées $(-1, 0)$ et orthogonale à la droite d'équation $y - 3x + 4 = 0$,
- des équations paramétriques de la droite d'équation $2x + 3y + 4 = 0$,
- l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(-1, 2)$ et $(2, 3)$. Même question mais avec les points de coordonnées $(2, 2)$ et $(0, 2)$.

9. Représenter graphiquement les ensembles suivants

$\{(x, 2\sqrt{1-x^2}) \ : \ x \in [-1, 1]\}$ $\qquad$ $\{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-y} \leq 1\}$
$\{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq 1\}$ $\qquad$ $\{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0 \text{ et } x^2 + 2x + y^2 \geq 3\}$
$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, xy \geq 1\}$ $\qquad$ $\{(\sqrt{1+t^2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$

10. On se place dans un repère orthonormé. Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan situés à l'intérieur de l'ellipse centrée à l'origine, dont les foyers, distants de $2\sqrt{3}$ unités, sont sur l'axe Y et dont l'excentricité vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et à l'extérieur du cercle centré au point de coordonnées $(1,0)$ et de rayon 1. Donner aussi une description analytique de cet ensemble.
11. Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant



12. Résoudre les systèmes suivants

$$1)\ \begin{cases} 2y-3x=0 \\ -4y+6x=1 \end{cases},\quad 2)\begin{cases} y-2x=1 \\ -4y+6x=1 \end{cases},\quad 3)\begin{cases} y-2x+z=1 \\ -4y+z=0 \end{cases},\quad 4)\begin{cases} y-2x+z=1 \\ -4y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

13. QCM
   (a) Le cube d'un réel non nul et de son opposé sont toujours égaux. Vrai □ Faux □
   (b) Si r est un réel, alors $\sqrt[4]{(-r)^8}$ vaut r^2□ $-r^2$□ $\pm r^2$□ aucune réponse correcte□
   (c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x|^3 < |x|^2$ est l'ensemble
   $[-1,1[$□ $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$□ $]-1,1[\setminus\{0\}$□ $]-\infty,1[$□ aucune réponse correcte□
   (d) La valeur absolue de la somme entre deux réels est toujours
   inférieure ou égale à la différence entre les valeurs absolues de ces réels□
   inférieure ou égale à la somme entre les valeurs absolues de ces réels□
   supérieure ou égale à la somme entre les valeurs absolues de ces réels□
   supérieure ou égale à la moitié du produit entre ces réels□
   aucune réponse correcte□
   (e) Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci Vrai□ Faux□
14. A proposer aux étudiants.
   — Exprimer mathématiquement la question (d) du QCM ci-dessus.
   — Exprimer mathématiquement que l'addition des vecteurs est une opération associative.
   — Soient un réel strictement positif r et un réel y.
   a) Si x désigne un autre réel, exprimer mathématiquement que la distance de x à y est inférieure ou égale à r.
   b) Sous forme d'intervalle, décrire l'ensemble des réels dont la distance à y est inférieure ou égale à r.
   — Soient les réels a, b. On considère les inégalités

$$(1) a^2 \le b^2 \qquad (2) a \le b.$$

   Répondre par vrai ou faux à chacune des questions suivantes et justifier votre réponse.
   — Quels que soient a, b, l'inégalité (1) est une condition suffisante pour que l'inégalité (2) soit vraie
   — Quels que soient a, b, l'inégalité (1) est une condition nécessaire pour que l'inégalité (2) soit vraie
   — Quels que soient a, b, l'inégalité (2) est une condition suffisante pour que l'inégalité (1) soit vraie

— Quels que soient a, b, l'inégalité (2) est une condition nécessaire pour que l'inégalité (1) soit vraie
— Quels que soient a, b, les deux inégalités sont équivalentes.

15. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.
$$i+1, \quad (1+i)^2, \quad (2i+1)(-i+3), \quad \frac{2i+1}{i+1}$$
16. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ et en représenter les solutions :
$$iz^2+1=0, \quad 4z^2+1=0, \quad z^2-z+1=0.$$

3.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

1. Puisque tout terme qui change de membre change de signe, on a
$$3x+\frac{7}{3}=-4x \Leftrightarrow 3x+4x=-\frac{7}{3} \Leftrightarrow 7x=-\frac{7}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$
La solution de cette équation est donc $-\frac{1}{3}$.
2. Calculons $\Delta = 5^2-4.2.(-3)=49>0$; dès lors, on a
$$x=\frac{-5+7}{4} \text{ ou } x=\frac{-5-7}{4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=-3.$$
L'ensemble des solutions de cette équation est $S=\{-3,1/2\}$.
3. L'équation donnée est équivalente à $(2x-1)^2-(-x+3)^2=0$. Le premier membre étant une différence de deux carrés, on peut le factoriser ; on a alors
$$\Big[(2x-1)+(-x+3)\Big]\Big[(2x-1)-(-x+3)\Big]=0 \Leftrightarrow (x+2)(3x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x+2=0 \text{ ou } 3x-4=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=\tfrac{4}{3}.$$
L'ensemble des solutions de cette équation est $S=\{-2,4/3\}$.
4. Vu la définition de la valeur absolue d'un réel, notons que
$$|a|=|b| \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \text{ si } a \text{ et } b \text{ sont de même signe} \\ a=-b \text{ si } a \text{ et } b \text{ sont de signes différents.} \end{cases}$$
Ainsi,
$$|x-2|=|-x+1| \Leftrightarrow x-2=-x+1 \text{ ou } x-2=-(-x+1) \Leftrightarrow 2x=3 \text{ ou } 0x=1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2},$$
la seconde équation étant impossible. La solution de cette équation est $\frac{3}{2}$.

Exercice 2

1. Les zéros du trinôme $2x^2+5x-3$ sont -3 et $\frac{1}{2}$ (cfr exercice 1(2)). Comme le coefficient de x^2 est positif, le trinôme est négatif pour les valeurs de x comprises entre -3 et $\frac{1}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est $S=[-3,\frac{1}{2}]$.
2. Pour résoudre cette inéquation, il faut étudier le signe de la fraction en déterminant le signe de chaque facteur ; on applique ensuite la règle des signes pour un produit.

Si $f(x)=\dfrac{(x-1)(2x+3)^3}{2x+1}$, alors on a

x		$-3/2$		$-1/2$		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x+3)^3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S=[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[\cup[1,+\infty[$.

3. L'inéquation donnée est équivalente au système $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2x-1} > 0 \\ \frac{x}{2x-1} \leq 1 \end{array} \right.$. Résolvons séparément chacune de ces inéquations.

   Pour la première, on peut représenter le signe de la fraction par

x		0		$1/2$	
$\frac{x}{2x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

   L'ensemble des solutions est donc $S_1 =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.
   Pour résoudre la seconde inéquation, on doit ramener tous les termes dans un même membre puis factoriser, ce qui donne successivement

   $$\frac{x}{2x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2x+1}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{2x-1} \leq 0.$$

   Une étude du signe de la fraction montre que

x		$1/2$		1	
$\frac{-x+1}{2x-1}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est $S_2 =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [1, +\infty[$.
   Dès lors, l'ensemble des solutions du système s'obtient en prenant les valeurs de x communes à S_1 et S_2, donc en déterminant l'intersection de ces deux ensembles. On a

   $$S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[.$$

4. Puisque $|2x+1| = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 \text{ si } 2x+1 \geq 0 \\ -2x-1 \text{ si } 2x+1 < 0 \end{array} \right.$, l'inéquation donnée est équivalente à

   $$\left\{ \begin{array}{l} 2x+1 > 3 \text{ si } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 > 3 \text{ si } x < -\frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

   Ainsi, si $x \geq -1/2$, on a $2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$ et l'ensemble des solutions est $S_1 =]1, +\infty[$; si $x < -1/2$, on a $-2x > 4 \Leftrightarrow x < -2$, ce qui donne comme ensemble de solutions $S_2 =]-\infty, -2[$.
   Dès lors, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est

   $$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[.$$

5. Vu la définition de la valeur absolue de x, l'inéquation est équivalente à

   $$\left\{ \begin{array}{ll} x(x+1) \geq -x+2 \text{ si } x \geq 0 & (1) \\ -x(x+1) \geq -x+2 \text{ si } x < 0 & (2) \end{array} \right.$$

   Résolvons l'inéquation (1) : on a $x^2+x+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-2 \geq 0$, et comme $\Delta = 4-4.(-2) = 12$, les zéros du trinôme x^2+2x-2 sont donnés par $\frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3}$ et $\frac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1-\sqrt{3}$.
   L'étude du signe du trinôme montre que

x		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$	
x^2+2x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

   et puisque $x \geq 0$, l'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = [-1+\sqrt{3}, +\infty[$.
   Envisageons à présent l'inéquation (2) : on a $-x^2-x+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2 \leq 0$, inéquation impossible ; elle n'est, en effet, vérifiée par aucune valeur réelle de x et donc $S_2 = \phi$. Ainsi, l'ensemble des solutions est

   $$S = S_1 = [-1+\sqrt{3}, +\infty[.$$

Exercice 3

— $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$

— $\sqrt[3]{(-8)^2} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$

— $\sqrt{4x^2} = |2x| = 2|x|$

— $\sqrt[3]{8x^3} = 2x$

— $\sqrt[3]{-8x^3} = -2x$

Exercice 4

La notation n'étant pas unique, nous donnerons ici une des solutions possibles.

La première expression est la somme des naturels impairs de 1 à 15 inclus. Comme tout naturel impair peut toujours être considéré comme un multiple de 2 auquel on ajoute 1, la somme donnée peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{7} (2k+1).$$

La deuxième expression est une somme de termes, alternativement positifs et négatifs, de puissances de 3 qu'on peut noter sous la forme 3^k. Pour que les termes de la somme aient des signes qui alternent, on multipliera chaque puissance de 3 par une puissance de (-1). Ainsi, la somme donnée peut s'écrire

$$\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1}\ 3^k.$$

Exercice 5

Vu la formule du binôme de Newton, on a

$$(1-x)^{100} = \Big[1+(-x)\Big]^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k\ (-x)^k\ 1^{100-k} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k\ (-1)^k\ x^k.$$

Le coefficient du terme en x^{27} est donné par $C_{100}^k\ (-1)^k$ pour $k=27$; ce coefficient vaut donc $-C_{100}^{27}$.

Exercice 6

— L'ensemble $[1, \sqrt{3}[$ admet 1 comme borne inférieure et $\sqrt{3}$ comme borne supérieure ; la borne inférieure est réalisée puisque c'est un élément de l'ensemble donné tandis que la borne supérieure ne l'est pas.

— Considérons l'ensemble $\{\frac{(-1)^m}{m} : m \in \mathbb{N}_0\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Cet ensemble est borné inférieurement par -1 et supérieurement par $\frac{1}{2}$, les bornes étant réalisées.

— Soit $\{\frac{1}{1+m^2} : m \in \mathbb{N}_0\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots\}$. Cet ensemble est borné inférieurement par 0 (borne non réalisée) et supérieurement par $\frac{1}{2}$ (borne réalisée).

— L'ensemble $[0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ est constitué de tous les nombres rationnels compris entre 0 et $\sqrt{3}$; il est donc borné inférieurement par 0 (borne réalisée) et supérieurement par $\sqrt{3}$ (borne non réalisée).

Exercice 7

Pour déterminer les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$, décomposons $\vec{x}$ comme somme de $\vec{x_1}$, projection de $\vec{x}$ sur la droite engendrée par $\vec{u}$ parallèlement à $\vec{v}$, et de $\vec{x_2}$, projection de $\vec{x}$ sur la droite engendrée par $\vec{v}$ parallèlement à $\vec{u}$. On a approximativement $\vec{x_1} = 2\vec{u}$ et $\vec{x_2} = -\frac{1}{2}\vec{v}$. On peut donc écrire $\vec{x} = 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ et les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$ sont $(2, -\frac{1}{2})$.

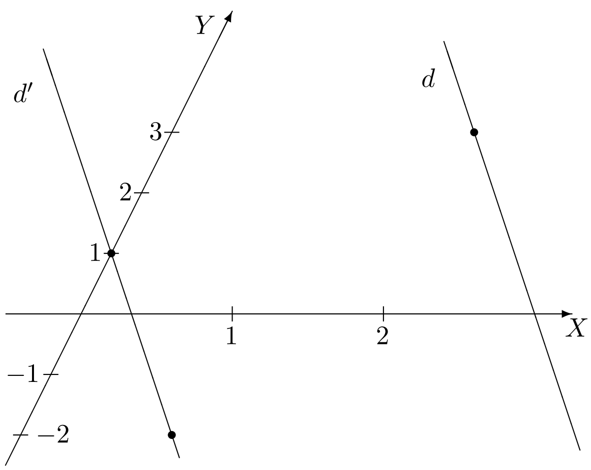
Si le vecteur $\vec{t}$ a pour composantes $(2, -1)$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$, on a alors $\vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v}$. Représenter $\vec{u}$ et $\vec{v}$ liés en un même point. Ensuite, par l'extrémité du vecteur $2\vec{u}$, tracer la parallèle à la droite engendrée par $\vec{v}$ et par l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$, tracer la parallèle à la droite engendrée par $\vec{u}$. Le point d'intersection de ces deux parallèles détermine l'extrémité du vecteur $\vec{t}$.

La démarche est analogue pour le vecteur $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

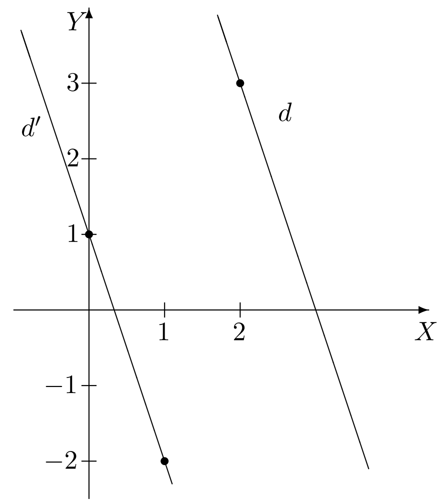
Exercice 8

a) Toute parallèle à la droite d' d'équation $3x+y-1=0$ a pour équation $3x+y+k=0$ $(*)$ avec $k \in \mathbb{R}$. On détermine la valeur de k en exprimant que d passe par le point A c'est-à-dire que ses coordonnées $(2,3)$ vérifient (*). Ainsi, on a $6+3+k=0$, ce qui donne $k=-9$; d a donc pour équation cartésienne $3x+y-9=0$.
Pour représenter la droite d' considérons deux points distincts qui lui appartiennent, par exemple, les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,-2)$. Pour représenter d, on trace la parallèle à d' passant par A.

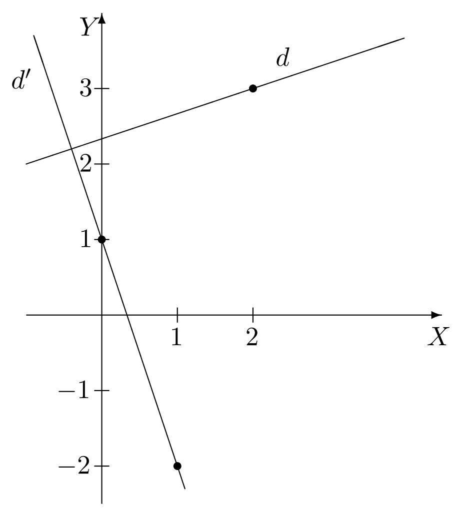
Repère non orthogonal



Repère orthonormé



b) La droite d' d'équation $3x+y-1=0$ a pour coefficient angulaire -3 ; le coefficient angulaire de toute droite orthogonale à d' est donc égal à $\frac{1}{3}$ et d a pour équation cartésienne une équation du type $y=\frac{1}{3}x+k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Pour déterminer la valeur de k, exprimons que d passe par le point A de coordonnées $(2,3)$, ce qui donne $3=\frac{2}{3}+k$. Ainsi, k vaut $\frac{7}{3}$ et d a pour équation $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ ou encore $x-3y+7=0$ si on écrit l'équation sous sa forme canonique.



c) Dans le premier cas, le coefficient angulaire de la droite d vaut $\frac{2-1}{1-2}=-1$; d a donc une équation du type $y=-x+k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Comme d passe par le point A de coordonnées $(1,2)$, on a $2=-1+k$ ou

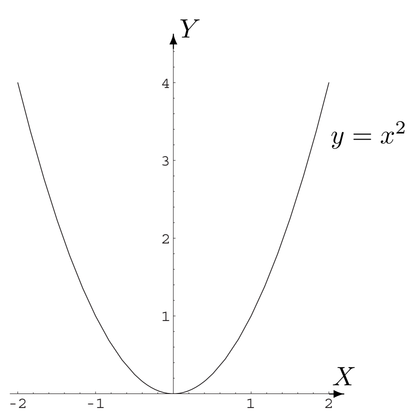
encore $k=3$. Ainsi, d a pour équation $x+y-3=0$.
Dans le second cas, comme les abscisses des points A et B sont identiques et égales à 1, la droite AB a pour équation $x-1=0$.

Exercice 9
Rappelons tout d'abord que si $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ alors sa partie réelle, notée $\Re z$, est a, sa partie imaginaire, notée $\Im z$, est b, son module, noté $|z|$, est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son conjugué, noté $\overline{z}$, est $a-ib$. Rappelons aussi que $z.\overline{z}=|z|^2$.
Ecrivons les différentes expressions données sous la forme $a+ib$; on a
1) $i=0+1i$
2) $\frac{1}{i}=-i$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $-i$, conjugué de i
3) $i(-i+3)=-i^2+3i=1+3i$ puisque $i^2=-1$
4) $\frac{2i+1}{2i-1}=\frac{(1+2i)(-1-2i)}{(-1)^2+2^2}=\frac{-1-4i-4i^2}{5}=\frac{-1+4-4i}{5}=\frac{3-4i}{5}$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $-1-2i$, conjugué de $-1+2i$
5) $\frac{2i+1}{-2i+1}=\frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{1+4i+4i^2}{5}=\frac{1-4+4i}{5}=\frac{-3+4i}{5}$ (même démarche que ci-dessus).
Ainsi,

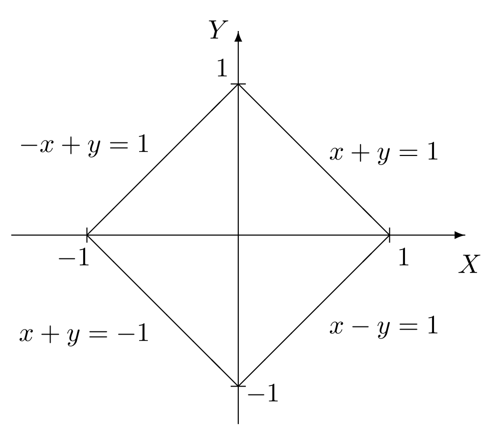
z	$\Re z$	$\Im z$	$\lvert z\rvert$	$\overline{z}$
i	0	1	1	$-i$
$1/i$	0	-1	1	i
$i(-i+3)$	1	3	$\sqrt{10}$	$1-3i$
$\frac{2i+1}{2i-1}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{3+4i}{5}$
$\frac{2i+1}{-2i+1}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{-3-4i}{5}$

Exercice 11

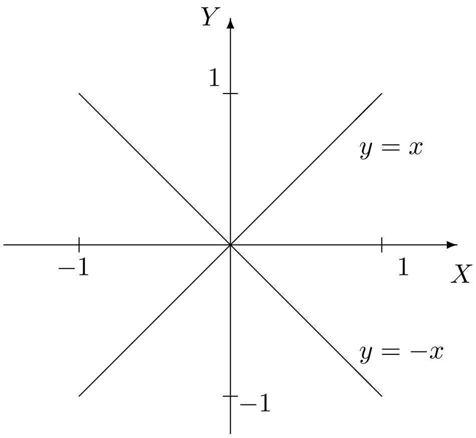
Représentation graphique de
$\{(x,x^2): x\in\mathbb{R}\}$



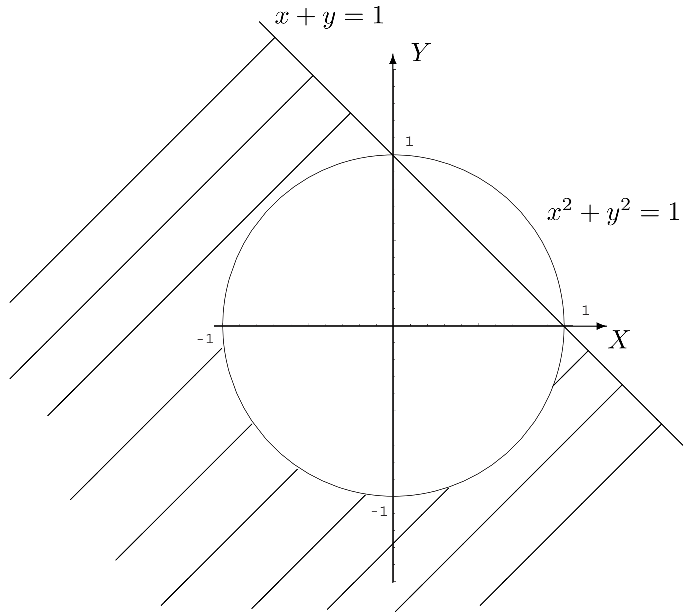
Représentation graphique de
$\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}, |x|+|y|=1\}$.



Représentation graphique de
$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2\}$

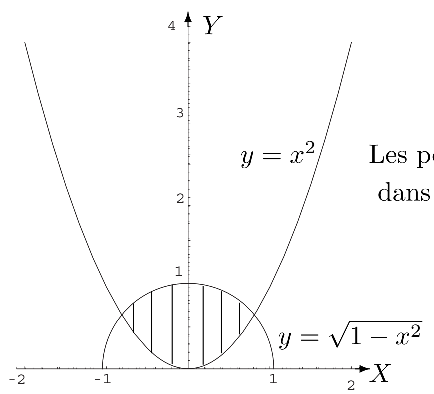


Représentation graphique de
$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1$ et $x^2 + y^2 \geq 1\}$.



Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

Exercice 12
Représentation graphique de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ y \leq \sqrt{1 - x^2},\ y \geq x^2\}$.



Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

Exercice 13
Le premier ensemble hachuré est une représentation de

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x - y + 1 \geq 0,\ x + 2y - 2 \leq 0\},$$

les droites représentées ayant pour équation $y = 0,\ x - y + 1 = 0$ et $x + 2y - 2 = 0$.
Cependant, on peut également décrire A par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [y - 1, 2 - 2y]\}$$

ou encore par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [0, x + 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in [0, \frac{-x}{2} + 1]\},$$

descriptions qui seront utiles, dans la suite, pour le calcul intégral.

Le second ensemble hachuré est une représentation de

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\ y \leq \sqrt{1 - x^2}\},$$

la parabole ayant pour équation $y = x^2 - 1$ et le demi-cercle $y = \sqrt{1-x^2}$.
On peut également décrire A par

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y \in [x^2-1, \sqrt{1-x^2}]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0], x \in [-\sqrt{y+1}, \sqrt{y+1}]\} \\ &\qquad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]\}. \end{aligned}$$

3.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

1. $S = \{-\frac{7}{5}\}$
2. $S = \{-3, 0, \frac{1}{2}\}$
3. $S = \{\frac{4}{3}, 2\}$
4. $S = \{-\frac{1}{2}\}$
5. $S = \{0, 1\}$
6. $S = \{1 - \sqrt{2}\}$

Exercice 2

1. $S =]-\infty, \frac{3}{2}]$
2. $S =]-\infty, -3] \cup [0, \frac{1}{2}]$
3. $S = [2, +\infty[$
4. $S =]-1, \frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$
5. $S =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
6. $S =]1, 5[$
7. $S = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$
8. $S = \{0\} \cup [1, +\infty[$
9. $S = [2, +\infty[$

Exercice 3

$9 \quad , \quad -3 \quad , \quad \sqrt{2}\,|x| \quad , \quad \sqrt{2}\,x^2 \quad , \quad 2x \quad , \quad -2x$

Exercice 4

$\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k-1}\, k \quad , \quad \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1}\, 3^k$ par exemple.

Exercice 5

$$-\frac{50\,!}{27\,!\,23\,!}$$

Exercice 6

$\mathbb{N}$: borne inférieure réalisée valant 0 ; pas de borne supérieure.
$\mathbb{Q}$: ni borne inférieure, ni borne supérieure.
$\{\frac{(-1)^{2m}}{m^2} : m \in \mathbb{N}_0\}$: borne inférieure non réalisée valant 0 ; borne supérieure réalisée valant 1.
$\{1 - \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}_0\}$: borne inférieure réalisée valant 0 ; borne supérieure non réalisée valant 1.
$[-\frac{1}{3}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$: borne inférieure réalisée valant $-\frac{1}{3}$; borne supérieure non réalisée valant $\sqrt{2}$.

Exercice 7

...

Exercice 8

- $2x - 3y + 4 = 0$
- $\begin{cases} x = 2r \\ y = -2 - 3r \end{cases}, r \in \mathbb{R}$
- $x + 3y - 7 = 0$ et $x - 2 = 0$

Exercice 9

z	$\Re z$	$\Im z$	$\lvert z\rvert$	$\overline{z}$
i	0	1	1	$-i$
$\frac{1}{i}$	0	-1	1	i
$i(-i+3)$	1	3	$\sqrt{10}$	$1-3i$

z	$\Re z$	$\Im z$	$\lvert z\rvert$	$\overline{z}$
$\frac{2i+1}{2i-1}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{3+4i}{5}$
$\frac{2i+1}{-2i+1}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{-3-4i}{5}$
i^3	0	-1	1	i

z	$\Re z$	$\Im z$	$\lvert z\rvert$	$\overline{z}$
$\frac{1}{i^4}$	1	0	1	1
$\frac{1}{-i+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1-i}{2}$
$\frac{-3i+1}{i-1}$	-2	1	$\sqrt{5}$	$-2-i$

Exercice 10

$S = \{\frac{3i}{2}\}$ $\quad$ $S = \{-2i, 2i\}$ $\quad$ $S = \{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$

Exercice 11

- $\{(x, 1-x^2) : x \in \mathbb{R}\}$: ensemble des points de la parabole dont le sommet a pour coordonnées $(0,1)$ et passant notamment par les points de coordonnées $(-1,0), (1,0), (-2,-3), (2,-3)$.
- $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ |x| + |y| \leq 1\}$: ensemble des points intérieurs au carré ("bord" compris) dont les sommets ont pour coordonnées $(1,0), (0,1), (-1,0)$ et$(0,-1)$.
- $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$: ensemble des points intérieurs au cercle de rayon 1 et centré au point de coordonnées $(-1,0)$ ("bord" compris).
- $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1$ et $x^2 + y^2 \geq 1\}$: ensemble des points extérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1 ("bord" compris) et situés "sous" la droite d'équation $x + y = 1$ (droite comprise).

Exercice 12

Ensemble des points situés à l'intérieur du cercle donné, entre ce cercle et la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 13

$\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ x \in]0, +\infty[$ et $y \in [\frac{1}{x}, +\infty[\}$ $\quad$ $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ y \in\ [0,2]$ et $x \in [-1, 1 - \frac{y}{2}]\}$

Exercice 14

1. $S = \varnothing$: système impossible.
2. $S = \left\{\left(-4, -\frac{5}{2}\right)\right\}$
3. $S = \left\{x\left(1, \frac{5}{2}, 4\right) + \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$: système simplement indéterminé.
4. $S = \left\{\left(\frac{1}{15}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{15}\right)\right\}$

Exercice 15 : QCM

(a) $a = \dfrac{Rb}{b-R}$

(b) aucune réponse correcte

(c) $-a^3$

(d) $]-1,1[\setminus\{0\}$

(e) supérieure ou égale à la valeur absolue de la différence entre les valeurs absolues de ces réels

(f) n'admet pas de borne inférieure mais bien une borne supérieure réalisée

(g) aucune réponse correcte

(h) aucune réponse correcte

(i) $\dfrac{-i}{-i+1}$

(j) faux

3.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

1. $S=\{-\frac{3}{2}\}$ 2. $S=\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}$ 3. $S=\{\frac{1}{2},1\}$ 4. $S=\{-1,-\frac{1}{3}\}$

Exercice 2

1. $S=]-2,-\frac{2}{3}[\,\cup\,]2,+\infty[$
2. $S=]-\infty,-2]\cup\{0\}\cup[2,+\infty[$
3. $S=]\frac{1}{2},\frac{5}{2}[$
4. $S=]-\infty,-1]\ \cup\ [1,2]$
5. $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$
6. $S=]-3,-2[$

Exercice 3

169 , -1 , $2\sqrt{2}\,|x|$, $-3\,x^2$, $-x$, $\left\{\begin{array}{lll} -x^3 & \text{si} & x<0 \\ x^3 & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$, x^4 ,

$\left\{\begin{array}{lll} -2x^5 & \text{si} & x<0 \\ 2x^5 & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$

Exercice 4

$s_1=\sum_{k=1}^{5}k^k$, $s_2=\sum_{k=1}^{4}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ par exemple ; $S_1=10$, $S_2=10r$.

Exercice 5

Le coefficient cherché vaut 1.

Exercice 6

$\{|n| : n\in\mathbb{Z}\}$: borne inférieure réalisée valant 0 ; pas de borne supérieure.
$\mathbb{N}_0$: borne inférieure réalisée valant 1 ; pas de borne supérieure.
$\{\dfrac{(-1)^m}{m} : m\in\mathbb{N}_0\}$: borne inférieure réalisée valant -1 ; borne supérieure réalisée valant $1/2$.
$\{1-\dfrac{1}{m^2} : m\in\mathbb{N}_0\}$: borne inférieure réalisée valant 0 ; borne supérieure non réalisée valant 1.
$[-\sqrt{3},0]\cap\mathbb{Q}$: borne inférieure non réalisée valant $-\sqrt{3}$; borne supérieure réalisée valant 0.

Exercice 7

...

Exercice 8

- $x+3y+1=0$
- $\left\{\begin{array}{l} x=-3r-2 \\ y=2r\end{array}\right.$, $r\in\mathbb{R}$
- $x-3y+7=0$ et $y-2=0$

Exercice 9

— $\{(x, 2\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\}$: ensemble des points d'ordonnée positive de l'ellipse centrée à l'origine, dont le grand axe est l'axe des ordonnées et passant notamment par les points de coordonnées $(-1,0), (1,0)$ et $(0,2)$.
— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq 1\}$: ensemble des points situés entre les droites d'équation $x - y = -1$ et $x - y = 1$, les points des droites étant compris.
— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ xy \geq 1\}$: ensemble des points situés à l'extérieur des branches de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$, les points de la courbe étant compris.
— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-y} \leq 1$: ensemble des points situés à l'extérieur des droites d'équation $y = x$ et $y = x - 1$, les points de la droite d'équation $y = x$ étant exclus et ceux de l'autre droite inclus.
— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$ et $x^2+2x+y^2 \geq 3\}$: ensemble des points extérieurs au cercle centré au point de coordonnées $(-1,0)$ et de rayon 2 ("bord" compris) et situés "sous" la droite d'équation $x + y = 0$ (droite comprise).
— $\{(\sqrt{1+t^2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$: ensemble des points d'abscisse positive de l'hyperbole centrée à l'origine, dont l'axe principal est l'axe des abscisses, passant notamment par le point de coordonnées $(1,0)$ et dont les asymptotes ont pour équation $y = -x$ et $y = x$.

Exercice 10

L'ellipse a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; ses sommets sont les points de coordonnées $(1,0), (-1,0), (0,2)$ et $(0,-2)$. Le cercle a pour équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
La description analytique de l'ensemble est donnée par $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.
On peut aussi décrire cet ensemble par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0], y \in [-2\sqrt{1-x^2}, 2\sqrt{1-x^2}]\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [-2\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{2x-x^2}] \cup [\sqrt{2x-x^2}, 2\sqrt{1-x^2}]\}.$$

Exercice 11

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], x \in [y-2, \frac{2-y}{2}]$.

Exercice 12

1. $S = \varnothing$: système impossible.
2. $S = \left\{\left(-\frac{5}{2}, -4\right)\right\}$
3. $S = \left\{r(5,2,8) + \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) : r \in \mathbb{R}\right\}$: syst. simplement indéterminé.
4. $S = \left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{4}{15}\right)\right\}$

Exercice 13 : QCM

(a) faux
(b) r^2
(c) $]-1,1[\ \setminus\{0\}$
(d) inférieure ou égale à la somme entre les valeurs absolues de ces réels
(e) faux

Exercice 14

- (d) du QCM : $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y|$.
- Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des vecteurs. On a $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- a) $|x-y| \leq r$ b) $[y-r, y+r]$
- Faux dans tous les cas.

Exercice 15

z	$\Re z$	$\Im z$	$\|z\|$	$\overline{z}$
$i+1$	1	1	$\sqrt{2}$	$1-i$
$(1+i)^2$	0	2	2	$-2i$
$(2i+1)(-i+3)$	5	5	$5\sqrt{2}$	$5-5i$
$\frac{2i+1}{i+1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{3-i}{2}$

Exercice 16

$S = \{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\}$ $S = \{\frac{-i}{2}, \frac{i}{2}\}$ $S = \{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\}$

Chapitre 4

Fonctions - Calcul vectoriel

4.1 Exercices de base sur les chapitres 2 et 3 (partim A)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions données explicitement ci-dessous

$$\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{1}{|x+1|} \qquad \sqrt{x-|x|} \qquad \sqrt[3]{x^3+1}$$

$$\frac{1}{x^2-4} \qquad \sqrt{-x^2+3x-2} \qquad \sqrt{\frac{x-3}{-x^2+1}}$$

2. Représenter graphiquement les fonctions suivantes

$$f_1(x) = x^2 - 5x + 6, x \in \mathbb{R}; \quad f_2(x) = |x^2 - 5x + 6|, x \in \mathbb{R}; \quad f_3(x) = x|x-1| - x, x \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image. Dans chaque cas, déterminer ensuite la fonction inverse, si elle existe (au besoin, réduire le domaine de définition).

$$f_1(x) = x - 1; \quad f_2(x) = x^2; \quad f_3(x) = x^2 + 1; \quad f_4(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Effectuer la division du polynôme P par le polynôme Q où P, Q sont donnés par $P(x) = x^3+2x+1$, $Q(x) = 2x^2 - x$.
   Même question avec $P(x) = -x^5 + 1$ et $Q(x) = x - 1$.
5. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples.

$$1)\ \frac{1}{x(x-2)} \qquad 3)\ \frac{1}{x(x^2+1)} \qquad 5)\ \frac{1}{x^3+1}$$

$$2)\ \frac{1}{x(x-2)^2} \qquad 4)\ \frac{x}{4-x^2} \qquad 6)\ \frac{x^2}{x^2-4}.$$

6. Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions données explicitement ci-dessous

$$f_1(x) = \cos(x^2);\ f_2(x) = \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)};\ f_3(x) = \sqrt{\sin(x)};\ f_4(x) = \sin\left(\sqrt{1-x^2}\right);\ f_5(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(2x+\frac{\pi}{2})}.$$

7. Pour chacune des fonctions données explicitement ci-dessous, déterminer le domaine de définition, l'image, examiner la parité, la périodicité (justification sur le graphique) et en donner une représentation graphique
$$f_1(x) = |x|x; \quad f_2(x) = |\cos(x)|; \quad f_3(x) = \sin(2\pi x + 1); \quad f_4(x) = \cos^2(x).$$
8. a) Déterminer le produit scalaire entre deux vecteurs tels que la longueur de l'un soit le double de celle de l'autre et faisant un angle de mesure égale à π radians (resp. 30 degrés). Donner une représentation de ces vecteurs.
   b) On se place dans une base orthonormée du plan. Déterminer le produit scalaire entre les deux vecteurs de composantes respectives $(1, 2)$ et $(-1, 3)$. Représenter ces vecteurs.
   c) Déterminer les coordonnées polaires du point P du plan dont les coordonnées cartésiennes sont $(-1, 1)$ (resp. $(\sqrt{3}, -1)$).
9. (Chimie, Géographie) a) Dans une base orthonormée du plan, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(3, 1)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $(-1, 1)$. Représenter ces vecteurs.
   b) Dans une base orthonormée de l'espace, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(1, 2, -1)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$.
10. Dans une base orthonormée de l'espace, on donne les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ respectivement de composantes $(1, 1, 1), (-2, 0, 3), (-1/2, 1, 1)$.
    a) Déterminer les composantes du produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
    c) Calculer (si possible)
$$\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c}), \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}), \quad \vec{a} \bullet (\vec{b} \bullet \vec{c}), \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \bullet \vec{c}).$$
11. Quel est le domaine de définition des fonctions dont l'expression est la suivante :
$$\cos(\mathrm{arctg}(x)),\ \arccos(2x + 1),\ \arcsin(\sqrt{4 - x^2}),\ \arccos\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$
12. Déterminer (si elle existe) la fonction inverse des fonctions dont l'expression est donnée ci-dessous. Au besoin, réduire le domaine de définition.
$$\sin(2x),\ \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{4}),\ \arccos(x + 1).$$
13. Résoudre les équations et inéquations suivantes.
$$\sin(-x) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(x) = \sin(x),\ \sin^2(x) - 4\sin(x) + 3 = 0,\ \sin(x) \geq \cos(x).$$
14. Quel est le domaine de définition des fonctions dont l'expression est la suivante :
$$\begin{array}{llll} \ln(-x + 1) & \ln(|2x - 3|) & \ln(x^2 - 3x + 2) & \ln(\arcsin(x)) \\ \ln(\ln(x)) & \exp(x^2) & \exp(\sqrt{1 + x^3}) & \exp(\sin(\mathrm{arctg}(x))) \\ \exp(\arcsin(2x + 1)) & \log_4(x^2) & x^{\ln(x)} & \pi^{\sqrt{x-1}} \\ x^{\arcsin(x)} & & & \end{array}$$

Liste 2003/2004

Les exercices marqués de (**) ne sont pas destinés aux biologistes (en première lecture).

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous
$$\frac{1}{4x^2 + 5}, \quad \frac{x}{\sqrt{|x - 1| - 1}}, \quad \sqrt[3]{x^3 - 1}, \quad \sqrt{-x^2 + x + 2}.$$

2. Représenter graphiquement les fonctions suivantes

$$f_1(x) = -x^2 + x + 2, \ x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = |-x^2 + x + 2|, \ x \in \mathbb{R}, \quad f_3(x) = x|-x+2| + x^2, \ x \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image. Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe (au besoin, réduire le domaine).

$$f_1(x) = -x, \quad f_2(x) = x^3, \quad f_3(x) = x^2 - 1.$$

4. Effectuer la division du polynôme $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$ par le polynôme $Q_1(x) = x^2 + 1$ et par le polynôme $Q_2(x) = -x + 1$.
5. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples.

$$\frac{1}{x(2x+1)}, \quad \frac{1}{x^2(x^2+4)} \quad \frac{x}{9-x^2}, \quad \frac{x}{5x+7}.$$

6. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous.

$$f_1(x) = \sin(x^2 - 1), \quad f_2(x) = \sqrt{\cos(x)}, \quad f_3(x) = \frac{\operatorname{tg}(2x)}{2 - \sin(x)}.$$

7. Pour chacune des fonctions données ci-dessous, déterminer le domaine de définition, déterminer si elle est périodique (et en donner alors la période), paire, impaire et en donner une représentation graphique.

$$f_1(x) = \cos(|x|), \quad f_2(x) = 1 + \sin(x), \quad f_3(x) = |-\cos(\pi x)|, \quad f_4(x) = x + \cos(x).$$

(Pour f_4, représenter le graphique en supposant connue sa propriété de croissance ; remarquer qu'une justification qui ne fait pas appel à la dérivation peut se faire géométriquement sur le cercle trigonométrique.)
8. Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}, \quad \sin(2x) \geq \sin(x).$$

9. Déterminer les coordonnées polaires des points du plan dont les coordonnées cartésiennes sont $(-1, -1), (0, -2), (-4, 0), (\sqrt{3}, 1)$.
10. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. On donne

$$\vec{a} = 3\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2, \quad \vec{b} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3.$$

Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ suivants

$$\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{b}, \quad \vec{y} = \vec{a} \bullet \vec{b}\ \vec{a}.$$

11. ** On fixe une base orthonormée du plan (notée $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) et les vecteurs $\vec{a}, \vec{v}$ respectivement de composantes $(3, -2)$ et $(-2, 1)$. Dans la base donnée, déterminer les composantes de la projection orthogonale $\vec{u}$ du vecteur $\vec{a}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$. Représenter $\vec{a}, \vec{v}, \vec{u}$.

    Les vecteurs $\vec{a}, \vec{v}$ forment-ils une base du plan ? Pourquoi ? Dans cette base, déterminer les composantes du vecteur $\vec{u}$ et celles du vecteur $\vec{e}_1$.
12. ** On fixe une base orthonormée de l'espace et les vecteurs $\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}$ respectivement de composantes $(1, 1, -2), (0, 0, -2), (1, -1, 0)$. Déterminer les composantes de la projection orthogonale $\vec{w}$ de $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et celles de la projection orthogonale $\vec{t}$ de $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$. Représenter $\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$.
13. QCM
    (a) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante Vrai☐ Faux☐

(b) La différence entre une fonction croissante et une fonction décroissante est une fonction qui est monotone Vrai☐ Faux☐

(c) Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'axe X Vrai☐ Faux☐

(d) Le domaine de définition de la fonction donnée par $\cos(\cos(x))$ est l'intervalle $[-1, 1]$ Vrai☐ Faux☐

(e) Une fraction rationnelle n'est jamais définie dans l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier Vrai☐ Faux☐

(f) Le graphique d'un polynôme du deuxième degré intersecte toujours l'axe Y Vrai☐ Faux☐

(g) Le produit vectoriel est associatif Vrai☐ Faux☐

(h) Le produit vectoriel est commutatif Vrai☐ Faux☐

(i) Le produit scalaire est associatif Vrai☐ Faux☐

(j) Le produit scalaire est commutatif Vrai☐ Faux☐

(k) Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs et si r est un réel, l'expression $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet (r\vec{c})$ est un vecteur☐ un réel ☐ ni l'un ni l'autre☐

(l) Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs, l'expression $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ est un vecteur☐ un réel ☐ ni l'un ni l'autre☐

(m) Le produit scalaire de deux vecteurs parallèles est toujours positif Vrai☐ Faux☐

(n) ** Le vecteur $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est un multiple de $\vec{a}$☐ une combinaison linéaire de $\vec{a}, \vec{b}$☐ une combinaison linéaire de $\vec{a}, \vec{c}$☐ une combinaison linéaire de $\vec{b}, \vec{c}$☐ aucune réponse correcte☐

14. Calculer

$$\cos(\arccos(1/2)), \quad \cos(\arccos(x))\ (x \in [-1, 0]), \quad \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right), \quad \arccos(\cos(x))\ (x \in [2\pi, 3\pi])$$

$$\arcsin(-1), \quad \arccos(\sqrt{2}), \quad \mathrm{arccotg}(-\sqrt{3}).$$

15. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous

$$\begin{array}{lll}
\arccos(x^2-1) & \mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) & \arcsin\left(2\sqrt{x^2-1}\right) \\
\ln(x^2) & \sqrt{\ln(x^2)} & \arcsin(\ln(x)) \\
x^{\mathrm{arctg}(x)} & x^{\pi} & \pi^{x} \\
\exp\left(\frac{1}{|x-1|}\right) & \ln(|x-1|+x) & \arcsin(\sin(x))
\end{array}$$

16. Résoudre (x est l'inconnue réelle)

$$\exp(x) - \exp(-x) = 0, \quad \exp(x) + 2\exp(-x) \leq 3, \quad 3\ln(x) > \ln(3x-2).$$

17. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de $\exp, \ln$) :

$$\ln(|x|), \quad \exp(-|x|), \quad \ln(x+1), \quad -1 + \exp(x).$$

Liste 2004/2005

Les exercices marqués de ** ne sont pas destinés aux biologistes, géologues, philosophes (en première lecture).

Les exercices marqués de * sont plus spécialement destinés aux informaticiens (aux autres aussi si l'occasion se présente).

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous

$$\sqrt{(1-x)^2 - x^2}, \quad \frac{1}{2x^2+1}, \quad \sqrt{1 - x|x|}.$$

2. Représenter graphiquement les fonctions données explicitement ci-dessous, toutes définies sur $\mathbb{R}$

$$f_1(x) = x^2 - 3x + 2, \quad f_2(x) = |x^2 - 3x + 2|, \quad f_3(x) = |x|^2 - 3|x| + 2$$

$$f_4(x) = f_1(-x), \quad f_5(x) = f_1(x+1), \quad f_6(x) = f_1(x) + 1.$$

3. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image. Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe.

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 2x + 1 \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x-1}.$$

4. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples.

$$\frac{x^2-1}{1-x}, \quad \frac{x^2+1}{(1-x)^2} \quad \frac{20}{(1+x^2)(x^2-4)}, \quad \frac{x}{2x+1}, \quad \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

5. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous.

$$f_1(x) = \sqrt{\sin(x)}, \quad f_2(x) = \sqrt{\tan(x) - 1}.$$

6. Pour chacune des fonctions données ci-dessous, déterminer le domaine de définition, déterminer si elle est périodique (et en donner alors la période), paire, impaire et en donner une représentation graphique.

$$f_1(x) = |\sin(\pi x)|, \quad f_2(x) = \cos(1+x), \quad f_3(x) = 2\cos^2(x).$$

7. Résoudre les équations et l'inéquation suivantes dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\sin(x) = \cos(x), \quad \cos(2x) = \cos(x), \quad \cos(2x) \geq \cos(x).$$

8. Déterminer les coordonnées polaires des points du plan dont les coordonnées cartésiennes sont $(1, -1), (-\sqrt{3}, 1)$.
9. On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. On donne

$$\vec{a} = 2\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2, \quad \vec{b} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ suivants

$$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} \wedge \vec{a}, \quad \vec{y} = \vec{a} \bullet \vec{b}\, \vec{b}, \quad \vec{z} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a}.$$

10. * On fixe une base orthonormée de l'espace et les vecteurs $\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}$ respectivement de composantes $(1, 1, -2), (0, 0, -2), (1, -1, 0)$. Déterminer les composantes de la projection orthogonale $\vec{w}$ de $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et celles de la projection orthogonale $\vec{t}$ de $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$. Représenter $\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$.
11. QCM
    (a) Si f est défini sur $\mathbb{R}$, le graphique de $F(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ est
    le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice □
    le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X □
    le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y □
    le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine □
    aucune des réponses précedentes ne convient □
    (b) Le domaine de définition de la fonction donnée par $\cos(\cos(x))$ est l'intervalle $[-1, 1]$ Vrai□ Faux□
    (c) Le graphique d'un polynôme du deuxième degré intersecte toujours l'axe Y Vrai□ Faux□
    (d) Le graphique d'un polynôme du quatrième degré intersecte toujours l'axe X Vrai□ Faux□
    (e) Le produit vectoriel est associatif Vrai□ Faux□

(f) Le produit vectoriel est commutatif Vrai☐ Faux☐

(g) Le produit scalaire est associatif Vrai☐ Faux☐

(h) Le produit scalaire est commutatif Vrai☐ Faux☐

(i) Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs et si r est un réel, l'expression $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet (r\vec{c})$ est
un vecteur☐ un réel ☐ ni l'un ni l'autre☐

(j) Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs, l'expression $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ est un vecteur☐ un réel ☐ ni l'un ni l'autre☐

(k) Le produit scalaire de deux vecteurs parallèles est toujours positif Vrai☐ Faux☐

(l) *Le vecteur $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est un multiple de $\vec{a}$☐ une combinaison linéaire de $\vec{a}, \vec{b}$☐ une combinaison linéaire de $\vec{a}, \vec{c}$☐ une combinaison linéaire de $\vec{b}, \vec{c}$☐ aucune réponse correcte☐

12. A proposer aux étudiants
    — Soit f une fonction définie sur l'ensemble des réels. On considère la proposition suivante "Si x, y sont des réels qui ont même image par f alors ils sont égaux".
    a) Exprimer cette propriété mathématiquement.
    b) Cette proposition est-elle toujours vraie, toujours fausse ?
    c) Exprimer la réciproque de cette proposition.
    d) Cette proposition réciproque est-elle toujours vraie, toujours fausse ?
    — Exprimer mathématiquement la propriété suivante : "Le produit scalaire entre vecteurs est une opération bilinéaire".
    — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Expliquer ce que signifie
    $$-1 \leq f(r) \leq 1,\ \forall r \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in [-1,1], \exists r \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(r) = x$$
    et en donner l'expression résumée mathématique.
    — Qu'appelle-t-on fraction rationnelle propre ?
    — Donner la définition (géométrique) du nombre $\cos(3)$.
13. Calculer (si possible)
    $$\operatorname{arcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right), \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \arcsin\left(\frac{13\pi}{6}\right), \quad \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right), \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)\right).$$
14. (*) Résoudre (x est l'inconnue réelle)
    $$\arcsin(\sin(x)) = \pi - x, \quad \arcsin(\sin(x)) = \frac{x}{2} - \pi.$$
15. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous
    $$\begin{array}{llll} \arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right) & \operatorname{arctg}\left(\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) & \operatorname{arcos}\left(1+\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) & \arcsin\left(x^2-3x+1\right) \\ \arcsin(\left|x^2-3x+1\right|) & \ln(1-x^2) & \operatorname{arcos}\left(\ln(x^2)\right) & \operatorname{arcos}\left(\ln^2(x)\right) \\ \ln(\exp(x)-1) & \ln(\exp(x-1)) & x^{\sqrt{2}} & (\sqrt{2})^x \end{array}$$
16. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de $\exp, \ln$).
    $$\ln(x) - 1, \quad \ln(x-1), \quad \ln(|x-1|), \quad \exp(-|x|).$$

4.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

— La fonction $x \mapsto f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur $1 + x^2$ diffère de zéro pour tout x.

— La fonction $x \mapsto f_2(x) = \frac{1}{|x+1|}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

— La fonction $x \mapsto f_3(x) = \sqrt{x - |x|}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x - |x| \geq 0\} = [0, +\infty[.$$

— La fonction $x \mapsto f_4(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque le radicand (un polynôme) est défini sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \mapsto f_5(x) = \frac{1}{x^2-4}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

— La fonction $x \mapsto f_6(x) = \sqrt{-x^2+3x-2}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x - 2 \geq 0\}.$$

Comme $\Delta = 9 - 4.(-1).(-2) = 1$, les zéros du radicand sont $\frac{-3+1}{-2}$ et $\frac{-3-1}{-2}$ donc 1 et 2. Le coefficient du terme en x^2 étant négatif, le radicand est positif pour les valeurs de x comprises entre 1 et 2. On a donc $A = [1, 2]$.

— La fonction $x \mapsto f_7(x) = \sqrt{\frac{x-3}{-x^2+1}}$ est définie sur

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{-x^2+1} \geq 0 \text{ et } -x^2+1 \neq 0\right\}.$$

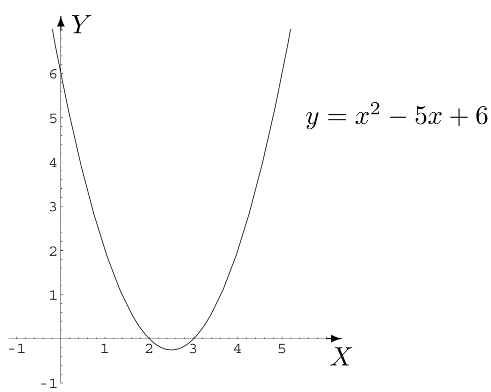
En étudiant le signe de la fraction, on a

x		-1		1		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-x^2+1$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{x-3}{-x^2+1}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Ainsi, $A =]-\infty, -1[\cup]1, 3]$.

Exercice 2

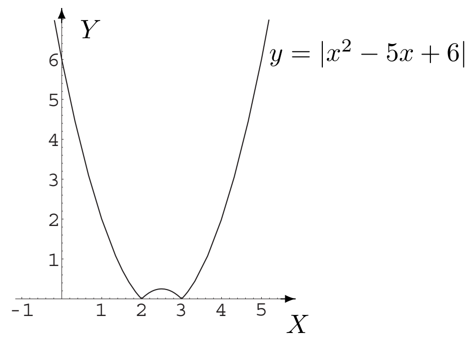
— La représentation graphique de $f_1(x) = x^2 - 5x + 6,\ x \in \mathbb{R}$, est la parabole convexe dont l'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{5}{2}$, dont le sommet a pour coordonnées $(\frac{5}{2}, f_1(\frac{5}{2})) = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$, qui rencontre l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(2, 0)$ et $(3, 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 6)$.



— La représentation graphique de $f_2(x) = |x^2 - 5x + 6|,\ x \in \mathbb{R}$, s'obtient à partir de la représentation ci-dessus. On a en effet

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x \notin [2, 3] \\ -(x^2 - 5x + 6) & \text{si} \quad x \in [2, 3] \end{cases} ;$$

il suffit donc d'effectuer une symétrie orthogonale d'axe X pour les points dont les abscisses varient entre 2 et 3.

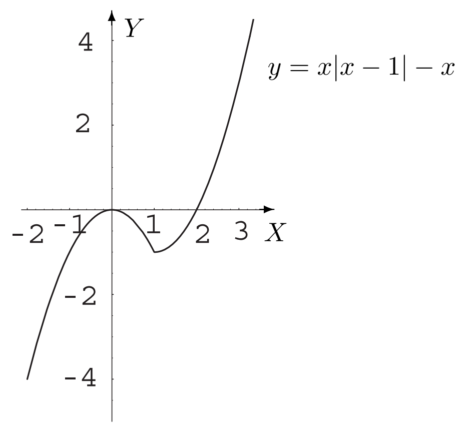


— La fonction f_3 peut aussi être définie par

$$f_3 : x \mapsto \left\{ \begin{array}{lll} x(x-1)-x = x^2-2x & \text{si} & x \geq 1 \\ x(-x+1)-x = -x^2 & \text{si} & x < 1 \end{array} \right. .$$

Représentation de $f_3(x),\ x \geq 1$. L'équation $y = x^2 - 2x$ est l'équation de la parabole convexe dont le sommet a pour coordonnées $(1, -1)$ et qui rencontre l'axe X en des points de coordonnées $(0, 0)$ et $(2, 0)$; on ne représente que la partie de la courbe correspondant aux valeurs de x supérieures à 1.

Représentation de $f_3(x),\ x < 1$. L'équation $y = -x^2$ est l'équation de la parabole concave dont le sommet est à l'origine ; on n'en représente que la partie correspondant aux valeurs de x strictement inférieures à 1.



Exercice 3

— Soit $f_1 : x \mapsto f_1(x) = x - 1$; on a dom $(f_1) = \mathbb{R}$.
Cette fonction a pour image l'ensemble $\mathbb{R}$. En effet, d'une part, on a im $(f_1) \subset \mathbb{R}$ car si x est réel, $f_1(x) = x - 1$ est réel aussi ; d'autre part, on a $\mathbb{R} \subset$ im (f_1) car si y est un réel alors $x = y + 1$ est un réel tel que $f_1(x) = y$.
Cette fonction est injective sur $\mathbb{R}$ car si x et x' sont des réels distincts alors $x - 1 \neq x' - 1$, ce qui équivaut à $f_1(x) \neq f_1(x')$.
Il s'ensuit que $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection d'inverse $f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y \mapsto y + 1$.

— Soit $f_2 : x \mapsto f_2(x) = x^2$; on a dom $(f_2) = \mathbb{R}$.
Cette fonction a pour image l'ensemble $[0, +\infty[$. En effet, d'une part, on a im $(f_2) \subset [0, +\infty[$ car si x est réel, $f_2(x) = x^2$ est un réel positif ; d'autre part, on a $[0, +\infty[\subset$ im (f_2) car si y est un réel positif alors $x = \sqrt{y}$ est tel que $f_2(x) = y$.
Cette fonction n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car x et $-x$ ont toujours la même image mais si on réduit son domaine de définition, on peut la rendre injective. On peut, par exemple, envisager les deux cas suivants, mais on pourrait en envisager d'autres encore.

1er cas : $f_2 : [0, +\infty[\ \to \ [0, +\infty[\quad x \mapsto x^2$.
C'est une bijection d'inverse $f_2^{-1} : [0, +\infty[\ \to \ [0, +\infty[\quad y \mapsto \sqrt{y}$.

2ème cas : $f_2 :]-\infty, 0] \ \to \ [0, +\infty[\quad x \mapsto x^2$.
C'est une bijection d'inverse $f_2^{-1} : [0, +\infty[\ \to \ ]-\infty, 0] \quad y \mapsto -\sqrt{y}$.

— Soit $f_3 : x \mapsto f_3(x) = x^2 + 1$; on a dom $(f_3) = \mathbb{R}$.

Cette fonction a pour image l'ensemble $[1, +\infty[$. En effet, d'une part, on a im $(f_3) \subset [1, +\infty[$ car si x est réel, on a $x^2 \geq 0$ et donc $f_3(x) = x^2 + 1 \geq 1$; d'autre part, on a $[1, +\infty[\subset$ im (f_3) car si $y \geq 1$ alors $x = \sqrt{y-1}$ est tel que $f_3(x) = y$.
Cette fonction n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car x et $-x$ ont toujours la même image mais si on réduit son domaine de définition, on peut la rendre injective. On peut, par exemple, envisager les deux cas suivants.

1er cas : $f_3 : [0, +\infty[\to [1, +\infty[\quad x \mapsto x^2 + 1$.
C'est une bijection d'inverse $f_3^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[\quad y \mapsto \sqrt{y-1}$.

2ème cas : $f_3 :]-\infty, 0] \to [1, +\infty[\quad x \mapsto x^2 + 1$.
C'est une bijection d'inverse $f_3^{-1} : [1, +\infty[\to]-\infty, 0] \quad y \mapsto -\sqrt{y-1}$.

— Soit $f_4 : x \mapsto f_4(x) = \frac{1}{x}$; on a dom $(f_4) = \mathbb{R}_0$.
Cette fonction a pour image l'ensemble $\mathbb{R}_0$. En effet, d'une part, on a im $(f_4) \subset \mathbb{R}_0$ car si x est un réel non nul, $f_4(x) = \frac{1}{x}$ est réel non nul aussi ; d'autre part, on a $\mathbb{R}_0 \subset$ im (f_4) car si y est un réel non nul alors $x = \frac{1}{y}$ est tel que $f_4(x) = y$.
Cette fonction est injective sur $\mathbb{R}_0$ car si x et x' sont des réels distincts non nuls alors $\frac{1}{x} \neq \frac{1}{x'}$ ce qui équivaut à $f_4(x) \neq f_4(x')$.
Il s'ensuit que $f_4 : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$ est une bijection d'inverse $f_4^{-1} : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 \quad y \mapsto \frac{1}{y}$.

Exercice 4

— Effectuons la division du polynôme $P(x) = x^3 + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$, par le polynôme $Q(x) = 2x^2 - x,\ x \in \mathbb{R}$, de la façon suivante

$$\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2 - x \\ \cline{8-8}
x^3 & - & (1/2)x^2 & & & & & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ \cline{1-7}
 & & (1/2)x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & (1/2)x^2 & - & (1/4)x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & (9/4)x & + & 1 &
\end{array}$$

Comme le degré du polynôme $\frac{9}{4}x + 1,\ x \in \mathbb{R}$, est 1, donc strictement inférieur au degré de Q, la division est terminée. Ainsi, le quotient est le polynôme $S(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4},\ x \in \mathbb{R}$, et le reste est le polynôme $R(x) = \frac{9}{4}x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

— Si $P(x) = -x^5 + 1,\ x \in \mathbb{R}$, et $Q(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
- & x^5 & + & 0x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + \ 1 & x - 1 \\ \cline{12-12}
- & x^5 & + & 1x^4 & & & & & & & & -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ \cline{1-11}
 & & - & x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + \ 1 & \\
 & & - & x^4 & + & 1x^3 & & & & & & \\ \cline{3-11}
 & & & & - & x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + \ 1 & \\
 & & & & - & x^3 & + & 1x^2 & & & & \\ \cline{5-11}
 & & & & & & - & x^2 & + & 0x & + \ 1 & \\
 & & & & & & - & x^2 & + & 1x & & \\ \cline{7-11}
 & & & & & & & & - & x & + \ 1 & \\
 & & & & & & & & - & x & + \ 1 & \\ \cline{9-11}
 & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

ce qui montre que P est divisible par Q et que le quotient est le polynôme $S(x) = -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.
Pour effectuer cette division, on peut aussi utiliser la grille d'Horner qui se présente sous la forme suivante

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline
 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0
\end{array}$$

coefficients du quotient reste

Exercice 5

1. La fraction donnée étant propre (degré du numérateur strictement inférieur à celui du dénominateur, ces deux polynômes étant sans zéro commun), son dénominateur étant factorisé et tous les

coefficients étant réels, on sait qu'il existe des réels uniques A et B tels que

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Cette égalité est équivalente à

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\},$$

ou encore à $1 = A(x-2)+Bx, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$, puisque ces fractions égales ont même dénominateur. Vu les propriétés des polynômes, on obtient aussi $1 = A(x-2) + Bx$ pour tout x réel ou encore $1 = (A + B)x - 2A, \ x \in \mathbb{R}$. Vu les propriétés des polynômes, cette relation est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{ll} A+B=0 & \text{égalité des coefficients des termes en } x \\ -2A=1 & \text{égalité des termes indépendants} \end{array}\right. ,$$

lequel a pour solution $A = -1/2$ et $B = 1/2$.
Finalement,

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2(x-2)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

2. La fraction donnée étant propre, son dénominateur étant factorisé et tous les coefficients étant réels, on sait qu'il existe des réels uniques A, B et C tels que

$$\frac{1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\},$$

égalité équivalente à $1 = A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$, ou encore à $1 = (A + B)x^2 + (-4A - 2B + C)x + 4A, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Vu les propriétés des polynômes, l'égalité précédente est également vraie pour tout x réel. Cette relation est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ -4A-2B+C=0 \\ 4A=1 \end{array}\right. ,$$

lequel a pour solution $A = 1/4, \ B = -1/4$ et $C = 1/2$.
Ainsi,

$$\frac{1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{2(x-2)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

3. La fraction donnée étant propre, son dénominateur factorisé au maximum dans $\mathbb{R}$ et tous les coefficients étant réels, il existe des réels uniques A, B et C tels que

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}_0,$$

égalité équivalente à $1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x, \quad x \in \mathbb{R}_0$.

Vu les propriétés des polynômes, on a aussi $1 = (A+B)x^2 + Cx + A \quad \forall x \in \mathbb{R}$, relation équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}\right. ,$$

qui a pour solution $A = 1, \ B = -1$ et $C = 0$.
Finalement,

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}_0.$$

4. La fraction donnée est propre, son dénominateur se factorise sous la forme $(2-x)(2+x)$ et tous les coefficients sont réels ; il existe donc des réels uniques A et B tels que

$$\frac{x}{4-x^2}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{2+x},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\},$$

égalité équivalente à $x=A(2+x)+B(2-x),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

Vu les propriétés des polynômes, on a aussi $x=(A-B)x+2(A+B)\quad\forall x\in\mathbb{R}$, relation équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{l}A-B=1\\ 2(A+B)=0\end{array}\right.,$$

lequel a pour solution $A=1/2$ et $B=-1/2$.
Ainsi,

$$\frac{x}{4-x^2}=\frac{1}{2(2-x)}-\frac{1}{2(2+x)},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}.$$

5. La fraction donnée est propre et son dénominateur se factorise sous la forme $(x+1)(x^2-x+1)$, le second facteur ayant un discriminant strictement négatif ; celui-ci est donc non factorisable dans $\mathbb{R}$. Enfin, tous les coefficients sont réels. Dès lors, on sait qu'il existe des réels uniques A,B et C tels que

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},$$

égalité équivalente à $1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, donc encore à $1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Vu les propriétés des polynômes, cette relation est vraie pour tout réel x et donne lieu au système

$$\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\ -A+B+C=0\\ A+C=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}B=-A\\ C=1-A\\ -A-A+1-A=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=1/3\\ B=-1/3\\ C=2/3\end{array}\right..$$

Finalement,

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

6. La fraction donnée n'est pas propre ; on effectue donc d'abord la division, ce qui donne

$$\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{(x^2-4)+4}{x^2-4}=1+\frac{4}{x^2-4}=1+\frac{4}{(x-2)(x+2)}.$$

On sait alors qu'il existe des réels A et B uniques tels que

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\},$$

égalité équivalente à $4=A(x+2)+B(x-2),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, ou encore à $4=(A+B)x+2(A-B)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.
Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est vraie pour tout x réel et équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\ 2(A-B)=4\end{array}\right.,$$

lequel a pour solution $A=1$ et $B=-1$.
Finalement,

$$\frac{x^2}{x^2-4}=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}.$$

Exercice 6

— La fonction $x \mapsto f_1(x) = \cos(x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \mapsto f_2(x) = \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1+\cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq -1\} = \mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

— La fonction $x \mapsto f_3(x) = \sqrt{\sin(x)}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \geq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi] = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

— La fonction $x \mapsto f_4(x) = \sin(\sqrt{1-x^2})$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1],$$

puisque le binôme $1 - x^2$ est positif pour les valeurs de x comprises entre ses zéros -1 et 1.

— La fonction $x \mapsto f_5(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{2})}$ est définie sur

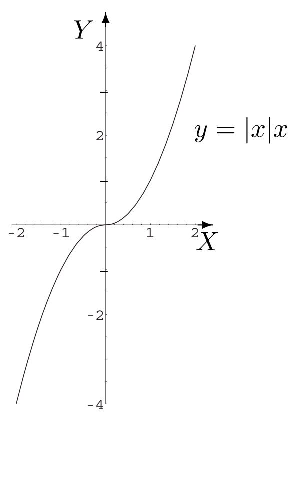
$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{\pi}{2} \in \text{ dom (tg) et } \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{2}) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ 2x + \frac{\pi}{2} \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + \frac{\pi}{2} \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Exercice 7

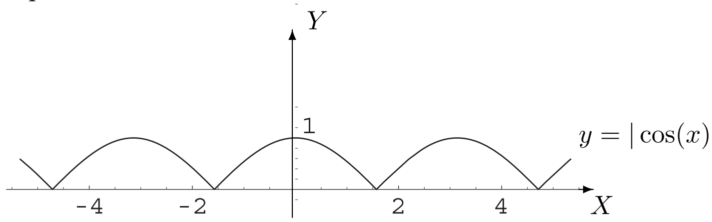
— Soit $f_1 : x \mapsto f_1(x) = |x|x$; on a dom $(f_1) = \mathbb{R}$. Cette fonction a pour image l'ensemble $\mathbb{R}$. En effet, d'une part, on a im $(f_1) \subset \mathbb{R}$ car si x est réel, $|x|$ est réel et $f_1(x) = |x|x$ est réel aussi ; d'autre part, on a $\mathbb{R} \subset$ im (f_1) car si y est un réel alors $x = \sqrt{y}$ si $y \geq 0$ et $x = -\sqrt{-y}$ si $y < 0$ sont tels que $f_1(x) = y$. De plus, $\forall x \in \text{dom}(f_1),\ \ -x \in \text{dom}(f_1)$. Ainsi, comme on a également $f_1(-x) = |-x|(-x) = -|x|x = -f_1(x)$, f_1 est une fonction impaire.
Ce type de fonction n'est pas périodique ; elle peut aussi s'écrire sous la forme

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

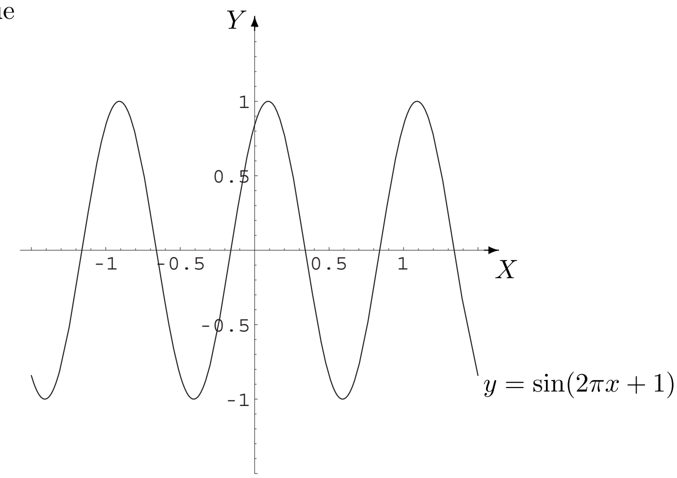
et voici sa représentation graphique



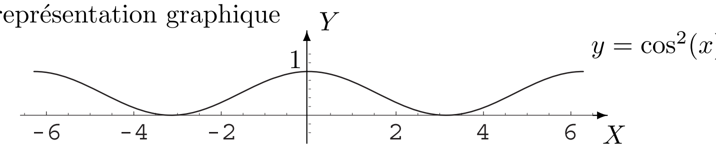
— Soit $f_2 : x \mapsto f_2(x) = |\cos(x)|$; on a dom $(f_2) = \mathbb{R}$. Cette fonction a pour image l'ensemble $[0,1]$; en effet, $\cos(x) \in [-1,1]$ donc $|\cos(x)| \in [0,1]$ pour tout réel x et, si $y \in [0,1]$ alors $x = \text{arcos }(y)$ est tel que $f_2(x) = y$. De plus, $\forall x \in \text{dom}(f_2),\ -x \in \text{dom}(f_2)$. Ainsi, comme on a également $f_2(-x) = |\cos(-x)| = |\cos(x)| = f_2(x)$, f_2 est une fonction paire.
Cette fonction est périodique de période π car $|\cos(x+\pi)| = |-\cos(x)| = |\cos(x)|$ et il n'y a pas de réel positif plus petit que π qui donne la même propriété.
La représentation graphique de cette fonction est la suivante



— Soit $f_3 : x \mapsto f_3(x) = \sin(2\pi x + 1)$; on a dom $(f_3) = \mathbb{R}$. Cette fonction a pour image l'ensemble $[-1,1]$ car $\sin(t) \in [-1,1]$ pour tout réel t et, si $y \in [-1,1]$, le réel $x = \frac{-1+\arcsin(y)}{2\pi}$ a y pour image par f_3. De plus, $\forall x \in \text{dom}(f_3),\ -x \in \text{dom}(f_3)$. Ainsi, comme on a $f_3(-x) = \sin(-2\pi x + 1) = -\sin(2\pi x - 1)$, f_3 n'est ni une fonction paire, ni une fonction impaire.
Voyons si cette fonction est périodique et considérons $f_3(x+T) = \sin[2\pi(x+T)+1] = \sin(2\pi x + 2\pi T + 1)$. Puisque la fonction sinus est périodique de période 2π, on a $f_3(x+T) = f_3(x)$ si $T = 1$, plus petit réel positif vérifiant l'égalité. Ainsi, la fonction f_3 est périodique de période 1 et voici sa représentation graphique



— Soit $f_4 : x \mapsto f_4(x) = \cos^2(x)$; on a dom $(f_4) = \mathbb{R}$. Cette fonction a pour image l'ensemble $[0,1]$; en effet, $\cos^2(x) \in [0,1]$ pour tout réel x et, si $y \in [0,1]$ alors $x = \text{arcos}(\sqrt{y})$ est tel que $f_4(x) = y$. De plus, $\forall x \in \text{dom}(f_4),\ -x \in \text{dom}(f_4)$. Comme on a également $f_4(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2(x)$, f_4 est une fonction paire.
Vu les formules de trigonométrie, on sait que $f_4(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Ainsi, $f_4(x+T) = \dfrac{1+\cos[2(x+T)]}{2} = \dfrac{1+\cos(2x+2T)}{2}$ et comme la fonction cosinus est périodique de période 2π, on a $f_4(x+T) = f_4(x)$ si $T = \pi$, plus petit réel positif vérifiant l'égalité. La fonction f_4 est donc périodique de période π et voici sa représentation graphique



Exercice 8

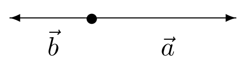
a) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ les deux vecteurs tels que $\|\vec{a}\| = 2\|\vec{b}\|$, l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mesurant π radians.
Le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut donc

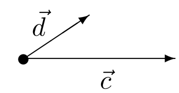
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 2\|\vec{b}\|\|\vec{b}\| \cos(\pi) = -2\|\vec{b}\|^2.$$

Si les vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont tels que $\|\vec{c}\| = 2\|\vec{d}\|$, l'angle entre eux mesurant 30 degrés (donc $\frac{\pi}{6}$ radians), leur produit scalaire vaut

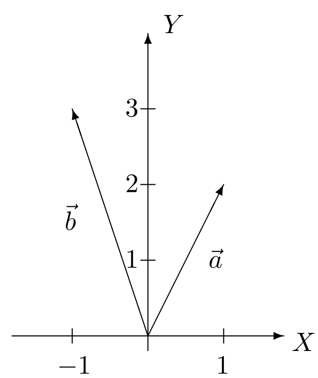
$$\vec{c} \bullet \vec{d} = 2\|\vec{d}\|\|\vec{d}\| \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\|\vec{d}\|^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\|\vec{d}\|^2.$$

Ces vecteurs peuvent se représenter de la façon suivante





b) Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont respectivement pour composantes $(1, 2)$ et $(-1, 3)$ alors $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1.(-1) + 2.3 = 5$.



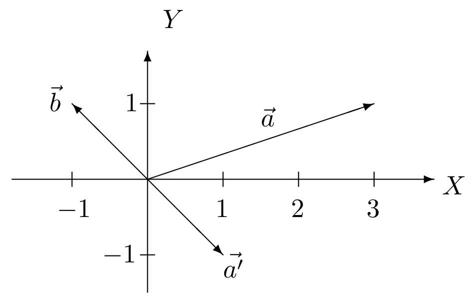
c) Si P a pour coordonnées cartésiennes $(-1, 1)$ alors $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.
L'angle polaire θ appartient donc au second quadrant et vaut $\pi + \text{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Ainsi, les coordonnées polaires du point P sont $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

Si P a pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3}, -1)$ alors $r = \sqrt{3+1} = 2$ et $\theta = 2\pi + \text{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$; ainsi, les coordonnées polaires du point P sont $(2, \frac{11\pi}{6})$.

Exercice 9

Rappelons que la projection orthogonale d'un vecteur $\vec{a}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{b} \neq \vec{0}$ est le vecteur $\vec{a'} = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$.

a) Comme $\vec{a} \bullet \vec{b} = 3.(-1) + 1.1 = -2$ et $\|\vec{b}\|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$, on a $\vec{a'} = \frac{-2}{2}\vec{b}$ ou encore $\vec{a'} = -\vec{b}$; le vecteur $\vec{a'}$ a donc pour composantes $(1, -1)$.



b) Par un raisonnement analogue, si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont respectivement pour composantes $(1,2,-1)$ et $(1,1,1)$ alors $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1.1 + 2.1 + (-1).1 = 2$, $\|\vec{b}\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ et $\vec{a'} = \frac{2}{3}\vec{b}$. Le vecteur $\vec{a'}$ a donc pour composantes $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Exercice 10

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ respectivement de composantes $(1,1,1)$, $(-2,0,3)$, $(-1/2,1,1)$.

a) Le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ a pour composantes

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = (3,-5,2).$$

b) Le vecteur $\vec{b} \wedge \vec{c}$ a pour composantes $(-3, 1/2, -2)$.
Dès lors, le réel $\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c})$ vaut $-9/2$ et le vecteur $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ a pour composantes $(-5/2, -1, 7/2)$.

L'expression $\vec{a} \bullet (\vec{b} \bullet \vec{c})$ n'a pas de sens puisque $\vec{b} \bullet \vec{c}$ est un réel et qu'un produit scalaire nécessite deux vecteurs ; il est donc impossible d'effectuer le produit scalaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b} \bullet \vec{c}$.

De même, l'expression $\vec{a} \wedge (\vec{b} \bullet \vec{c})$ n'a pas de sens puisque $\vec{b} \bullet \vec{c}$ est un réel et qu'un produit vectoriel nécessite deux vecteurs ; il est donc impossible d'effectuer le produit vectoriel de $\vec{a}$ et de $\vec{b} \bullet \vec{c}$.

Exercice 11

— La fonction $x \mapsto f_1(x) = \cos(\mathrm{arctg}(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \mapsto f_2(x) = \mathrm{arcos}(2x+1)$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \in \mathrm{dom}\ (\mathrm{arcos})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \le 2x+1 \le 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \le 2x \le 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 0\} = [-1,0]. \end{aligned}$$

— La fonction $x \mapsto f_3(x) = \arcsin(\sqrt{4-x^2})$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 4-x^2 \ge 0 \text{ et } \sqrt{4-x^2} \in \mathrm{dom}\ (\arcsin)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 4-x^2 \ge 0 \text{ et } -1 \le \sqrt{4-x^2} \le 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 4-x^2 \ge 0 \text{ et } \sqrt{4-x^2} \le 1\}. \end{aligned}$$

La première inéquation est vérifiée pour $-2 \le x \le 2$; la seconde est équivalente à $4 - x^2 \le 1$ donc encore à $3 - x^2 \le 0$ et elle est vérifiée pour $x \le -\sqrt{3}$ ou $x \ge \sqrt{3}$. Pour que la fonction f_3 soit définie, il faut que les deux inéquations soient vérifiées simultanément ; ainsi, $A = [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$.

— La fonction $x \mapsto f_4(x) = \mathrm{arcos}(\frac{1+x}{1-x})$ est définie sur

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 1-x \ne 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} \in \mathrm{dom}\ (\mathrm{arcos})\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \ne 1 \text{ et } -1 \le \frac{1+x}{1-x} \le 1\right\}.$$

Analysons la deuxième condition : elle est équivalente au système $\left\{\begin{array}{ll} -1 \leq \frac{1+x}{1-x} & (1) \\ \frac{1+x}{1-x} \leq 1 & (2) \end{array}\right.$

Résolvons l'inéquation (1). On a successivement

$$\frac{1+x}{1-x}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+x+1-x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$$

et l'ensemble des solutions de (1) est $S_1=]-\infty,1[$.
Une résolution de (2) est la suivante. On a

$$\frac{1+x}{1-x}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1+x-1+x}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} \leq 0$$

et une étude du signe de la fraction donne

x		0		1	
$\frac{2x}{1-x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (2) est $S_2=]-\infty,0] \cup]1,+\infty[$.
La fonction f_4 est donc définie sur $A=\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ et } x \in S_1 \cap S_2\}=]-\infty,0]$.

Exercice 12

— Soit $f_1 : x \mapsto f_1(x)=\sin(2x)$. Cette fonction, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas injective mais si on réduit son domaine de définition en prenant $-\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, alors elle devient injective.
Considérons donc la bijection $f_1 : [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \to [-1,1] \quad x \mapsto \sin(2x)$. Si on pose $y=\sin(2x)$ alors $2x=\arcsin(y) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\arcsin(y)$ et on a la bijection $f_1^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \quad x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

— Soit $f_2 : x \mapsto f_2(x)=\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4})$. Cette fonction, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{3\pi}{4}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, n'est pas injective mais si on réduit son domaine de définition en prenant $-\frac{\pi}{2} < x-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, alors elle devient injective.
Considérons donc la bijection $f_2 :]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4})$. Si on pose $y=\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4})$ alors $x-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}(y) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}(y)$ et on a la bijection $f_2^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[\quad x \mapsto \frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}(x)$.

— Soit $f_3 : x \mapsto f_3(x)=\arccos(x+1)$; on a $\operatorname{dom} f_3=\{x \in \mathbb{R} : x+1 \in [-1,1]\}=[-2,0]$, $\operatorname{im} f_3=[0,\pi]$ et cette fonction est injective. Si on pose $y=\arccos(x+1)$ alors $x+1=\cos(y) \Leftrightarrow x=-1+\cos(y)$.
Dès lors, $f_3^{-1} : [0,\pi] \to [-2,0] \quad x \mapsto -1+\cos(x)$.

Exercice 13

— Puisque l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x)=\sin(a)$ est $\{a+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi-a+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et que $\sin(-x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(-x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, on a

$$\begin{aligned} \sin(-x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } -x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } -x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S=\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

— Puisque l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x)=\cos(a)$ est $\{a+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-a+2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et que, vu les formules des angles complémentaires, $\sin(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, l'équation donnée est équivalente à $\cos(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$. On a donc

$$\begin{aligned} \cos(x)=\sin(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi \; (*) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x=\frac{\pi}{4}+k\pi, \end{aligned}$$

l'équation (*) étant impossible.
Ainsi, l'ensemble des solutions est $S=\{\frac{\pi}{4}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

— Si on pose $y = \sin(x)$, l'équation donnée s'écrit alors $y^2 - 4y + 3 = 0$; c'est une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$. Cette équation a donc pour solutions $\frac{4+2}{2} = 3$ et $\frac{4-2}{2} = 1$, ce qui donne $\sin(x) = 3$ ou $\sin(x) = 1$.
Comme l'image de la fonction sinus est $[-1, 1]$, la première équation est impossible. La seconde, donc aussi l'équation donnée, a pour ensemble de solutions $S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

— Si on utilise les formules des angles complémentaires et celles de Simpson, l'inéquation donnée devient

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}\right)\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

puisque $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$. Cette dernière inéquation est vérifiée si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$.
Une autre façon de prodéder est celle-ci.
Considérons $x \in [0, 2\pi[$. Si $\cos(x) > 0$ c'est-à-dire si $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ alors $\sin(x) \geq \cos(x) \Leftrightarrow \mathrm{tg}(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. Si $\cos(x) = 0$ c'est-à-dire si $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$ alors $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Si $\cos(x) < 0$ c'est-à-dire si $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ alors $\sin(x) \geq \cos(x) \Leftrightarrow \mathrm{tg}(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}]$.
Au total, pour $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$\sin(x) \geq \cos(x) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

donc

$$\sin(x) \geq \cos(x) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

Exercice 14

— La fonction $x \mapsto f_1(x) = \ln(-x + 1)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -x + 1 \in \mathrm{dom}\ (\ln)\} = \{x \in \mathbb{R} : -x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} =]-\infty, 1[.$$

— La fonction $x \mapsto f_2(x) = \ln(|2x - 3|)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \in \mathrm{dom}\ (\ln)\} = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}.$$

— La fonction $x \mapsto f_3(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \in \mathrm{dom}\ (\ln)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0\}.$$

Le trinôme $x^2 - 3x + 2$ se factorise sous la forme $(x - 1)(x - 2)$; ses zéros sont donc 1 et 2. De plus, puisque le coefficient de x^2 est positif, le trinôme est strictement positif si $x < 1$ ou $x > 2$. Ainsi, $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

— La fonction $x \mapsto f_4(x) = \ln(\arcsin(x))$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{dom}\ (\arcsin) \text{ et } \arcsin(x) \in \mathrm{dom}\ (\ln)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \text{ et } \arcsin(x) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x > 0\} =]0, 1]. \end{aligned}$$

— La fonction $x \mapsto f_5(x) = \ln(\ln(x))$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \text{dom } (\ln) \text{ et } \ln(x) \in \text{dom } (\ln)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } x > 1\} =]1, +\infty[. \end{aligned}$$

— La fonction $x \mapsto f_6(x) = \exp(x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
— La fonction $x \mapsto f_7(x) = \exp(\sqrt{1+x^3})$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 1 + x^3 \in \text{dom } (\sqrt{\ })\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 + x^3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (1+x)(1-x+x^2) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 + x \geq 0\} = [-1, +\infty[\end{aligned}$$

puisque $1 - x + x^2 > 0$ pour tout x.
— La fonction $x \mapsto f_8(x) = \exp(\sin(\text{arctg}(x)))$ est définie sur $\mathbb{R}$.
— La fonction $x \mapsto f_9(x) = \exp(\arcsin(2x+1))$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \in \text{dom } (\arcsin)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x + 1 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 2x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\} = [-1, 0]. \end{aligned}$$

— La fonction $x \mapsto f_{10}(x) = \log_4(x^2)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \text{dom } (\ln)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}_0.$$

— La fonction $x \mapsto f_{11}(x) = x^{\ln(x)} = \exp(\ln(x).\ln(x))$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} =]0, +\infty[$.
— La fonction $x \mapsto f_{12}(x) = \pi^{\sqrt{x-1}} = \exp(\sqrt{x-1}.\ln(\pi))$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = [1, +\infty[.$$

— La fonction $x \mapsto f_{13}(x) = x^{\arcsin(x)} = \exp(\arcsin(x).\ln(x))$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x > 0\} =]0, 1].$$

4.3 Solutions des exercices de la “liste type 2003/2004”

Exercice 1

$\mathbb{R}$, $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $\mathbb{R}$, $[-1, 2]$

Exercice 2

— f_1 : parabole dont le sommet a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ et passant notamment par les points de coordonnées $(-1, 0), (2, 0), (-2, -4)$ et $(3, -4)$.
— f_2 : pour les valeurs de x inférieures à -1 ou supérieures à 2, graphique symétrique de celui de f_1 par rapport à l'axe des abscisses ; pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2, même graphique que celui de f_1.
— f_3 : si $x \leq 2$: droite d'équation $y = 2x$ donc passant par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 2)$; si $x \geq 2$: parabole d'équation $y = 2x^2 - 2x$ dont le sommet a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et passant notamment par les points de coordonnées $(2, 4)$ et $(3, 12)$.

Exercice 3

Fonction	Domaine de définition	Image	Fonction inverse
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -x,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbb{R}$
f_3	$\mathbb{R}$	$[-1, +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x+1},\ x \in [-1, +\infty[$ si on réduit le domaine de f_3 à $[0, +\infty[$

Exercice 4

$P(x) = (x^2+1)(-2x+3) + (2x-2)$ et $P(x) = (-x+1)(2x^2-x-1)+2$

Exercice 5

$$\frac{1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\} \qquad \frac{x}{9-x^2} = \frac{1}{2(3-x)} - \frac{1}{2(3+x)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$
$$\frac{1}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4(x^2+4)},\ x \in \mathbb{R}_0 \qquad \frac{x}{5x-7} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5(5x+7)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{5}\right\}$$

Exercice 6

dom $(f_1) = \mathbb{R}$, dom $(f_2) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, dom $(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 7

Fonction	Domaine de définition	Période	Parité
f_1	$\mathbb{R}$	2π	pair
f_2	$\mathbb{R}$	2π	$--$
f_3	$\mathbb{R}$	1	*pair*
f_4	$\mathbb{R}$	$--$	$--$

Exercice 8

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ $\qquad S = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$

Exercice 9

Coord. cartésiennes	Coord. polaires
$(-1, -1)$	$(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$
$(0, -2)$	$(2, \frac{3\pi}{2})$

Coord. cartésiennes	Coord. polaires
$(-4, 0)$	$(4, \pi)$
$(\sqrt{3}, 1)$	$(2, \frac{\pi}{6})$

Exercice 10

Vecteur	Composantes
$\vec{x}$	$(-3, -4, -\frac{13}{2})$
$\vec{y}$	$(-\frac{21}{2}, \frac{7}{4}, 0)$

Exercice 11

Composantes de $\vec{u}$: $(\frac{16}{5}, \frac{-8}{5})$

$\vec{a}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan car ils ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Dans la base $\vec{a}, \vec{v}$, les composantes de $\vec{u}$ sont $(0, \frac{-8}{5})$ et celles de $\vec{e_1}$ sont $(-1, -2)$.

Exercice 12

Vecteur	Composantes
$\vec{w}$	$(0, 0, -2)$
$\vec{t}$	$(0, 0, 0)$

Exercice 13 : QCM

Vrai : (b), (f), (j).
Faux : (a), (c), (d), (e), (g), (h), (i), (m).
(k) : un réel (l) : un vecteur (n) : une combinaison linéaire de $\vec{b}, \vec{c}$.

Exercice 14

$\frac{1}{2}$ $\quad x, x \in [-1, 0]$ $\quad \frac{6\pi}{7}$ $\quad x - 2\pi, x \in [2\pi, 3\pi]$ $\quad -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ n'existe pas $\quad \frac{5\pi}{6}$

Exercice 15

$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -1] \cup [1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$
$\mathbb{R}_0$	$]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$[\frac{1}{e}, e]$
$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Exercice 16

$S = \{0\}$ $\quad S = [0, \ln(2)]$ $\quad S =]\frac{2}{3}, 1[\cup]1, +\infty[$

Exercice 17

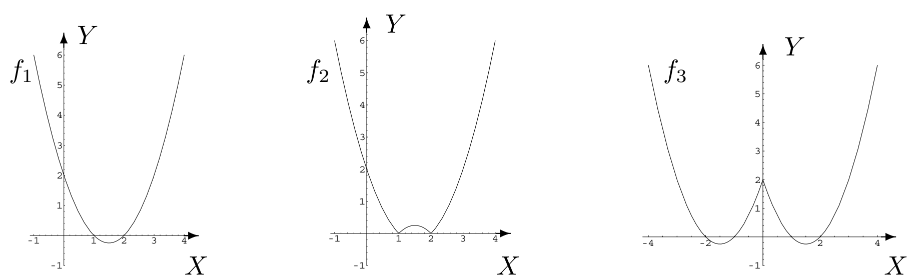
dom $(\ln(|x|)) = \mathbb{R}_0$: représenter le graphique de $f(x) = \ln(x)$ et le symétrique de ce graphique par rapport à l'axe des ordonnées.
dom $(\exp(-|x|)) = \mathbb{R}$: représenter le graphique de $f(x) = \exp(-x)$ si $x \geq 0$ et le symétrique de ce graphique par rapport à l'axe des ordonnées.
dom $(\ln(x+1)) =]-1, +\infty[$: représenter le graphique de $f(x) = \ln(x)$ puis le translater horizontalement d'une unité vers la gauche.
dom $(-1 + \exp(x)) = \mathbb{R}$: représenter le graphique de $f(x) = \exp(x)$ puis le translater verticalement d'une unité vers le bas.

4.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

$]-\infty, \frac{1}{2}]$ $\qquad \mathbb{R}$ $\qquad]-\infty, 1]$

Exercice 2



Le graphique de f_4 est le symétrique du graphique de f_1 par rapport à l'axe des ordonnées.
Le graphique de f_5 est le graphique de f_1 translaté horizontalement d'une unité vers la gauche.
Le graphique de f_6 est le graphique de f_1 translaté verticalement d'une unité vers le haut.

Exercice 3

f	$\mathrm{dom}(f)$	$\mathrm{im}(f)$	f^{-1}
$f_1(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y \mapsto y$
$f_2(x) = 2x + 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y \mapsto \frac{y-1}{2}$
$f_3(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$f_3^{-1} : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0\ y \mapsto \frac{1}{y}$
$f_4(x) = \frac{1}{x-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}_0$	$f_4^{-1} : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} \setminus \{1\}\ y \mapsto \frac{y+1}{y}$

Exercice 4

$$\frac{x^2-1}{1-x} = -x-1,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \qquad \frac{x^2+1}{(1-x)^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\frac{20}{(1+x^2)(x^2-4)} = \frac{-4}{1+x^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \qquad \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2x+1)},\ x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

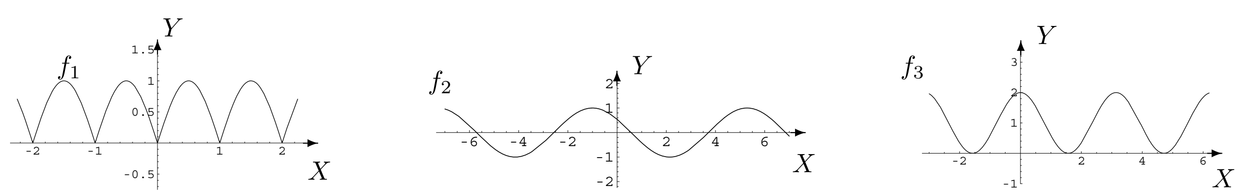
$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$$

Exercice 5

$$\mathrm{dom}(f_1) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \qquad \mathrm{dom}(f_2) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$$

Exercice 6

$f_1(x) = |\sin(\pi x)|$: dom $(f_1) = \mathbb{R}$, fonction périodique de période 1, fonction paire.
$f_2(x) = \cos(1 + x)$: dom $(f_2) = \mathbb{R}$, fonction périodique de période 2 π, fonction ni paire, ni impaire.
$f_3(x) = 2\cos^2(x)$: dom $(f_3) = \mathbb{R}$, fonction périodique de période π, fonction paire.



Exercice 7

$S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ $\qquad$ $S = \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$ $\qquad$ $S = [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \cup \{0, 2\pi\}$

Exercice 8

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées polaires
$(1, -1)$	$(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$
$(-\sqrt{3}, 1)$	$(2, \frac{5\pi}{6})$

Exercice 9

Composantes de $\vec{x}$: $(\frac{9}{2}, -1, -\frac{5}{2})$ $\qquad$ Composantes de $\vec{y}$: $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ $\qquad$ Composantes de $\vec{z}$: $(\frac{5}{4}, -5, \frac{17}{4})$

Exercice 10

Composantes de $\vec{w}$: $(0, 0, -2)$ Composantes de $\vec{t}$: $(0, 0, 0)$

Exercice 11 : QCM

(a) : le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
Vrai : (c), (h)
Faux : (b), (d), (e), (f), (g), (k)
(i) : un réel
(j) : un vecteur
(l) : une combinaison linéaire de $\vec{b}, \vec{c}$

Exercice 12

- a) $x, y \in \mathbb{R}$ et $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
  b) Cette proposition n'est vraie que si f est une fonction injective sur $\mathbb{R}$.
  c) $x, y \in \mathbb{R}$ et $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
  d) Cette proposition réciproque est toujours vraie.
- Voir notes de cours.
- $-1 \leq f(r) \leq 1,\ \forall r \in \mathbb{R}$ signifie que $\text{im}(f) \subset [-1, 1]$ et $\forall x \in [-1, 1], \exists r \in \mathbb{R}$ tel que $f(r) = x$ signifie que $[-1, 1] \subset \text{im}(f)$. L'expression mathématique résumée est $\text{im}(f) = [-1, 1]$.
- Voir notes de cours.

- Sur le cercle trigonométrique, à partir du point P_0 de coordonnées $(1, 0)$, on parcourt, dans le sens trigonométrique, un arc de cercle de longueur 3. On obtient ainsi un point P du cercle ; l'abscisse de ce point vaut $\cos(3)$.

Exercice 13

$\frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{6}$ impossible $\frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{6}$

Exercice 14

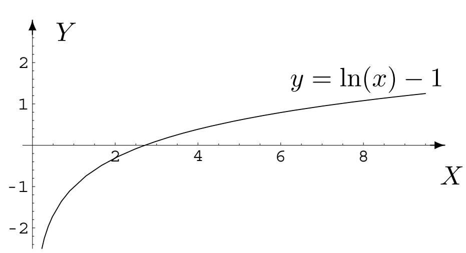
$S = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $S = \left\{\frac{4\pi}{3}, 2\pi, \frac{8\pi}{3}\right\}$

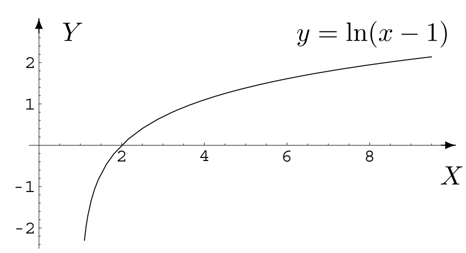
Exercice 15

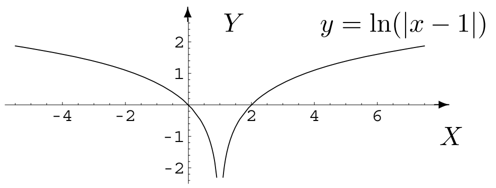
$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	$[0, +\infty[$	$[0, 1[$	$[0, 1] \cup [2, 3]$
$[0, 1] \cup [2, 3]$	$]-1, 1[$	$\left[-\sqrt{e}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right]$	$\left[\frac{1}{e}, e\right]$
$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$

Exercice 16

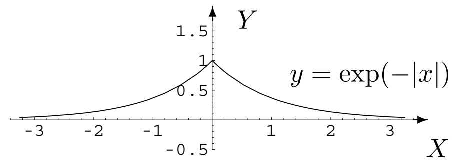
$]0, +\infty[$ $]1, +\infty[$ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\mathbb{R}$







Y
$y = \ln(|x-1|)$
2
1
-4
-2
2
4
6
X
-1
-2



Y
1.5
1
0.5
$y = \exp(-|x|)$
-3
-2
-1
1
2
3
-0.5
X

Chapitre 5

Limites - Dérivées - Primitives

5.1 Exercices de base sur les chapitres 2 et 3 (partim A)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. On considère la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) définie par $x_m = \frac{m}{m+2}$ pour tout m. Donner la valeur de x_{10} et la liste des valeurs des cinq premiers éléments de cette suite.
2. Les limites suivantes existent-elles ? Si la réponse est affirmative, effectuer leur calcul sans utiliser le théorème de l'Hospital.

$\lim_{x\to -1} \sqrt{x^2-3x+2}$	$\lim_{x\to \frac{3}{2}} \sqrt{x^2-3x+2}$	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$
$\lim_{x\to -1/2} \frac{\lvert 2x-1\rvert}{4x^2-1}$	$\lim_{x\to -\infty}(x^5-x^2+1)$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^5-2x+4}{-x^5+6}$
$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{-x^3+1}$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+3}}$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-x+2}}{\sqrt{x^2+1}}$
$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+x^2}-x)$	$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x+x^2}-x)$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{\lvert -x+3\rvert}{2x+5}$
$\lim_{x\to \pi} \frac{1}{1+\mathrm{tg}(x)}$	$\lim_{x\to 3\pi/2} \frac{1}{\cos(x)}$	$\lim_{x\to 0} \arccos(x^2-1)$
$\lim_{x\to 0} \arcsin(\sqrt{x^2+2})$	$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{arcotg}(2x^2-1)$	$\lim_{x\to 1} \ln(\lvert x-1\rvert)$
$\lim_{x\to -\infty} \ln(x^2-x+1)$	$\lim_{x\to +\infty} \ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})$	$\lim_{x\to \pi} \exp(\mathrm{tg}(x))$
$\lim_{x\to 0^+} \exp(1/x)$	$\lim_{x\to 0^-} \exp(1/x)$	$\lim_{x\to +\infty} \mathrm{arctg}(\exp(x))$

3. On donne les fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer leur dérivée première.

$\sin(\sqrt{x})$	$\mathrm{cotg}(2x-\pi/4)$	$\arccos(3x+1)$	$\mathrm{arctg}(x^2-1)$
$\ln(x^2)$	$\ln(x^2-1)$	$\exp(\sqrt[3]{x})$	2^{x^2}
$x^{\ln(x)}$	$\frac{1}{\ln^2(x)}$	$\mathrm{arctg}(\exp(x))$	$x\lvert x\rvert$

4. Où la fonction donnée par
$$f(x) = \arcsin(2x^2-1)$$
est-elle définie, continue, dérivable ? Calculer ensuite sa dérivée.
5. Pour chacune des fonctions données ci-dessous, répondre aux questions suivantes.
- Où la fonction est-elle dérivable ?
- Quelle est l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction au point d'abscisse x_0 ?
- Tracer le graphique de f et la tangente demandée.
$$f(x) = \mathrm{tg}(x),\ x_0 = 0; \quad f(x) = \ln(x),\ x_0 = 1; \quad f(x) = x\lvert x\rvert, x_0 = 0.$$

6. Calculer rapidement la dérivée d'ordre 8 de la fonction $f(x) = x\exp(x), x \in \mathbb{R}$.
7. Les limites suivantes peuvent-elles être envisagées ? Si la réponse est affirmative, les calculer si elles existent ; si elles n'existent pas, le justifier.

$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln(x)$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$	$\lim_{x\to +\infty} x^3\exp(-x)$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$	$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin(x)}$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{\exp(2x)}$
$\lim_{x\to +\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x}$	$\lim_{x\to -2} \frac{\lvert x\rvert-2}{x^2-4}$
$\lim_{x\to -\infty} \ln(x^2)$	$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$
$\lim_{x\to -\infty} \pi^x$	$\lim_{x\to 1} \log_3(x^2-1)$	$\lim_{x\to\ \infty} \frac{\exp(3x)}{\ln(x^2)}$

Pour les étudiants qui ont le plus d'heures de TP.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}, \quad \lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$$

8. Représentation graphique de fonctions (au moins une, pas nécessairement longue ; ceci dans le but de revoir la notion d'asymptote au graphique d'une fonction, les notions d'extrema et de concavité).
9. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Préciser chaque fois l'intervalle sur lequel vous travaillez.

$x\sqrt{x}+3$	$x\exp(2x)$	$(x+1)\sin(x)$	$x\cos^2(x)$	$\ln(x)$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	$\sqrt{4-x^2}$	$x\sqrt{4-x^2}$	$\frac{1}{x^2+4}$	$\frac{1}{x^2-4}$	$\frac{x}{x^2-4}$	$\frac{x}{(x^2+1)(x+1)}$

Liste 2003-2004

Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux informaticiens.
Les exercices (**) sont plus spécialement destinés aux informaticiens, aux chimistes et aux géographes.

1. On donne la suite $x_m = (-1)^m \sqrt[m]{m+1}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. Quelle est la valeur du treizième élément de cette suite ?
   On donne la suite $x_m = \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j}{j}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. Quelle est la valeur du cinquième élément de cette suite ?
2. * Déterminer la limite (si elle existe) des suites suivantes (voir notes de cours pour la théorie et les exemples fondamentaux) :

$$x_m = \sqrt{m^2+m-1} - \sqrt{m^2-m+1}\ (m \in \mathbb{N}_0), \quad x_m = \frac{(m!)^2}{(2m)!}\ (m \in \mathbb{N}_0)$$

$$x_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j(j+1)}\ (m \in \mathbb{N}_0), \quad x_m = \sum_{j=1}^m \frac{j}{m^2}\ (m \in \mathbb{N}_0), \quad x_m = \frac{a^m}{1+a^{2m}}\ (m \in \mathbb{N}_0).$$

Même question pour la suite définie par récurrence

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{m+1} = \sqrt{2+x_m}\ (m \in \mathbb{N}_0, m \geq 2).$$

3. * Exprimer $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ en vous servant de la propriété en "ε, η" (pour rappel, la notion de limite a été définie par l'intermédiaire de suites). Démontrer cette propriété.
4. Calculer (si possible) les limites suivantes (sans utiliser le théorème de l'Hospital)

$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+x-1}$	$\lim_{x\to 1/2} \sqrt{x^2+x-1}$	$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x-1}$
$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}$	$\lim_{x\to -2} \frac{x\lvert x-2\rvert}{x^2-4}$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\lvert x-2\rvert}{x^2-4}$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$	$\lim_{x\to 2^-} \ln(\lvert 2-x\rvert)$	$\lim_{x\to +\infty} \mathrm{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \exp(\mathrm{tg}(x))$	$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \exp(\mathrm{tg}(x))$	$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \exp(\mathrm{tg}(x))$
$\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$	$\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$	$\lim_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

5. * Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et les limites aux extrémités de ce domaine.
$$x \mapsto x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{|x|}\right), \quad x \mapsto x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{|x-1|}\right)$$

6. On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$\frac{x}{x^2-1}$	$\cos(\sqrt{1-4x^2})$	$\arcsin(\sqrt{1-x^2})$
$\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$	$\ln(x^2+x+1)$	$\ln(x^2)$
π^x	$(\pi^x)^x$	x^x
$\ln(\|2x+1\|+x)$	$(x-1)\|x-1\|$	$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

7. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ au point d'abscisse 0. Représenter cette fonction et cette tangente.

8. * Déterminer une relation de récurrence entre les dérivées successives de la fonction $f(x) = \exp(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer la valeur de $D^m f(0)$ pour tout naturel m.

9. QCM
   (a) Si la limite à gauche et la limite à droite des valeurs d'une fonction en un point de son domaine de définition existent, alors la limite en ce point existe et vaut la valeur de la fonction en ce point Vrai☐ Faux☐
   (b) * La fonction $x \mapsto x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{|x|}\right)$ se prolonge en une fonction continue dans $\mathbb{R}$ et possède au moins un zéro Vrai☐ Faux☐
   (c) Si une fonction est continue en un point de son domaine de définition (inclus dans $\mathbb{R}$) alors elle y est dérivable Vrai☐ Faux☐
   (d) Si une fonction est dérivable en un point de son domaine de définition (inclus dans $\mathbb{R}$) alors elle y est continue Vrai☐ Faux☐
   (e) Si une fonction est dérivable en un point de son domaine de définition (inclus dans $\mathbb{R}$) alors cette dérivée y est continue Vrai☐ Faux☐
   (f) La fonction $x \mapsto \arcsin(x^2-1)$ est dérivable en 0 Vrai☐ Faux☐

10. (**) On considère la courbe d'équation cartésienne $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$. Déterminer les points de cette courbe en lesquels la tangente à la courbe est horizontale.

11. (*) Démontrer que, pour tous réels x, y tels que $0 < y < x < \pi/2$, on a $\frac{x-y}{\cos^2(y)} \leq \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(y) \leq \frac{x-y}{\cos^2(x)}$.

12. Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt[5]{x}}$	$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x-1}\ \ln(2x+1)$
$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x^2-1)}{1-x^2}$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{1-x^2}$	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$
$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{tg}(x)-1}{x}$	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$	$\lim_{x\to -\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$
$\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x}$	$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{arctg}(2x)}$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{\|x-2\|(1-x)}}{x}$
$\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{tg}(x)}{1+\cos(x)}$	$\lim_{x\to -\infty} \exp\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$	$\lim_{x\to 0} x\exp(1/x)$.

13. (*) Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison).
$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}, \quad \lim_{x\to +\infty} (x^x)^x, \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to -\infty} \ln(|x-1|)\exp(x).$$

14. (**) Soit un réel strictement positif a. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de la fonction donnée explicitement ci-dessous et calculer la limite de ses valeurs en chacune des extrémités du domaine de définition.
$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$
15. Représenter graphiquement les fonctions f et g données explicitement ci-dessous.
$$f(x) = \frac{x}{3x-8}, \quad g(x) = \ln(|x-1|+1).$$
16. (*) Etudier la monotonie et déterminer l'image de la fonction
$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$
17. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle.

$\sqrt{x}\ln(x)$	$(2x-1)\exp(-x)$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\sqrt{1+3x}$	$x\sin(x)$
$x\cos^2(3x)$	$x^2\exp(x^3)$	$x\sqrt{1+2x^2}$	$\frac{x}{1+x^2}$	$\frac{x}{x^2-9}$
$\frac{1}{x^2+x+1}$	$\frac{1}{x^2(x^2+1)}$	$\sqrt{1-4x^2}$		

18. (*) Même question (sans nécessairement avoir vu les fonctions hyperboliques inverses)
$$\frac{1}{2+\cos(x)}, \quad (1+x^2)^{1/2}, \quad (1+x^2)^{3/2}, \quad (1+x^2)^{-1/2}, \quad (1+x^2)^{-3/2}.$$

Liste 2004/2005

Les exercices marqués de * sont plus spécialement destinés aux informaticiens (aux autres aussi si l'occasion se présente).

1. On donne la suite $x_m = \frac{(-1)^{2m-1}}{4m-1}$ ($m \in \mathbb{N}_0$). Quelle est la valeur du treizième élément de cette suite ?
   On donne la suite $x_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j(j+1)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$). Quelle est la valeur du troisième élément de cette suite ?
2. (*) Déterminer la limite (si elle existe) des suites suivantes (voir notes de cours pour la théorie et les exemples fondamentaux) :
$$x_m = \sqrt{m^2+m-1} - \sqrt{m^2-m+1} \ (m \in \mathbb{N}_0), \quad x_m = \frac{(m!)^2}{(2m)!} \ (m \in \mathbb{N}_0)$$
$$x_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j(j+1)} \ (m \in \mathbb{N}_0), \quad x_m = \sum_{j=1}^m \frac{j}{m^2} \ (m \in \mathbb{N}_0), \quad x_m = \frac{a^m}{1+a^{2m}} \ (m \in \mathbb{N}_0).$$
   Même question pour la suite définie par récurrence
$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{m+1} = \sqrt{2+x_m} \ (m \in \mathbb{N}_0, m \geq 2).$$
3. Calculer (si possible) les limites suivantes (sans utiliser le théorème de l'Hospital)

$\lim_{x\to\sqrt{2}} \sqrt{x^2-3x+2}$	$\lim_{x\to 1/2} \sqrt{x^2-3x+2}$	$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x+2}$
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{1-x}$	$\lim_{x\to 1} \frac{\lvert x^2-3x+2\rvert}{1-x}$
$\lim_{x\to 1^-} \frac{\lvert x^2-3x+2\rvert}{1-x}$	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{(1-x)^2}$	$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$
$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{\ln(\lvert x\rvert)}\right)$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\mathrm{tg}(x))$	$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}(x)\right)$
$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$	$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$	$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

4. (*) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et les limites aux extrémités de ce domaine.
$$x \mapsto x + \text{arctg}\left(\frac{x^2+1}{|x|}\right), \quad x \mapsto x + \text{arctg}\left(\frac{x^2+1}{|x-1|}\right)$$

5. On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$\frac{1}{x^2-1}$	$\sqrt{\sin(2x)}$	$\cos(\sin^2(x))$	$\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$
$\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$	$\ln(x^2+x+1)$	$\ln(x^2)$	3^x
$(4^x)^x$	$\text{arcos}(\cos(x))$	$\cos(\text{arcos}(x))$	$\ln\Big((1-x)\lvert x-1\rvert\Big)$

$$(*) f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

6. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \text{tg}(x)$ au point d'abscisse 0. Représenter cette fonction et cette tangente.
   Même question avec arctg et arcos.

7. (*) Déterminer une relation de récurrence entre les dérivées successives de la fonction $f(x) = \exp(x^2),\ x \in \mathbb{R}$. Calculer la valeur de $D^m f(0)$ pour tout naturel m.

8. A proposer aux étudiants
   (a) La fonction $x \mapsto \text{arcos}(\cos(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$ Vrai☐ Faux☐
   (b) La fonction $x \mapsto \text{arcos}(\cos(x))$ est périodique Vrai☐ Faux☐
   (c) La fonction $x \mapsto \text{arcos}(x)$ est périodique Vrai☐ Faux☐
   (d) La fonction $x \mapsto \text{arcos}(\cos(x))$ est paire Vrai☐ Faux☐
   (e) La fonction $x \mapsto \text{arcos}(\cos(x))$ est injective sur $\mathbb{R}$ Vrai☐ Faux☐
   (f) Si une fonction est continue en un point de son domaine de définition (inclus dans $\mathbb{R}$) alors elle y est dérivable Vrai☐ Faux☐
   (g) Si une fonction est dérivable en un point de son domaine de définition (inclus dans $\mathbb{R}$) alors elle y est continue Vrai☐ Faux☐
   (h) Si une fonction est dérivable en un point de son domaine de définition (inclus dans $\mathbb{R}$) alors cette dérivée y est continue Vrai☐ Faux☐
   (i) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$. Alors,
   — ☐ pour que cette fonction soit dérivable en 0, il est nécessaire qu'elle y soit continue
   — ☐ pour que cette fonction soit dérivable en 0, il est suffisant qu'elle y soit continue
   — ☐ pour que cette fonction soit dérivable en 0, il est nécessaire et suffisant qu'elle y soit continue
   — ☐ la continuité et la dérivabilité en 0 de cette fonction sont des propriétés équivalentes
   — ☐ pour que cette fonction soit continûment dérivable en 0, il suffit qu'elle y soit dérivable et continue
   — ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
   (j) Soit une fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1, 2[\setminus\{1\}$. L'expression
$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$
   signifie
   — ☐ pour toute suite de l'intervalle I qui converge vers 1, la suite des images des éléments de celle-ci par f est une suite qui converge vers $-\infty$
   — ☐ pour toute suite de l'intervalle I qui converge vers $-\infty$, la suite des images des éléments de celle-ci par f est une suite qui converge vers 1

- — ☐ il existe une suite de l'intervalle I qui converge vers 1 et telle que la suite des images des éléments de celle-ci par f soit une suite qui converge vers $-\infty$
- — ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte

(k) Soit une fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1,2] \setminus \{1\}$. Si l'on veut démontrer que la limite en 1 de la fonction f n'est pas $-\infty$,
- — ☐ il suffit de construire une suite d'éléments de I qui converge vers 1 et telle que la suite des images par f des éléments de celle-ci converge vers 1
- — ☐ il est nécessaire de construire une suite d'éléments de I qui converge vers 1 et telle que la suite des images par f des éléments de celle-ci converge vers 1
- — ☐ il suffit de construire une suite d'éléments de I qui converge vers 1 et telle que la suite des images par f des éléments de celle-ci converge vers $-\infty$
- — ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte

(l) Soit une fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1,2] \setminus \{1\}$. Si l'on veut démontrer que la limite en 1 de la fonction f n'existe pas,
- — ☐ il suffit de construire une suite d'éléments de I qui converge vers 1 et telle que la suite des images par f des éléments de celle-ci converge vers 1
- — ☐ il est nécessaire de construire une suite d'éléments de I qui converge vers 1 et telle que la suite des images par f des éléments de celle-ci converge vers 1
- — ☐ il suffit de construire une suite d'éléments de I qui converge vers 1 et telle que la suite des images par f des éléments de celle-ci converge vers $-\infty$
- — ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte

(m) Soit une fonction f définie sur l'intervalle $I =]-1,2[\setminus\{1\}$. Donner la signification de l'expression

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

en utilisasant le critère en ε, η.

9. (*) (i) Dans un repère orthonormé du plan, on considère la courbe d'équation cartésienne $y^2 = 4x$ et le point A de coordonnées cartésiennes $(1,0)$. On demande les coordonnées cartésiennes du point de cette courbe dont la distance au point A est minimale. Même question avec $A(3,0)$.

   (ii) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne la courbe d'équation cartésienne $2y^2 - x^2 = 3$. On demande de déterminer $r \in \mathbb{R}$ tel que la droite d'équation cartésienne $d_r : \ 2y - x = r$ soit tangente à la courbe.

10. (*) Applications directes du TVI et du TAF (cf fascicule d'exercices).

11. Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sqrt{x}) \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\ln(2x+1)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-1)}{|x-2|} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\ln(-x^2+3x-2)}{|x-2|} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(-x^2+3x-2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(|-x^2+3x-2|)}{x-2} \qquad \lim_{x\to 2\pi} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} \qquad \lim_{x\to +\infty} x e^{\frac{1}{x-1}} \qquad \lim_{t\to +\infty} \frac{e^{t^2}}{e^t}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\ln^2(x)}}{e^{\sqrt{\ln(x)}}} \qquad \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{-x^2+3x-2}{(x-1)^2}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\ \sin(3x)}{\operatorname{tg}^2(x)}$$

12. (*) Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison).

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}, \quad \lim_{x\to +\infty} (x^x)^x, \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right).$$

13. Représentation graphique de fonctions (au moins une-pas nécessairement longue-dans le but de revoir l'étude du graphique d'une fonction). Par exemple $f(x) = \frac{x-x^2+1}{1-x}$, $f(x) = xe^{-x}$, $f(x) = x\ln(|x|)$.
14. (*) (i) Démontrer que, pour tout naturel n, on a

$$(1+x)^n > 1 + nx, \quad \forall x > 0.$$

(ii) Démontrer que

$$\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

(iii) Déterminer la valeur en 0 de la dérivée 2004-ième de la fonction f donnée par $f(x) = x^6 \ln(1+x)$.

15. Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle (et ajouter quelques questions du type "quelle est la primitive qui vaut... en ...").

$\sqrt{1-2x}$	$x + x\cos(2x)$	$\cos^5(x)$	$\ln(x+1)$	$\mathrm{arctg}(x)$
$\sqrt{x^3}\ln(x)$	$(2x-1)e^{-x}$	$x\sin^2(4x)$	$x^2\sqrt{1+2x^3}$	$x3^x$
$\dfrac{x^2}{1-x^2}$	$\dfrac{x^2}{1+x^2}$	$\dfrac{x}{1+x^2}$	$\sqrt{4-9x^2}$	

16. (*) Même question (sans nécessairement avoir vu les fonctions hyperboliques inverses)

$$\frac{1}{2+\cos(x)}, \quad (1+x^2)^{1/2}, \quad (1+x^2)^{3/2}, \quad (1+x^2)^{-1/2}, \quad (1+x^2)^{-3/2}.$$

17. A proposer aux étudiants
   (a) On donne les fonctions

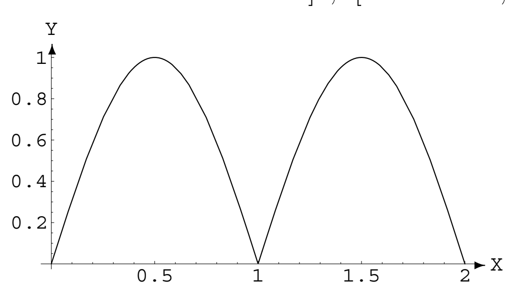
$$f \ : \ x \mapsto \frac{x^2}{x-1}, \quad g \ : \ x \mapsto \frac{1}{4-x}.$$

   (i) Déterminer le domaine de définition de la fonction de fonction $F = fog$.
   (ii) Déterminer l'expression explicite de la fonction F la plus simple possible.

   (b) Une substance "parente" se transforme en une substance "fille" selon une loi exponentielle décroissante de telle sorte que la quantitié $P(t)$ de la substance parente soit $P(t) = P(0)e^{-\lambda t}$ après t années. La quantité de substance "fille" après t années est donc donnée par $F(t) = P(0) - P(t)$. Montrer que

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{F(t)}{P(t)} + 1\right).$$

   (c) Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]0,2[$. Ci-dessous, on donne le graphique de Df.



   (i) Esquisser le graphique de $D^2 f$.
   (ii) A-t-on assez d'information pour esquisser le graphique de f de façon univoque ? Pourquoi ? Si ce n'est pas le cas, donner un exemple de représentation de f.

   (d) Quelles sont les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes sur l'intervalle $[0,2]$?

(e) Est-il correct d'affirmer qu'en supposant que les limites de f et g en le réel 2 existent, la limite du produit de ces fonctions en 2 est le produit des limites de f et g en 2 ? Pourquoi ?

(f) Est-il correct d'affirmer qu'en supposant que les limites de f et g en le réel 2 existent et sont égales, alors la limite de la différence entre f et g en ce réel est nulle ? Si la réponse est non, donner une hypothèse sous laquelle cette affirmation est vraie.

(g) Exprimer mathématiquement que deux primitives d'une même fonction f sur l'intervalle I sont nécessairement égales à une constante additive près.

(h) Comment justifier l'égalité suivante ?

$$(x+a)\left(\sum_{j=0}^{M} C_M^j\ x^j\ a^{M-j}\right) = \sum_{j=0}^{M} C_M^j\ x^{j+1}\ a^{M-j} + \sum_{j=0}^{M} C_M^j\ x^j\ a^{M-j+1}$$

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 5x+2$. Cette fonction est telle que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{r} |x-3| \leq \eta \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - 17| \leq \varepsilon.$$

a) Que signifie cette suite de symboles mathématiques ?
b) Si on prend $\varepsilon = 1$ alors on peut choisir η égal à
○ 1 ○ 0,5 ○ 0,25 ○ 0,1 ○ aucune proposition correcte

5.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1
En remplaçant m par 10, on obtient la valeur de x_{10} à savoir $\dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$. En remplaçant m successivement par 1, 2, 3, 4 et 5, on obtient les cinq premiers éléments de la suite, à savoir $x_1 = \frac{1}{1+2}$, $x_2 = \frac{2}{2+2}$, $x_3 = \frac{3}{3+2}$, $x_4 = \frac{4}{4+2}$ et $x_5 = \frac{5}{5+2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$.

Exercice 2

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-2) \geq 0\} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[.$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant -1 rencontre le domaine de définition A, on peut envisager la limite en -1. On a

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{(-1)^2 - 3(-1) + 2} = \sqrt{6}.$$

Par contre, on peut trouver un intervalle ouvert comprenant $\frac{3}{2}$, par exemple $]1, 2[$, dont l'intersection avec A est vide. La limite en $\frac{3}{2}$ n'a donc pas de sens.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre le domaine de définition A, on peut envisager la limite en 1. Ainsi, puisque $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 2x + 1) = 0$, on se trouve en présence de l'indétermination "$\frac{0}{0}$". Dès lors,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \infty.$$

On peut même préciser que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \frac{|2x-1|}{4x^2-1}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (2x-1)(2x+1) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant $-1/2$ rencontre le domaine de définition A, on peut envisager la limite en $-1/2$. On a

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{4x^2-1} = \infty.$$

On peut même préciser que $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

— La fonction $x \mapsto f(x) = x^5 - x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Cet ensemble n'étant pas minoré, on peut envisager la limite en $-\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - x^2 + 1) = -\infty.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{3x^5 - 2x + 4}{-x^5 + 6}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^5 + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[5]{6}\}$. Cet ensemble n'étant pas majoré, on peut envisager la limite en $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5 - 2x + 4}{-x^5 + 6} = -3.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{-x^3 + 1}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Cet ensemble n'étant pas minoré, on peut calculer la limite en $-\infty$ et on a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{-x^3 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+3}}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0 \text{ et } 2x + 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty[.$$

Cet ensemble n'étant pas majoré, on peut calculer la limite en $+\infty$ et on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\sqrt{-x+2}}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -x + 2 \geq 0 \text{ et } x^2 + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} =]-\infty, 2].$$

Cet ensemble n'étant pas minoré, on peut calculer la limite en $-\infty$ et on a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{-x+2}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{x + x^2} - x$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x + x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(1+x) \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[.$$

Cet ensemble n'étant pas borné, on peut calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a l'indétermination "$\infty - \infty$". Pour lever cette indétermination, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x+x^2}+x$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x^2-x^2}{\sqrt{x+x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

D'autre part, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$; ainsi, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$; dans ce cas, il n'y a pas d'indétermination.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{|-x+3|}{2x+5}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x+5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}.$$

Cet ensemble n'étant pas majoré, on peut calculer la limite en $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{|-x|}{2x} = \frac{1}{2}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}(x)}$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \text{ dom (tg) et } 1+\mathrm{tg}(x) \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{tg}(x) \neq -1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant π rencontre A, la limite en π a un sens et on a

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1}{1+\mathrm{tg}(x)} = 1.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant $\frac{3\pi}{2}$ rencontre A, la limite en $\frac{3\pi}{2}$ a un sens et on a $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos(x)} = \infty$. On peut même préciser que $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\cos(x)} = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\cos(x)} = +\infty$.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \arccos(x^2-1)$ est définie sur

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^2-1 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, la limite en 0 a un sens et on a $\lim_{x\to 0} \arccos(x^2-1) = \arccos(-1) = \pi$.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \arcsin(\sqrt{x^2+2})$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2 \geq 0 \text{ et } -1 \leq \sqrt{x^2+2} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \leq 0\} = \Phi.$$

La limite demandée n'a donc pas de sens puisque la fonction n'est pas définie.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \text{arcotg}(2x^2-1)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Cet ensemble n'étant pas minoré, on peut calculer la limite en $-\infty$. Ainsi, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1) = +\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \text{arcotg}(2x^2-1) = \lim_{y\to+\infty} \text{arcotg}(y) = 0.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(|x-1|)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre A, la limite en 1 a un sens et on a

$$\lim_{x\to1} \ln(|x-1|) = \lim_{y\to0} \ln(|y|) = \lim_{u\to0^+} \ln(u) = -\infty.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x^2-x+1)$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2-x+1 > 0\} = \mathbb{R}$ car $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$ et le coefficient de x^2 est strictement positif. Ainsi, l'ensemble A n'est pas minoré et on peut calculer la limite en $-\infty$. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2-x+1) = \lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ est définie sur

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x^2-1} > 0 \text{ et } x^2-1 \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 > 0\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$$

Cet ensemble n'étant pas majoré, on peut calculer la limite en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim_{y\to1} \ \ln(y) = 0.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \exp(\text{tg}(x))$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \in \text{ dom (tg)}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Comme tout intervalle ouvert comprenant π rencontre A, on peut calculer la limite en π et on a

$$\lim_{x\to\pi} \exp(\text{tg}(x)) = \lim_{y\to0} \exp(y) = 1.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}_0$. Comme tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, on peut calculer la limite en 0^+ et en 0^-. On a

$$\lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \exp(y) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to-\infty} \exp(y) = 0.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \text{arctg}(\exp(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré. On peut donc calculer la limite en $+\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}(\exp(x)) = \lim_{y\to+\infty} \text{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sin(\sqrt{x})$ est définie et continue sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$; elle est dérivable sur $]0, +\infty[$. Dans ce dernier ensemble, on a

$$Df(x) = D\sin(X)|_{X=\sqrt{x}}.D\sqrt{x} = \cos(\sqrt{x})\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \operatorname{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ est définie, continue et dérivable sur

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dans cet ensemble, on a

$$Df(x) = D\operatorname{cotg}(X)|_{X=2x-\frac{\pi}{4}}\ .\ D\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}\ .\ 2 = \frac{-2}{\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \operatorname{arcos}(3x + 1)$ est définie et continue sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 3x + 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq 3x \leq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} \leq x \leq 0\right\} = \left[-\frac{2}{3}, 0\right].$$

Elle est dérivable sur

$$B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < 3x + 1 < 1\} = \left]-\frac{2}{3}, 0\right[.$$

Sur cet ensemble, on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= D\operatorname{arcos}(X)|_{X=3x+1}\ .\ D(3x+1) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}\ .\ 3 \\ &= \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2-6x-1}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{-9x^2-6x}}. \end{aligned}$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 1)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = D\operatorname{arctg}(X)|_{X=x^2-1}\ .\ D(x^2-1) = \frac{1}{1+(x^2-1)^2}\ .\ 2x = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x^2)$ est définie, continue et dérivable sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}_0$. Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = D\ln(X)|_{X=x^2}\ .\ D(x^2) = \frac{1}{x^2}\ .\ 2x = \frac{2}{x}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x^2 - 1)$ est définie, continue et dérivable sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x-1) > 0\} =]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[.$$

Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = D\ln(X)|_{X=x^2-1}\ .\ D(x^2-1) = \frac{1}{x^2-1}\ .\ 2x = \frac{2x}{x^2-1}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \exp(\sqrt[3]{x})$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = D\exp(X)|_{X=\sqrt[3]{x}}\ .\ D(\sqrt[3]{x}) = \exp(\sqrt[3]{x})\ .\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = 2^{x^2} = \exp(x^2 . \ln(2))$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = D2^X|_{X=x^2} \ . \ D(x^2) = 2^{x^2} \ . \ \ln(2) \ . \ 2x = x \ 2^{x^2+1} \ln(2).$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = x^{\ln(x)} = \exp(\ln(x). \ln(x)) = \exp(\ln^2(x))$ est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Sur cet ensemble, on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= D\exp(X)|_{X=\ln^2(x)} \ . \ DY^2|_{Y=\ln(x)} \ . \ D\ln(x) \\ &= \exp(\ln^2(x)) \ . \ 2\ln(x) \ . \ \frac{1}{x} \\ &= x^{\ln(x)} \ . \ \frac{1}{x} \ . \ 2\ln(x) \\ &= 2 \ x^{\ln(x)-1} \ln(x). \end{aligned}$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\ln^2(x)}$ est définie, continue et dérivable sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } \ln^2(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } x \neq 1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = DX^{-2}|_{X=\ln(x)} \ . \ D\ln(x) = \frac{-2}{\ln^3(x)} \ . \ \frac{1}{x} = \frac{-2}{x \ \ln^3(x)}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \operatorname{arctg}(\exp(x))$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(x) = D\operatorname{arctg}(X)|_{X=\exp(x)} \ . \ D\exp(x) = \frac{1}{1+\exp^2(x)} \ . \ \exp(x) = \frac{\exp(x)}{1+\exp(2x)}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Etudions la dérivabilité de cette fonction en zéro ; on a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0.$$

Ainsi, la fonction donnée est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur cet ensemble, on a

$$Df(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \text{ ou encore } Df(x) = 2|x|.$$

Exercice 4

La fonction $x \mapsto f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$ est définie et continue sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq 0\} = [-1, 1].$$

Elle est dérivable sur

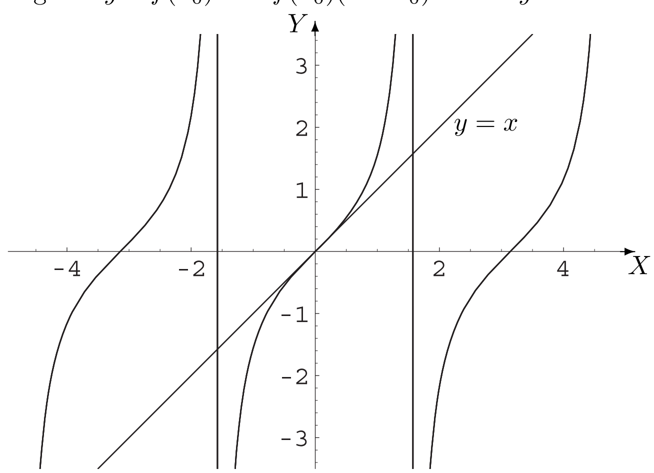
$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R} : -1 < 2x^2 - 1 < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } x^2 - 1 < 0\} \\ &= \ ]-1, 0[\cup]0, 1[. \end{aligned}$$

Sur B, on a

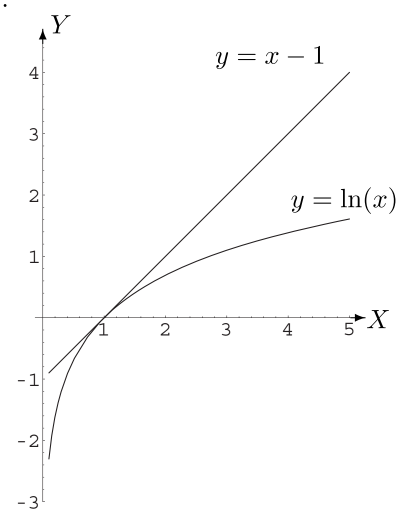
$$\begin{aligned}
Df(x) &= D\arcsin(X)|_{X=2x^2-1}\ .\ D(2x^2-1)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}\ .\ 4x\\
&= \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4+4x^2-1}}\\
&= \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}\\
&= \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}\\
&= \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad x\in]-1,0[\\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad x\in]0,1[\end{cases}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

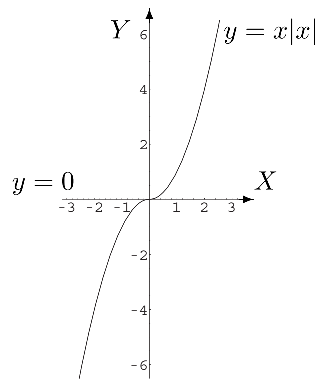
— La fonction $x \mapsto f(x) = \mathrm{tg}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Comme $Df(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, le coefficient angulaire de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $x_0 = 0$ vaut 1 et l'équation cartésienne de la tangente $y - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$ s'écrit $y = x$.



— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Comme $Df(x) = \dfrac{1}{x}$, le coefficient angulaire de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $x_0 = 1$ vaut 1 et l'équation cartésienne de la tangente s'écrit $y = x - 1$.



— La fonction $x \mapsto f(x) = x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $Df(x) = 2|x|$ (cf. exercice 3). Le coefficient angulaire de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $x_0 = 0$ vaut 0 et l'équation cartésienne de la tangente s'écrit $y = 0$.



Exercice 6

La fonction $x \mapsto f(x) = x\exp(x)$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En appliquant la formule de Leibniz, on a

$$D^8(x\ .\ \exp(x)) = \sum_{j=0}^{8} C_8^j\ D^j x\ D^{8-j}\exp(x).$$

Comme $D^j x = 0$ si $j \geq 2$ et $D^{8-j}\exp(x) = \exp(x) \quad \forall j = 0, \ldots, 8$, la formule s'écrit encore

$$D^8(x\ .\ \exp(x)) = C_8^0\ x\ .\ \exp(x) + C_8^1 \exp(x) = x\exp(x) + 8\exp(x) = (x+8)\exp(x).$$

Exercice 7

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$ est définie sur $A =]0, +\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, on peut envisager la limite de f en 0 mais on ne peut considérer que la limite à droite de zéro vu le domaine de définition. Comme $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, on peut tenter de lever l'indétermination "$0.\infty$" en appliquant le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{-1}{2}}}$.

Soit $V =]0, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$ sont dérivables dans V et $Dx^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{-1}{2}} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{D(\ln(x))}{D(x^{\frac{-1}{2}})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}\ x^{\frac{-3}{2}}} = -2\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dès lors, $\quad \lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x}\ln(x)) = 0.$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est définie sur $A =]0, +\infty[$, ensemble non majoré ; on peut donc calculer la limite de f en $+\infty$. Comme $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on peut tenter de lever l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" en appliquant le théorème de l'Hospital.

Soit $V =]\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand. Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ sont dérivables dans V et $Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{D(\ln(x))}{D(x^{\frac{1}{2}})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{-1}}{\frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}}} = 2\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{-1}{2}} = 0,$$

et dès lors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$

— La fonction $x \mapsto f(x) = x^3 \exp(-x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré ; on peut donc calculer la limite de f en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x) = 0$, on peut tenter de lever l'indétermination "$0.\infty$" en appliquant le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $f(x) = \dfrac{x^3}{\exp(x)}$.
Soit $V =]\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand. Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \exp(x)$ sont dérivables dans V et $D\exp(x) = \exp(x) \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{D(x^3)}{D(\exp(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\exp(x)}.$$
En appliquant à nouveau le théorème (les hypothèses étant vérifiées), on a successivement
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D(3x^2)}{D(\exp(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{\exp(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{D(6x)}{D(\exp(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\exp(x)} = 0.$$
Dès lors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 \exp(-x)\right) = 0.$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } x \neq 1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre A, on peut envisager la limite de f en 1. Comme $\lim\limits_{x\to1} \ln(x) = \lim\limits_{x\to1} (x-1) = 0$, on peut tenter de lever l'indétermination "$\frac{0}{0}$" en appliquant le théorème de l'Hospital.
Soit $V =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\setminus\{1\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-1$ sont dérivables dans V et $D(x-1) = 1 \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a
$$\lim_{x\to1} \frac{D(\ln(x))}{D(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{x} = 1,$$
et, dès lors, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^3}{x - \sin(x)}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x - \sin(x) \neq 0\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, on peut envisager la limite de f en 0. Comme $\lim\limits_{x\to0} x^3 = \lim\limits_{x\to0} (x - \sin(x)) = 0$, on peut tenter de lever l'indétermination "$\frac{0}{0}$" en appliquant le théorème de l'Hospital.
Soit $V =]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x - \sin(x)$ sont dérivables dans V et $D\sin(x) = \cos(x) \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a
$$\lim_{x\to0} \frac{D(x^3)}{D(x - \sin(x))} = \lim_{x\to0} \frac{3x^2}{1 - \cos(x)} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$
et
$$\lim_{x\to0} \frac{D(3x^2)}{D(1 - \cos(x))} = \lim_{x\to0} \frac{6x}{\sin(x)} = 6 \quad \text{puisque} \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$
Dès lors, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3}{x - \sin(x)} = 6.$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-1}{\exp(2x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré ; on peut donc calculer la limite de f en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(2x) = +\infty$, on peut tenter de lever l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" en appliquant le théorème de l'Hospital.
Soit $V =]\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand. Les fonctions $x \mapsto x - 1$ et $x \mapsto \exp(2x)$ sont dérivables dans V et $D\exp(2x) = 2\exp(2x) \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D(x-1)}{D(\exp(2x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\exp(2x)} = 0.$$

Dès lors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{\exp(2x)} = 0.$

— La fonction $x \mapsto f(x) = x \ \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } 1+\frac{1}{x} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x} > 0\} =]-\infty,-1[\, \cup\,]0,+\infty[$, ensemble non majoré ; on peut donc calculer la limite de f en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 1} \ln(y) = 0$, on peut tenter de lever l'indétermination "$0.\infty$" en appliquant le théorème de l'Hospital à la fonction écrite sous la forme $f(x) = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$.
Soit $V =]\varepsilon,+\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand. Les fonctions $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables dans V et $D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \ \forall x \in V$. De plus, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0^+} \frac{D(\ln(1+y))}{D\ y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{1+y} = 1.$$

Dès lors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right) = 1.$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non majoré ; on peut donc calculer la limite de f en $+\infty$. Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ alors $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\cos(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Ainsi, en appliquant le théorème de l'étau, on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$.

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{|x|-2}{x^2-4}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant -2 rencontre A, on peut envisager la limite de f en -2. Ainsi

$$\lim_{x\to-2} \frac{|x|-2}{x^2-4} = \lim_{x\to-2} \frac{-x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to-2} \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{4}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré ; on peut donc calculer la limite de f en $-\infty$. Ainsi, vu le théorème de la limite des fonctions composées

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2) = \lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\text{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ est définie sur $A =]0,+\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, on peut envisager la limite de f en 0 mais on ne peut considérer que la limite à droite de 0 vu le domaine de définition. D'autre part, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\text{arctg}(y)}{y}.$$

Comme $\lim\limits_{y\to 0^+} \text{arctg}(y) = \lim\limits_{y\to 0^+} y = 0$, on peut tenter de lever l'indétermination "$\frac{0}{0}$" en appliquant le théorème de l'Hospital.
Soit $V =]0,\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $y \mapsto \text{arctg}(y)$ et $y \mapsto y$ sont dérivables dans V et $Dy = 1 \neq 0 \ \forall y \in V$. De plus, on a

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{D(\text{arctg}(y))}{D\ y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{1+y^2} = 1.$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x \in [-1,1] \text{ et } \arcsin(x) \neq 0\} = [-1,1] \setminus \{0\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre A, on peut envisager la limite de f en 0. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = \lim\limits_{x\to 0} \arcsin(x) = 0$, on peut tenter de lever l'indétermination "$\frac{0}{0}$" en appliquant le théorème de l'Hospital.
Soit $V =]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ sont dérivables dans V et $D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{D(\sin(x))}{D(\arcsin(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0} (\sqrt{1-x^2}\cos(x)) = 1.$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)} = 1.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \pi^x$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; on peut donc calculer la limite de f en $-\infty$. Ainsi, vu le théorème de la limite des fonctions composées

$$\lim_{x\to -\infty} \pi^x = \lim_{x\to -\infty} \exp(x\ln(\pi)) = \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \log_3(x^2-1)$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 > 0\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre A, on peut envisager la limite de f en 1 mais on ne peut considérer que la limite à droite de 1 vu le domaine de définition. Ainsi, vu le théorème de la limite des fonctions composées

$$\lim_{x\to 1^+} \log_3(x^2-1) = \lim_{y\to 0^+} \log_3(y) = \frac{1}{\ln(3)} \lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\exp(3x)}{\ln(x^2)}$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \text{ et } \ln(x^2) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } x^2 \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$, ensemble non borné ; on peut donc calculer la limite de f en ∞. Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(3x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2) = +\infty$, on peut tenter de lever l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" en appliquant le théorème de l'Hospital.
Soit $V =]\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ assez grand. Les fonctions $x \mapsto \exp(3x)$ et $x \mapsto \ln(x^2)$ sont dérivables dans V et $D\ln(x^2) = \frac{2}{x} \neq 0\ \forall x \in V$. De plus, on a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{D(\exp(3x))}{D(\ln(x^2))} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3\exp(3x)}{2x^{-1}} = \frac{3}{2} \lim_{x\to +\infty} (x\exp(3x)) = +\infty.$$

Dès lors

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(3x)}{\ln(x^2)} = +\infty.$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\exp(3x)}{\ln(x^2)} = \lim_{x\to -\infty} \exp(3x) \ . \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\ln(x^2)} = 0.$$

Les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ étant différentes, la limite en ∞ n'existe pas.

— Pour la fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+x^2} - x$, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ ont été calculées à l'exercice 2.

— La fonction $x \mapsto f(x) = x^{(x^x)} = \exp(x^x \ . \ln(x)) = \exp(\exp(x\ln(x))\ln(x))$ est définie sur $A =]0,+\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $A \cap]0,+\infty[=]0,+\infty[$, on peut envisager la limite de f en 0^+.
Calculons tout d'abord $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x)) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x^{-1}}$ en levant l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" par application du théorème de l'Hospital.

Soit $V =]0, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables dans V et $D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \ \forall x \in V$. De plus, on a

$$\lim_{x\to 0^+} (x\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{D(\ln(x))}{D(x^{-1})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0^-.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp(x\ln(x)) = \lim_{y\to 0^-} \exp(y) = 1.$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to 0^+} (x^x \ . \ \ln(x)) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \exp(x^x \ . \ \ln(x)) = \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = (x^x)^x = x^{x^2} = \exp(x^2\ln(x))$ est définie sur $A =]0, +\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $A \cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$, on peut envisager la limite de f en 0^+.
Calculons tout d'abord $\lim_{x\to 0^+} (x^2\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-2}}$ en levant l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" par application du théorème de l'Hospital.
Soit $V =]0, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont dérivables dans V et $D\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3} \neq 0 \ \forall x \in V$. De plus, on a

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{D(\ln(x))}{D(x^{-2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} (\frac{-x^2}{2}) = 0^-.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \exp(x^2\ln(x)) = \lim_{y\to 0^-} \exp(y) = 1.$$

Exercice 8

— Représentons graphiquement la fonction $x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x-7} & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{x}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$.

— Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ vu son expression. Etudions sa continuité en 2. Puisque $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{2x-7} = -\frac{4}{3} \neq f(2) = 2$, la fonction f n'est pas continue en 2 ; elle n'y est donc pas dérivable non plus. Dès lors, f est continu et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

— Le domaine de définition de f n'étant pas borné, on peut calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2x-7} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

On peut donc dire que f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$. Vu le domaine de définition, f n'admet pas d'asymptote verticale mais pourrait avoir une asymptote oblique en $-\infty$. Pour cela, calculons

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x(2x-7)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2}{2x-7} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 7x}{2(2x-7)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{7x}{4x} = \frac{7}{4}.$$

On voit donc que f admet une asymptote oblique en $-\infty$ d'équation $y = \frac{2x+7}{4}$.

— La fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Si $x < 2$, on a $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{7}{4} + \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{2x-7}$ ce qui donne

$$Df(x) = \frac{1}{2} + \frac{49}{4} \cdot \frac{(-2)}{(2x-7)^2} = \frac{1}{2} - \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{(2x-7)^2} = \frac{4x^2 - 28x}{2(2x-7)^2}$$

et

$$D^2 f(x) = -\frac{49}{2} \cdot \frac{(-4)}{(2x-7)^3} = \frac{98}{(2x-7)^3}.$$

Si $x > 2$, on a $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ ce qui donne

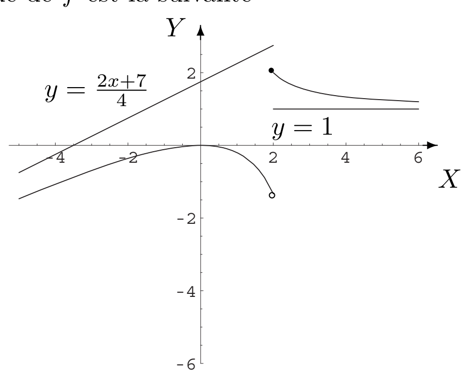
$$Df(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \quad \text{et} \quad D^2 f(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

On en déduit le tableau de signes suivant

x		0		2	
$Df(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$D^2 f(x)$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	croiss. conc.	max. conc.	décroiss. conc.	2	décroiss. conv.

Il y a donc un maximum au point d'abscisse 0. Ce maximum vaut 0 et c'est un maximum local puisque, par exemple, $f(2) = 2$.

— La représentation graphique de f est la suivante



— Représentons graphiquement la fonction $x \mapsto f(x) = \ln(|\sin(x)|)$.

— Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $A = \{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. De plus, elle est périodique de période π puisque $f(x+\pi) = \ln(|\sin(x+\ \pi)| = \ln(|-\sin(x)|)) = \ln(|\sin(x)|)$. Enfin, cette fonction est paire car lorsque $x \in A, -x \in A$ et $f(-x) = \ln(|\sin(-x)|) = \ln(|-\sin(x)|) = \ln(|\sin(x)|)$. Ainsi, il suffit d'étudier la fonction sur $]0, \pi[$. Dans cet intervalle, la fonction est définie, continue et dérivable et on a $f(x) = \ln(\sin(x))$.

— Calculons les limites aux bords de l'intervalle. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(\sin(x)) = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pi^-} \ln(\sin(x)) = \lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty,$$

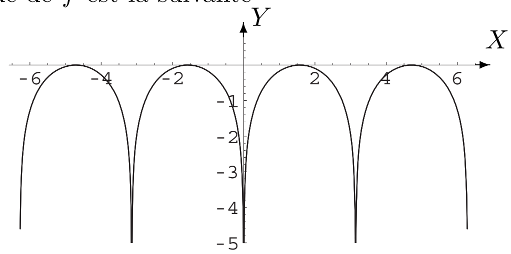
ce qui montre que les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$ sont des asymptotes verticales au graphique de f.

— La fonction f est indéfiniment continûment dérivable sur $]0, \pi[$ et on a

$$Df(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \operatorname{cotg}(x), \quad D^2 f(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}, \ \forall x \in]0, \pi[.$$

Ainsi, si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $Df(x) > 0$ et $D^2 f(x) < 0$ ce qui signifie que, sur cet intervalle, la fonction est croissante et concave.
Si $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $Df(x) < 0f$ et $D^2 f(x) < 0$; f est donc décroissante et concave sur l'intervalle considéré. Enfin, f admet un maximum pour $x = \frac{\pi}{2}$; ce maximum vaut 0.

— La représentation graphique de f est la suivante



Exercice 9

— La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}+3$ est continue sur $A = [0,+\infty[$; elle est donc primitivable sur $]0,+\infty[$. On obtient directement

$$\int (x\sqrt{x}+3)\ dx = \int x^{\frac{3}{2}}\ dx + 3\int 1\ dx \simeq \frac{2}{5}\ x^{\frac{5}{2}} + 3x \simeq \frac{2}{5}\ x^2\sqrt{x}+3x,\ \ x \in\ ]0,+\infty[.$$

— La fonction $f : x \mapsto x\exp(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est donc primitivable. Par une primitivation par parties, pour tout réel x, on a

$$\int x\exp(2x)\ dx = \int xD\left(\frac{\exp(2x)}{2}\right) dx = \frac{x}{2}\exp(2x) - \frac{1}{2}\int \exp(2x)\ dx \simeq \frac{x}{2}\exp(2x) - \frac{1}{4}\exp(2x).$$

— La fonction $f : x \mapsto (x+1)\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est donc primitivable. Par une primitivation par parties, pour tout réel x, on a

$$\int (x+1)\sin(x)\ dx = \int (x+1)D(-\cos(x))\ dx = -(x+1)\cos(x) + \int \cos(x)\ dx \simeq -(x+1)\cos(x)+\sin(x).$$

— La fonction $f : x \mapsto x\cos^2(x) = \frac{x}{2}(1+\cos(2x))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est donc primitivable. Par une primitivation par combinaison linéaire puis par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int x\ \cos^2(x)\ dx &= \frac{1}{2}\int x\ dx + \frac{1}{2}\int x\cos(2x)\ dx \\
&\simeq \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\int x\ D\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)\ dx \\
&\simeq \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\ \sin(2x) - \frac{1}{4}\int \sin(2x)\ dx \\
&\simeq \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\ \sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x),\ \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

— La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et y est donc primitivable. Par une primitivation par parties, on a

$$\int \ln(x)\ dx = \int \ln(x)\ .\ Dx\ dx = x\ \ln(x) - \int x\ .\ \frac{1}{x}\ dx \simeq x\ \ln(x) - x,\ \ x \in\ ]0,+\infty[.$$

— La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est donc primitivable. Par une primitivation par substitution, on a

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt\right]_{t=1+x^2} \simeq [\sqrt{t}]_{t=1+x^2} \simeq \sqrt{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

— La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ est continue sur $]-2,2[$ et y est donc primitivable. Comme $\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$, on a, par une primitivation par substitution,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\ dx = \left[\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt\right]_{t=\frac{x}{2}} \simeq [\arcsin(t)]_{t=\frac{x}{2}} \simeq \arcsin\left(\frac{x}{2}\right),\ \ x \in\ ]-2,2[.$$

— La fonction $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est continue sur $[-2,2]$; elle est donc primitivable sur $]-2,2[$. Si on pose $x = 2\sin(t)$ avec $t \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(t)} = \sqrt{4\cos^2(t)} = 2|\cos(t)| = 2\cos(t)$ car $\cos(t) > 0$ si $t \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et, par une primitivation par changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4-x^2}\; dx &= \left[\int 2\cos(t)\;.\;2\cos(t)\; dt\right]_{t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= 2\left[\int (1+\cos(2t))\; dt\right]_{t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&\simeq 2\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&\simeq 2[t+\sin(t)\cos(t)]_{t=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&\simeq 2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\;.\;\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) \\
&\simeq 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2},\;\; x \in \,]-2,2[.
\end{aligned}$$

— La fonction $f : x \mapsto x\sqrt{4-x^2}$ est continue sur $[-2,2]$; elle est donc primitivable sur $]-2,2[$. Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{4-x^2}\; dx &= -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt{4-x^2}\; dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\int \sqrt{t}\; dt\right]_{t=4-x^2} \\
&\simeq -\frac{1}{2}\;.\;\frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_{t=4-x^2} \\
&\simeq -\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3},\;\; x \in \,]-2,2[.
\end{aligned}$$

— La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est donc primitivable. Comme $x^2+4 = 4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)$, par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4}\; dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\; dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2+1}\; dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{t^2+1}\; dt\right]_{t=\frac{x}{2}} \\
&\simeq \frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}(t)\right]_{t=\frac{x}{2}} \\
&\simeq \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right),\;\; x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

— La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$; elle est donc primitivable sur $]-\infty,-2[$, $]-2,2[$ et $]2,+\infty[$. Si on décompose $f(x)$ en fractions simples, on a

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)},$$

ce qui donne

$$(A+B)x + 2(A-B) = 1 \text{ ou encore } \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Ainsi,

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx \simeq \frac{1}{4}\ln(|x-2|) - \frac{1}{4}\ln(|x+2|) \simeq \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right).$$

Dès lors,

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx \simeq \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right),\ x \in\,]-\infty,-2[\text{ (resp. } x \in\,]2,+\infty[) \\ \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right),\ x \in\,]-2,2[\end{cases}.$$

— La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$; elle est donc primitivable sur $]-\infty,-2[$, $]-2,2[$ et $]2,+\infty[$. Si on décompose $f(x)$ en fractions simples, on a

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)},$$

ce qui donne

$$(A+B)x + 2(A-B) = x \text{ ou encore } \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx \simeq \frac{1}{2}\ln(|x-2|) + \frac{1}{2}\ln(|x+2|) \simeq \frac{1}{2}\ln(|x^2-4|).$$

Dès lors,

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,dx \simeq \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(x^2-4),\ x \in\,]-\infty,-2[\text{ (resp. } x \in\,]2,+\infty[) \\ \frac{1}{2}\ln(4-x^2),\ x \in\,]-2,2[\end{cases}.$$

— La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)(x+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; elle est donc primitivable sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$. Si on décompose $f(x)$ en fractions simples, on a

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x^2+1)(x+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(x^2+1)(x+1)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C) = x \text{ ou encore } \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=-A \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &\simeq -\frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\,\text{arctg}(x) \\ &\simeq -\frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\,\text{arctg}(x). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)}\,dx \simeq \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\ln(-x-1)+\dfrac{1}{4}\ln(x^2+1)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x), & x \in \,]-\infty,-1[\\ -\dfrac{1}{2}\ln(x+1)+\dfrac{1}{4}\ln(x^2+1)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x), & x \in \,]-1,+\infty[\end{cases}.$$

5.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$x_{13} = -\sqrt[13]{14}$ $\qquad x_5 = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5} = -\frac{47}{60}$.

Exercice 2

$1, \quad 0^+, \quad 1^-, \quad \frac{1}{2}^+, \quad \begin{cases} 0 \text{ si } a \neq -1,1 \\ \frac{1}{2} \text{ si } a = 1 \\ \text{diverge si } a = -1 \end{cases}, \quad 2.$

Exercice 3

$\forall R > 0\ \exists\, \eta > 0$ tel que $\left.\begin{array}{l} 0 < -1-x \le \eta \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \ge R$

Exercice 4

$\sqrt{5}$	n'existe pas	$+\infty$
n'existe pas	∞	-1
1	$-\infty$	$\frac{\pi}{4}$
n'existe pas	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

Exercice 5

dom $f = \mathbb{R}_0$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

dom $f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 1+\dfrac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 6

f	dom f = dom$_c$ f	dom. dérivabilité	dérivée
$\frac{x}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$
$\cos(\sqrt{1-4x^2})$	$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$	$\frac{4x\sin(\sqrt{1-4x^2})}{\sqrt{1-4x^2}}$
$\arcsin(\sqrt{1-x^2})$	$[-1,1]$	$]-1,0[\,\cup\,]0,1[$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \in \,]-1,0[\\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ si } x \in \,]0,1[\end{cases}$
$\exp(\frac{1}{1-x})$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\exp(\frac{1}{1-x})\ .\ \frac{1}{(1-x)^2}$
$\ln(x^2+x+1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{2x+1}{x^2+x+1}$
$\ln(x^2)$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$\frac{2}{x}$
π^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\pi^x\ .\ \ln(\pi)$
$(\pi^x)^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\pi^{x^2}\ .\ 2x\ .\ \ln(\pi)$
x^x	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$x^x(\ln(x)+1)$
$\ln(\lvert 2x+1\rvert+x)$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]-\frac{1}{3},+\infty[$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]-\frac{1}{3},+\infty[$	$\begin{cases} \frac{1}{(x+1)} \text{ si } x < -1 \\ \frac{3}{(3x+1)} \text{ si } x > -\frac{1}{3} \end{cases}$
$(x-1)\lvert x-1\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2\lvert x-1\rvert$
$\begin{cases} x\sqrt{x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Exercice 7

Equation cartésienne de la tangente demandée : $y = x$ (première bissectrice).

Exercice 8

Cf. syllabus d'exercices (chapitre 3, exercice 10).

Exercice 9 : QCM

Vrai : (b), (d) Faux : (a), (c), (e), (f).

Exercice 10

Cf. syllabus d'exercices (chapitre 3, exercice 22).

Exercice 11

\- - -

Exercice 12

0	0	$+\infty$
$-\infty$	0	$-\frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{6}$	1
0	$\frac{1}{2}$	-1
∞	1	n'existe pas

Exercice 13

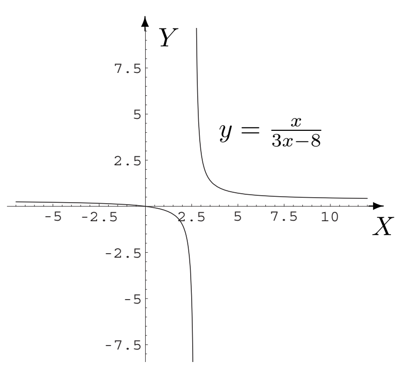
$0, \quad +\infty, \quad 0, \quad 0.$

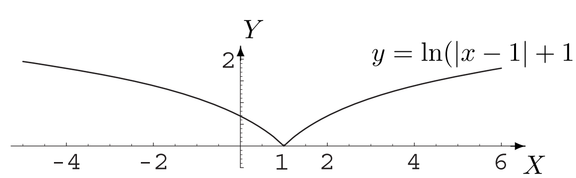
Exercice 14

Tous les domaines sont égaux à $]-\infty, -a[\, \cup\,]0, +\infty[$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^a \qquad \lim_{x\to-a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^a.$

Exercice 15





Exercice 16

f est strictement croissant sur $]0, +\infty[$ et im $f =]1, e^2[$.

Exercice 17

A une constante additive près, on a (les exercices sont envisagés ligne par ligne)

1. $\frac{2x}{3}\sqrt{x}(\ln(x)-\frac{2}{3}),\ x\in\,]0,+\infty[$
2. $(-2x-1)\exp(-x),\ x\in\mathbb{R}$
3. $x\ \mathrm{arctg}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\ x\in\mathbb{R}$
4. $\frac{2}{9}(1+3x)\sqrt{1+3x},\ x\in\,]-\frac{1}{3},+\infty[$
5. $-x\cos(x)+\sin(x),\ x\in\mathbb{R}$
6. $\frac{x^2}{4}+\frac{x\sin(6x)}{12}+\frac{\cos(6x)}{72},\ x\in\mathbb{R}$
7. $\frac{1}{3}\exp(x^3),\ x\in\mathbb{R}$
8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)\sqrt{1+2x^2},\ x\in\mathbb{R}$
9. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\ x\in\mathbb{R}$
10. $\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(x^2-9) \text{ si } x<-3 \text{ ou } x>3\\ \frac{1}{2}\ln(9-x^2) \text{ si } x\in\,]-3,3[\end{cases}$
11. $\frac{2\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right),\ x\in\mathbb{R}$
12. $-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}(x),\ \text{si } x<0 \text{ ou } x>0$
13. $\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}\arcsin(2x),\ x\in\,]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

Exercice 18

A une constante additive près, on a

$\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}(\frac{x}{2})),\ x\in\,]-\pi,\pi[$ $\qquad$ $\ln(\sqrt{1+x^2}+x),\ x\in\mathbb{R}$

$\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}$

$\frac{3}{8}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+\frac{3x}{8}\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{4}(1+x^2)\sqrt{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$

5.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

$x_{13}=\dfrac{-1}{51}$ $\qquad$ $x_3=\dfrac{3}{4}$

Exercice 2

$1,\quad 0^+,\quad 1^-,\quad \frac{1}{2}^+,\quad \begin{cases}\text{si} & a=-1 & x_m \text{ diverge}\\ \text{si} & a=1 & x_m \text{ converge vers } \frac{1}{2}\\ \text{si} & |a|\neq 1 & x_m \text{ converge vers } 0\end{cases},\quad 2$

Exercice 3

pas de sens	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
pas de sens	1	n'existe pas
1	∞ (à G : $+\infty$; à D : $-\infty$)	-1
1	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\dfrac{1}{2}$

Exercice 4

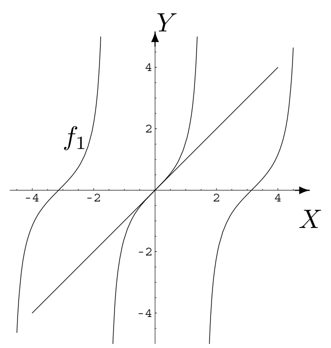
- $f(x)=x+\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x^2+1}{|x|}\right)$: $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}_0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;
- $f(x)=x+\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x^2+1}{|x-1|}\right)$: $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to 1} f(x)=1+\dfrac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

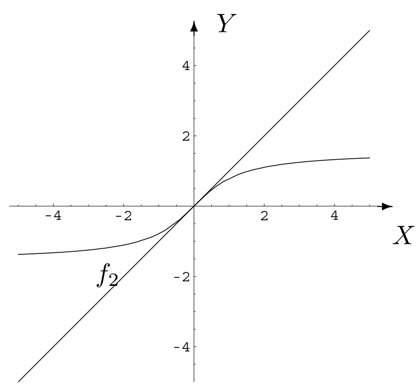
Exercice 5

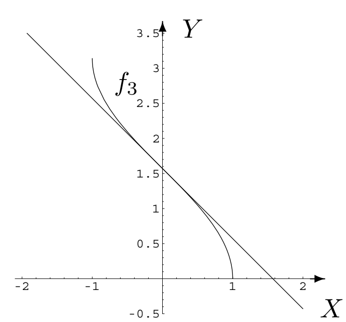
f	dom déf. et cont. de f	dom. dériv. de f	$Df(x)$
$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$
$\sqrt{\sin(2x)}$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi]$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi[$	$\dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$
$\cos(\sin^2(x))$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(\sin^2(x))\ .\ \sin(2x)$
$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\ .\ \dfrac{1}{(1-x)^2}$
$\ln(x^2+x+1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$
$\ln(x^2)$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$\dfrac{2}{x}$
3^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3^x\ .\ \ln(3)$
$(4^x)^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$4^{x^2}\ .\ 2x\ln(4)$
$\operatorname{arcos}(\cos(x))$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi[\\ -1 \text{ si } x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}](2k+1)\pi,(2k+2)\pi[\end{cases}$
$\cos(\operatorname{arcos}(x))$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	1
$\ln((1-x)\lvert x-1\rvert)$	$]-\infty,1[$	$]-\infty,1[$	$\dfrac{-2}{1-x}$
$\begin{cases} x\sqrt{x} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$

Exercice 6

f	équation cartésienne de la tangente au graphique de f en $x_0=0$
1) $\operatorname{tg}(x)$	$y=x$
2) $\operatorname{arctg}(x)$	$y=x$
3) $\operatorname{arcos}(x)$	$y=-x+\frac{\pi}{2}$







Exercice 7

$\forall m \in \mathbb{N} : D^{m+2} \exp(x^2) = 2xD^{m+1} \exp(x^2) + 2(m+1)D^m \exp(x^2)$

$\forall m \in \mathbb{N} : D^m f(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \text{ impair} \\ \dfrac{(2k)!}{k!} & \text{si} \quad m \text{ pair } (m = 2k) \end{cases}$

Exercice 8 : QCM

Vrai : (a), (b), (d), (g).
Faux : (c), (e), (f), (h).
(i), (j), (k) : première proposition.
(l) : quatrième proposition.
(m) : $\forall R > 0 \; \exists \; \eta > 0$ tel que $\left. \begin{array}{r} |x-1| \leq \eta \\ x \in I \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \leq -R.$

Exercice 9

(i) $(0,0)$; $\quad (1,-2)$ et $(1,2)$
(ii) $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$

Exercice 10

—

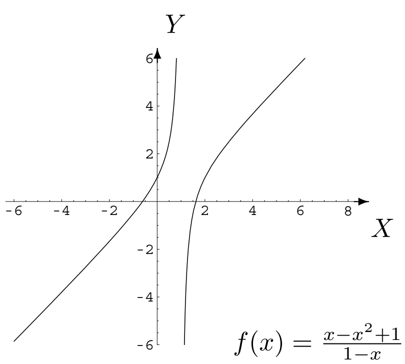
Exercice 11

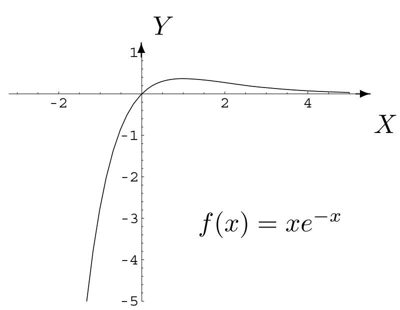
0^-	0^+	$+\infty$
-1^-	pas de sens mais $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	pas de sens
0^-	0	$-\infty$
$\frac{1}{3}^+$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	3

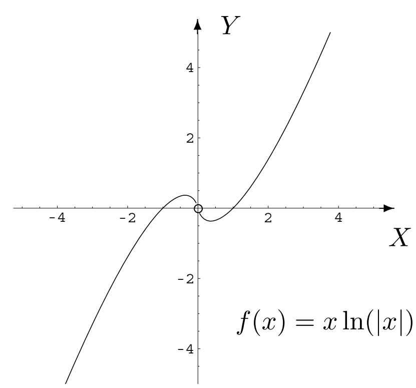
Exercice 12

0^+; $\quad +\infty$; $\quad 0^+$.

Exercice 13







Exercice 14

(i) — $\qquad$ (ii) — $\qquad$ (iii) $-\dfrac{2004!}{1998}$

Exercice 15

1. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3},\ x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

2. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}\sin(2x) + \dfrac{1}{4}\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$

3. $\sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x) + \frac{1}{5}\sin^5(x),\ x \in \mathbb{R}$

4. $(x+1)\ln(x+1) - x,\ x \in]-1, +\infty[$

5. $x\ \mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1),\ x \in \mathbb{R}$

6. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}(\ln(x) - \frac{2}{5}),\ x \in]0, +\infty[$

7. $(-2x-1)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$

8. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{16}\sin(8x) - \frac{1}{128}\cos(8x),\ x \in \mathbb{R}$

9. $\frac{1}{9}\sqrt{(1+2x^3)^3},\ x \in]-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty[$

10. $\frac{3^x}{\ln(3)}(x - \frac{1}{\ln(3)}),\ x \in \mathbb{R}$

11. $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & \text{si} \quad x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) & \text{si} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$

12. $x - \mathrm{arctg}(x),\ x \in \mathbb{R}$

13. $\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}$

14. $\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4-9x^2},\ x \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$

Exercice 16

1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}(\frac{x}{2})),\ x \in]-\pi, \pi[$

2) $\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x^2}+x) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$

3) $\frac{3}{8}\ln(\sqrt{1+x^2}+x) + \frac{3x}{8}\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{4}(1+x^2)\sqrt{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

4) $\ln(\sqrt{1+x^2}+x),\ x \in \mathbb{R}$

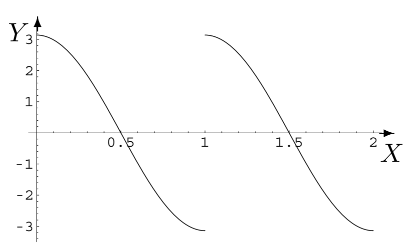
5) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R}$

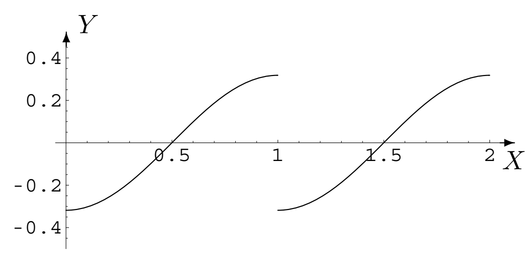
Exercice 17

(a) (i) $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{R} \setminus \{3,4\}$ $\qquad F(x) = \frac{1}{(4-x)(x-3)}$

(b) —

(c) (i)





(ii) On n'a pas assez d'informations pour esquisser le graphique de façon univoque car la fonction n'est définie qu'à une constante additive près. Ci-dessus, à droite, un exemple de représentation de f.

(d) Les fonctions constantes sur $[0,2]$.

(e) Ce n'est pas correct. On a, en effet, $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2} = \infty$ mais $\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$ n'existe pas.

(f) Ce n'est pas correct. On a, en effet, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x-2|} = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{|x-2|}\right) = +\infty$ et non zéro. L'affirmation est correcte si les limites sont égales et finies.

(g) Voir notes de cours

(h) Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

(i) a) $\lim\limits_{x\to 3}(5x+2) = 17$ $\qquad$ b) $0,1$.

Chapitre 6

Calcul intégral

6.1 Exercices de base sur le chapitre 4 (partim A)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ dx \qquad \int_0^1 xe^{-x}\ dx \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2(y)\ dy$$
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_0^1 \ln(t)\ dt \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \qquad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\ dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

2. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphiques des fonctions f, g, h données explicitement par $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = x$, $\quad h(x) = 2x$ et donner une représentation graphique de cette région du plan.

Liste 2003-2004

Les exercices (**) sont plus spécialement destinés aux informaticiens, aux chimistes et aux géographes. Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux informaticiens.

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer si l'intégrale de f sur A existe (c'est-à-dire si $\int_A f(x)\ dx$ représente bien un nombre)

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}),\ A = [0,1] \qquad f(x) = \frac{x}{1+x^2},\ A =]-\infty, 0] \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$
$$\int_0^1 \ln(x^2)\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}$$

2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)} dx \qquad \int_{1/2}^3 \sqrt{1+x}\ dx \qquad \int_{-1}^2 x^2 e^{-x} dx \qquad \int_0^\pi x\cos^2(x)\ dx$$
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\ dx \qquad \int_0^1 \ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-1}^0 \arcsin(x)\ dx \qquad \int_{-1}^0 x\arcsin(x)\ dx$$
$$(*) \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\ dx \qquad \int_{-2}^4 \frac{x+4}{x+3} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4x^2+9} dx \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{4x^2-9} dx$$

3. (*) Montrer que les fonctions $x \mapsto \ln(\sin(x))$ et $x \mapsto \ln(\cos(x))$ sont intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que leur intégrale sur cet ensemble [1] vaut $-\frac{\pi}{2}\ln(2)$.
4. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\{(x,y) : x \in [0, 2\pi],\ \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.
5. (*) Calculer (si possible)
$$\int_2^3 \frac{x+1}{(x-1)^5}dx, \quad \int_0^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3(x)}{2+\sin^2(x)} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\sin(x)}dx$$
6. (**) Montrer que [2]
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0.$$
Si $a, b > 0$, en déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi\ln(ab)}{2b}.$$
7. La vitesse d'une voiture, partant de l'origine O et se déplaçant en ligne droite suivant l'axe X est $v(t) = 10t - t^2,\ t \in [0, 10]$. Déterminer la position $x(t)$ de la voiture au temps $t \in [0, 10]$. Déterminer également quand l'accélération est nulle.

Liste 2004/2005

Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux informaticiens (aux autres aussi si l'occasion se présente, surtout pour les chimistes).

1. Calcul intégral, début
   — (*) Pour chacun des cas suivants, déterminer si f est intégrable sur A.
   $$f(x) = \cos(\sqrt{|x|}),\ A = [-1, 1];\ f(x) = \frac{x^2}{1+x^4},\ A = \mathbb{R};\ f(x) = \frac{1}{x^3},\ A =]0, 1] \text{ et } A = [1, +\infty[.$$
   — Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)
   $$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2(x)\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx \qquad \int_{1/2}^{3} \sqrt{3-x}\ dx \qquad \int_{-1}^{1} xe^{-x}\ dx \qquad \int_0^{\pi} x\cos(x)\ dx$$
   $$\int_{-1}^{1} \ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-2}^{4} \frac{x+4}{x+3}\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4x^2+9}\ dx \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{4x^2-9}\ dx \qquad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx$$
2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x,y) : x \in [-1, 1], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \leq y \leq \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.
3. Calculer (si possible)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}dx$$

1. Suggestion. Par changements de variable, on a $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\ dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\ dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(x))\ dx$. Alors $2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin(2x)}{2})\ dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + I$.
2. Suggestion. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$

4. (*) Montrer que les fonctions $x \mapsto \ln(\sin(x))$ et $x \mapsto \ln(\cos(x))$ sont intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que leur intégrale sur cet ensemble[3] vaut $-\frac{\pi}{2}\ln(2)$.
5. (*) Montrer que[4]
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0.$$
Si $a, b > 0$, en déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi \ln(ab)}{2b}.$$
6. La vitesse à laquelle s'accroît une population de virus est donnée au cours du temps par la fonction $\exp(3t),\ t \geq 0$.
a) Avec ces données, est-il possible de déterminer la population au temps 0 ? Pourquoi ?
Si la réponse est "oui", déterminer cette population.
b) Sachant qu'au départ la population était égale à 1 (million d'individus), déterminer la population au temps $t = 1$.
7. (*) Définir le produit de composition de deux fonctions : si f et g sont définies dans $\mathbb{R}$ et si l'intégrale a un sens, on pose
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$
Propriété d'associativité et de commutativité.
On considère $f = \chi_{[0,1]}$.
— Calculer $(f * f)(x),\ x \in \mathbb{R}$, $(f * f * f)(x),\ x \in \mathbb{R}$ et représenter ces fonctions.
— Pour tout naturel $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $B_m(x) = \underbrace{f * \ldots * f}_{m\text{facteurs}}$ (B-spline de degré $m-1$). Démontrer que
- pour tout m, la restriction de B_m à un intervalle du type $[k, k+1]$ ($k \in \{0, \ldots, m-1\}$) est un polynôme de degré $m-1$,
- pour tout m, la fonction B_m est nulle dans le complémentaire de $[0, m]$,
- pour tout $m \geq 2$, la fonction B_m appartient à $C_{m-2}(\mathbb{R})$,
- pour tout $m \geq 3$, on a $DB_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x-1),\ x \in \mathbb{R}$,
- pour tout m, on a $B_m(x) = \frac{x}{m-1}B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}B_{m-1}(x-1),\ x \in \mathbb{R}$; en déduire que $B_m(x) > 0$ pour tout $x \in]0, m[$,
- pour tout m, on a $B_m(x + \frac{m}{2}) = B_m(\frac{m}{2} - x),\ x \in \mathbb{R}$; qu'est-ce que cela implique pour le graphique de B_m ?
8. A proposer aux étudiants
— Si la somme de deux fonctions f, g est intégrable sur $[0, 1]$ alors l'intégrale de la somme $f + g$ est égale à la somme des intégrales de f et g. Vrai☐ Faux☐
— Si f, g sont deux fonctions continues et intégrables sur $[0, +\infty[$ alors
a) toute combinaison linéaire de f et g est aussi intégrable sur$[0, +\infty[$
b) l'intégrale d'une combinaison linéaire de f et g est égale à la combinaison linéaire des intégrales.
Exprimer mathématiquement la partie b) du résultat énoncé ci-dessus.
— Une fonction continue sur $[0, 2[$ est toujours intégrable sur $[0, 2[$ Vrai☐ Faux☐
— Une fonction continue sur $[0, 2[$ est toujours intégrable sur $[0, 1]$ Vrai☐ Faux☐
— Qu'appelle-t-on largeur d'un découpage ?
— On donne le découpage suivant de l'intervalle $[0, 1]$:
$$0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1.$$
Que vaut la largeur de ce découpage ?

---

3. Suggestion. Par changements de variable, on a $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(x))\,dx$. Alors $2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin(2x)}{2})\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + I$.
4. Suggestion. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$

— Si on augmente le nombre de points d'un découpage, on diminue toujours sa largeur.
Vrai□ Faux□

6.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

— Comme $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction continue sur $[1,2]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-\sqrt{1}) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

— Comme $f : x \mapsto x\ e^{-x}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_0^1 x\ e^{-x}\ dx = \int_0^1 xD(-e^{-x})\ dx = [-x\ e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1}+1 = 1-\frac{2}{e}.$$

— Comme $f : y \mapsto \sin^2(y) = \dfrac{1-\cos(2y)}{2}$ est une fonction continue sur $[0,2\pi]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(y)\ dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\ dy - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2y)\ dy = \frac{1}{2}[y]_0^{2\pi} - \frac{1}{4}[\sin(2y)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ .\ 2\pi = \pi.$$

— Comme $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une fonction continue sur $]0,1]$, ensemble borné non fermé, on doit étudier l'intégrabilité en 0. Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $s = \frac{1}{2}$ étant strictement inférieur à 1, la fonction est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$ et on a

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\ dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

— Comme $f : t \mapsto \ln(t)$ est une fonction continue sur $]0,1]$, ensemble borné non fermé, on doit étudier l'intégrabilité en 0. Considérons $\lim\limits_{t\to 0^+} (t^{\frac{1}{2}}\ln(t))$ et levons l'indétermination "$0\ .\ \infty$" par application du théorème de l'Hospital.
Soit $V =]0,\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$ sont dérivables dans V et $Dt^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \neq 0\ \forall t \in V$. De plus, on a

$$\lim_{t\to 0^+} (t^{\frac{1}{2}}\ln(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{t^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{D(\ln(t))}{D(t^{-\frac{1}{2}})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{-1}}{-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}} = -2\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dès lors, $\lim\limits_{t\to 0^+} (t^{\frac{1}{2}}\ln(t)) = 0$ et puisque cette limite existe et est finie, le critère d'intégration en θ (avec $\theta = \frac{1}{2} < 1$) permet d'affirmer que la fonction est intégrable en 0 et donc sur $]0,1]$. Ainsi,

$$\int_0^1 \ln(t)\ dt = \int_0^1 D(t)\ .\ \ln(t)\ dt = [t\ \ln(t)]_0^1 - \int_0^1 t\ .\ \frac{1}{t}\ dt = -[t]_0^1 = -1.$$

Autre méthode : la fonction f étant continue et négative sur l'intervalle d'intégration, on peut vérifier son intégrabilité en 0 et calculer la valeur de son intégrale par application de la définition.
Si la limite $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,dt$ est finie alors f est intégrable en 0 donc sur $]0,1]$ et la valeur de cette limite est aussi la valeur de l'intégrale.
Comme

$$F(x) = \int_x^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t)-t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -1 - \lim_{x\to 0^+} (x\ln(x)) = -1 - \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}},$$

on lève l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" par application du théorème de l'Hospital (les hypothèses étant vérifiées). Ainsi, puisque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{D\ln(x)}{D(x^{-1})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0,$$

f est intégrable sur $]0,1]$ et son intégrale vaut -1.

— Comme $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable. Si on effectue le changement de variables $g : t \mapsto x = \sin(t)$ entre $]0,\pi/2[$ et $]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\; dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\; \cos(t)\; dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\; \cos(t)\; dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\; dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\; dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

puisque $\cos(t) \geq 0$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

— Comme $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est une fonction paire continue sur $\mathbb{R}$, ensemble non borné, il suffit de vérifier l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 \,.\, \dfrac{1}{1+x^2}\right)$. Cette limite existe et est finie puisqu'elle vaut 1. Dès lors, par le critère d'intégration en θ avec $\theta = 2 > 1$, cela prouve que f est intégrable en $+\infty$. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2[\mathrm{arctg}(x)]_0^{+\infty} = 2\,(\lim_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}(x) - \mathrm{arctg}(0)) = 2 \,.\, \frac{\pi}{2} = \pi.$$

— Comme $f : x \mapsto x^2\, e^{-2x}$ est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ensemble non borné, on doit étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Considérons $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 \,.\, x^2 e^{-2x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 \,.\, e^{-2x})$; cette limite vaut 0 car "à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x". Puisque cette limite existe et est finie, le critère d'intégration en θ (avec $\theta = 2 > 1$) permet d'affirmer que la fonction est intégrable en $+\infty$ et donc finalement sur $[0,+\infty[$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^2\ e^{-2x}\ dx &= \int_0^{+\infty} x^2\ D\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{x^2\ e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\ e^{-2x}\ dx \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} x\ D\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{x\ e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\ dx \\
&= 0 - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

— Comme $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est une fonction continue sur $[2,+\infty[$, ensemble non borné, on doit étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Considérons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2-1}\right)$. Cette limite existe et est finie puisqu'elle vaut 1, ce qui prouve, par le critère d'intégration en θ avec $\theta = 2 > 1$, que f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[2,+\infty[$. Calculons tout d'abord une primitive de f en décomposant cette fonction en une somme de fractions simples. On a, pour tout $x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)},$$

ce qui donne

$$(A+B)x + (A-B) = 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

et donc, si $x \geq 2$

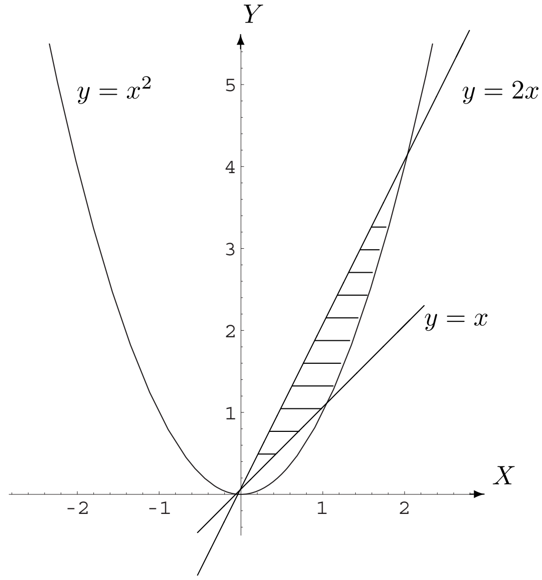
$$\int \frac{1}{x^2-1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\ dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\ dx \simeq \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) \simeq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Ainsi,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\ dx = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty}\ \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

Exercice 2

Représentons graphiquement la région dont on veut calculer l'aire.



Si $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ et $h(x) = 2x$, d'une part, les points d'intersection des graphiques de f et g ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$; d'autre part, les points d'intersection des graphiques de f et h ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(2,4)$. Ainsi, puisque les fonctions à intégrer sont continues sur tout intervalle fermé et borné, on a

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \int_0^1 (2x - x)\ dx + \int_1^2 (2x - x^2)\ dx \\
&= \int_0^1 x\ dx + \int_1^2 (2x - x^2)\ dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + \left[(4 - \frac{8}{3}) - (1 - \frac{1}{3})\right] \\
&= \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} \\
&= \frac{3 + 18 - 14}{6} \\
&= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

6.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$f(x) = \sin(\sqrt{x})$: intégrable sur A.
$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$: non intégrable en $-\infty$ donc non intégrable sur A.
$f(x) = \frac{1}{x^2}$: non intégrable en 0 donc non intégrable sur$[-1,1]$.
$f(x) = \ln(x^2)$: intégrable sur $]0,1]$.
$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$: intégrable sur $]0,+\infty[$.
$f(x) = \frac{\ln(x)}{1-x^2}$: intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 2

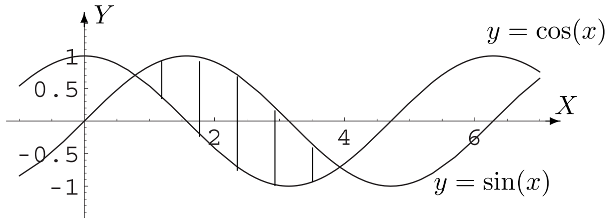
1	$\frac{16}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}$	$-10e^{-2} + e$	$\frac{\pi^2}{4}$
$\frac{1}{3}$	-2	$1 - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$
non intégrable en $+\infty$	$6 + \ln(7)$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{12}\ln(7)$

Exercice 3

- - -

Exercice 4

Aire $= 2\sqrt{2}$.



Exercice 5

$\frac{73}{96}$ $\quad 2\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)-2$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3 \text{ arctg}\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

Exercice 6

- - -

Exercice 7

$x(t) = 5t^2 - \frac{t^3}{3},\ t \in [0, 10]$.

Accélération nulle si $t = 5$.

6.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

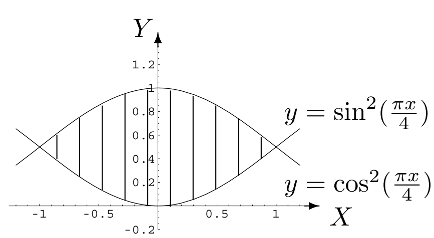
Exercice 1

Les deux premières fonctions sont intégrables sur A, la troisième est intégrable sur $[1, +\infty[$ mais non sur $]0, 1]$.

$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$	$\sqrt{3}-1$	$\frac{5}{6}\sqrt{10}$	$\frac{-2}{e}$	-2
-4	$6+\ln(7)$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{12}\ln(7)$	$\frac{1}{2}\ln(2)$

Exercice 2

L'aire hachurée vaut $\frac{4}{\pi}$.



Exercice 3

La première intégrale vaut $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ et la troisième $\dfrac{1}{3}\ln(4)$.
La deuxième fonction n'est pas intégrable en 1.

Exercice 4

—

Exercice 5

—

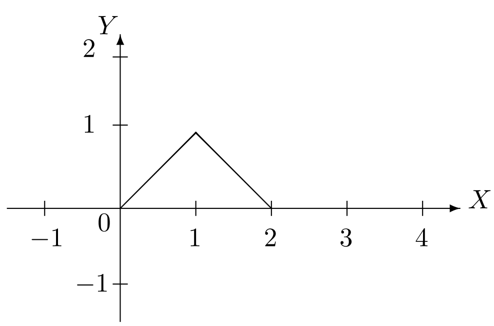
Exercice 6

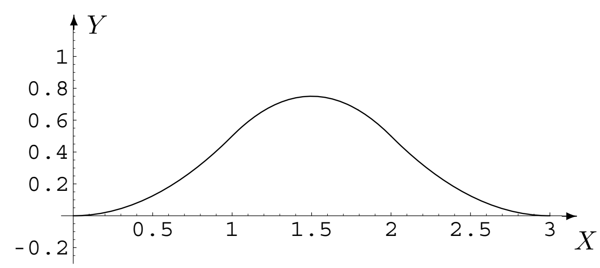
a) Non, la population est définie à une constante additive près.
b) $P(1) = \dfrac{e^3}{3} + \dfrac{2}{3}$.

Exercice 7

$$(f*f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$(f*f*f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ -x^2 + 3x - \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^2}{2} - 3x + \dfrac{9}{2} & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$





Exercice 8

Faux, a) vrai b) $\forall r, s \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} (rf(x) + sg(x))dx = r\int_0^{+\infty} f(x)\, dx + s\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$, faux, vrai, cf. notes de cours, la largeur de ce découpage vaut $\frac{1}{2}$, faux.

Chapitre 7

Equations différentielles

7.1 Exercices de base sur le chapitre 5 (partim A)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Résoudre les équations suivantes

1) $iDf(x) + 3f(x) = 2x + i$	2) $Df(x) = \cos(x) + 2f(x)$
3) $2Df(x) + 4f(x) = e^{-2x}$	4) $Df(t) + f(t) = \frac{1}{1+e^{2t}}$
5) $D^2f(x) + Df(x) = xe^x$	6) $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 1 + \sin(x)$
7) $D^2f(x) + 4f(x) = \cos(2x)$	8) $D^2f(x) + f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

Dans le cas 1), quelle est la solution qui s'annule en 1 ?

Dans le cas 5), quelle est la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée s'annule en 1 ?

Dans le cas 7), quelle est la solution qui s'annule en 0, ainsi que sa dérivée ?

Liste 2003-2004

1. Soit $r > 0$. Représenter graphiquement la fonction $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in [-r, r]$ et montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle
$$yD_xy + x = 0,\ x \in]-r, r[.$$

2. Résoudre les équations différentielles ou les systèmes suivants, en spécifiant sur quel intervalle on se place

a) $\begin{cases} iDf(x) + 2f(x) = 3i \\ f(1) = i \end{cases}$	*b)* $Df(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$
c) $\begin{cases} D^2f(x) + 9Df(x) = x \\ f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{cases}$	*d)* $\begin{cases} D^2f(x) + 9f(x) = x \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{cases}$
e) $9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = 1 + xe^x$	*f)* $9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{3}}$
g) $D^2f(x) - f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$	*h)*(**) $iD^2f(x) - f(x) = e^x$
i) $D^2f(x) + 4f(x) = \cos(x)$	*j)* $D^2f(x) + 4f(x) = \cos^2(x)$

Liste 2004-2005

Les exercices marqués de (*) sont plus spécialement destinés aux informaticiens (aux autres aussi si l'occasion se présente, surtout pour les chimistes).

1. A proposer aux étudiants.
   - L'équation différentielle $(D_t y)^2 = 4(y+1)$ est -elle linéaire ?
     Montrer que la fonction $g(t) = t^2 - 2t,\ (t \in \mathbb{R})$ vérifie le système
     $$\left\{\begin{array}{l}(D_t y)^2 = 4(y+1)\\ y(0)=0\\ y(2)=0\end{array}\right.$$
   - Dans l'étude des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants, on a rencontré des fonctions fondamentales que l'on a appelées fonctions du type "exponentielle polynôme". Comment s'écrit explicitement une telle fonction ?
2. Résoudre les équations différentielles ou les systèmes suivants, en spécifiant sur quel intervalle on se place

   $a)$ $\left\{\begin{array}{l} i^3 Df(x) + 2f(x) = 3i\\ f(1) = i^2\end{array}\right.$

   $b)$ $Df(x) - f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

   $c)(*)$ $Df(x) + 2f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

   $d)$ $\left\{\begin{array}{l} 4D^2 f(x) + Df(x) = x\\ f(1) = 1\\ Df(1) = 0\end{array}\right.$

   $e)$ $\left\{\begin{array}{l} 4D^2 f(x) + f(x) = x\\ f(0) = 0\\ Df(0) = 0\end{array}\right.$

   $f)$ $D^2 f(x) + Df(x) - 2f(x) = xe^x + e^{2x}$

   $g)$ $4D^2 f(x) + f(x) = 1 + \sin(x) + \sin^2(x)$

   $h)$ $D^2 f(x) + 4Df(x) + 4f(x) = 1 + e^{-2x}$

   $i)$ $D^2 f(x) - f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$
3. (*) Un ou deux exemple(s) simple(s) d'équation d'un autre type que linéaire à coefficients constants.

7.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

1. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $iDf(x)+3f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $iz+3 = 0$ et son seul zéro est $3i$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions
   $$f_H(x) = C\ e^{3ix},\ x \in \mathbb{R}$$
   où C est une constante arbitraire complexe.

   Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = 2x + i$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme on peut écrire $g(x)$ sous la forme $(2x+i)\ .\ e^{0x}$, produit d'un polynôme du premier degré et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = Ax + B$ où A et B doivent être déterminés. Puisque $Df_P(x) = A$, on a
   $$iDf_P(x) + 3f_P(x) = 2x + i \Leftrightarrow iA + 3Ax + 3B = 2x + i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3A = 2\\ iA + 3B = i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{2}{3}\\ B = \frac{i}{9}\end{array}\right. .$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C\ e^{3ix} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Déterminons la solution f qui s'annule en 1 c'est-à-dire telle que $f(1) = 0$. On a $Ce^{3i} + \frac{2}{3} + \frac{i}{9} = 0 \Leftrightarrow C\ e^{3i} + \frac{6+i}{9} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-6-i}{9}e^{-3i}$. La solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = -\frac{6+i}{9}\ e^{3i(x-1)} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $Df(x) - 2f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z - 2 = 0$ et son seul zéro est 2. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C\ e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = \cos(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme l'équation est à coefficients réels et que $\cos(x) = \Re(e^{ix})$, une solution particulière sera donnée par la partie réelle d'une solution particulière de $DF(x) -\ 2\ F(x) = e^{ix}$. Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1\ .\ e^{ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient i de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = A\ e^{ix}$ où A doit être déterminé. Puisque $DF(x) = Ai\ e^{ix}$, on a

$$DF(x) - 2F(x) = e^{ix} \Leftrightarrow Ai\ e^{ix} - 2A\ e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow (-2+i)A = 1 \Leftrightarrow 5A = -2 - i \Leftrightarrow A = \frac{-2-i}{5}.$$

Ainsi, $F(x) = \dfrac{-2-i}{5}\ e^{ix} = \left(-\dfrac{2}{5} - \dfrac{i}{5}\right)(\cos(x) + i\sin(x))$ et, dès lors,

$$f_P(x) = \Re F(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x), x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C\ e^{2x} - \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

3. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $2Df(x) + 4f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $2z + 4 = 0$ et son seul zéro est -2. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C\ e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = e^{-2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme on peut écrire g sous la forme de l'exponentielle polynôme $1\ .\ e^{-2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -2 de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = Ax\ e^{-2x}$ où A doit être déterminé. Puisque $Df_P(x) = A\ e^{-2x} - 2Ax\ e^{-2x}$, on a

$$2Df_P(x) + 4f_P(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow (2A - 4Ax)e^{-2x} + 4Ax\ e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{x}{2}e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = (C + \frac{x}{2})\ e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

4. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $Df(t) + f(t) = 0$. L'équation caractéristique est $z+1 = 0$ et son seul zéro est -1. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(t) = C\ e^{-t},\ t \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $t \mapsto g(t) = \dfrac{1}{1+e^{2t}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Vu l'expression de $g(t)$, nous utiliserons la méthode de variation des constantes.
La solution de $C(t)\ e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^{2t}}$ est $C(t) = \dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$; calculons, sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $t \mapsto C(t)$. Par une primitivation par substitution, on a

$$\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}\ dt = \left[\int \frac{1}{1+u^2}\ du\right]_{u=e^t} \simeq [\mathrm{arctg}(u)]_{u=e^t} \simeq \mathrm{arctg}(e^t)$$

et, ainsi, une solution particulière f_P est donnée par

$$f_P(x) = \mathrm{arctg}(e^t)\ e^{-t},\ t \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(t) = [C + \mathrm{arctg}(e^t)]\ e^{-t},\ t \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

5. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + Df(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + z = 0$ dont les zéros sont -1 et 0. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C_1\ e^{0x} + C_2\ e^{-x} = C_1 + C_2\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = x\ e^x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme du premier degré et d'une exponentielle dont le coefficient 1 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = (Ax + B)\ e^x$ où A et B doivent être déterminés. Puisque $Df_P(x) = A\ e^x + (Ax + B)\ e^x = (Ax + A + B)\ e^x$ et $D^2f(x) = A\ e^x + (Ax + A + B)\ e^x = (Ax + 2A + B)\ e^x$, on a

$$D^2f_P(x) + Df_P(x) = x\ e^x \Leftrightarrow (2Ax + 3A + 2B)\ e^x = x\ e^x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2A = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{4} \end{array}\right. .$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2\ e^{-x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Déterminons la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée s'annule en 1 c'est-à-dire la solution f telle que $f(1) = 1$ et $Df(1) = 0$. Comme $Df(x) = -C_2\ e^{-x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2\ e^{-1} - \frac{1}{4}e = 1 \\ -C_2\ e^{-1} + \frac{1}{4}e = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{e^2}{4} \end{array}\right. ;$$

la solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{e^{2-x}}{4} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

6. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + 2z + 1 = 0$ laquelle est équivalente à $(z+1)^2 = 0$, équation qui admet -1 comme zéro double. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = (C_1x + C_2)\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = 1 + \sin(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2f + 2Df + f = 1$; on voit immédiatement que la fonction constante 1 convient. Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = \sin(x)$. Comme l'équation est à coefficients réels et que $\sin(x) = \Im(e^{ix})$, une solution particulière sera donnée par la partie imaginaire d'une solution particulière de $D^2F(x) + 2DF(x) + F(x) = e^{ix}$. Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient i de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = A\ e^{ix}$ où A doit être déterminé. Puisque $DF(x) = Ai\ e^{ix}$ et $D^2f(x) = -A\ e^{ix}$, on a

$$D^2F(x) + 2DF(x) + F(x) = e^{ix} \Leftrightarrow (-A + 2Ai + A)\ e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow 2iA = 1 \Leftrightarrow 2A = -i \Leftrightarrow A = -\frac{i}{2}.$$

Ainsi,

$$F(x) = -\frac{i}{2}\ e^{ix} = -\frac{i}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$

et, dès lors, une solution particulière f_P de l'équation de départ est

$$f_P(x) = 1 + \Im F(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = (C_1x + C_2)\ e^{-x} + 1 - \frac{1}{2}\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

7. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + 4f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + 4 = 0$; elle est équivalente à l'équation $z^2 - 4i^2 = 0$ dont les zéros sont $2i$ et $-2i$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1, C_2 sont des constantes complexes ou, ce qui revient au même, les fonctions

$$f_H(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = \cos(2x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de l'équation étant réels et $\cos(2x)$ étant la partie réelle de e^{2ix}, une solution particulière sera donnée par la partie réelle d'une solution particulière de $D^2F(x) + 4F(x) = e^{2ix}$. Le second membre de cette équation s'écrit $1\ .\ e^{2ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $2i$ de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = Ax\ e^{2ix}$ où A doit être déterminé. En appliquant la formule de Leibniz, on a

$$D^2F(x) = C_2^0 D^0(Ax).D^2(e^{2ix}) + C_2^1 D(Ax).D(e^{2ix}) + C_2^2 D^2(Ax).D^0(e^{2ix}) = -4Axe^{2ix} + 4iAe^{2ix}$$

et

$$D^2F(x) + 4F(x) = e^{2ix} \Leftrightarrow (-4Ax + 4iA + 4Ax)\ e^{2ix} = e^{2ix} \Leftrightarrow 4iA = 1 \Leftrightarrow 4A = -i \Leftrightarrow A = \frac{-i}{4}.$$

Ainsi,

$$F(x) = \frac{-ix}{4}\ e^{2ix} = -\frac{ix}{4}(\cos(2x) + i\sin(2x))$$

et, dès lors, une solution particulière f_P de l'équation de départ est donnée par

$$f_P(x) = \Re F(x) = \frac{x}{4}\sin(2x), x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C_1\cos(2x) + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Déterminons la solution qui s'annule en 0, ainsi que sa dérivée c'est-à-dire la solution telle que $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. Comme $Df(x) = -2C_1\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + 2\left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\cos(2x)$, on a

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases};$$

la solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = \frac{x}{4}\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}.$$

8. Cet exercice est un des exemples résolus dans les notes de cours.

7.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

Représentation graphique : points d'ordonnée positive du demi-cercle centré à l'origine et de rayon r.

Exercice 2

a) $f(x)=\frac{-i}{2}e^{2i(x-1)}+\frac{3i}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=e^{-x}(c+\operatorname{arctg}(e^x)),\ x\in\mathbb{R},\ c$ constante complexe arbitraire.

c) $f(x)=\frac{1379}{1454}+\frac{8}{729}e^{9(1-x)}+\frac{x^2}{18}-\frac{x}{81},\ x\in\mathbb{R}$.

d) $f(x)=-\frac{1}{27}\sin(3x)+\frac{x}{9},\ x\in\mathbb{R}$.

e) $f(x)=(c_1x+c_2)e^{-\frac{x}{3}}+(\frac{x}{16}-\frac{3}{32})e^x+1,\ x\in\mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

f) $f(x)=(c_1x+c_2+\frac{x^2}{18})e^{-\frac{x}{3}},\ x\in\mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

g) $f(x)=(c_1-\frac{1}{4}\ln(1+e^{-2x}))e^x+(c_2-\frac{1}{4}\ln(1+e^{2x}))e^{-x},\ x\in\mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

h) $f(x)=c_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x}+c_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x}-\frac{1+i}{2}e^x,\ x\in\mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

i) $f(x)=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+\frac{1}{3}\cos(x),\ x\in\mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

j) $f(x)=c_1\cos(2x)+(\frac{x}{8}+c_2)\sin(2x)+\frac{1}{8},\ x\in\mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

7.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

L'équation différentielle n'est pas linéaire.

Exercice 2

a) $f(x)=(-1-\dfrac{3i}{2})e^{2i(1-x)}+\dfrac{3i}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=(C-\ln(1+e^{-x}))e^x,\ x\in\mathbb{R}$ où C est une constante complexe arbitraire.

c) $f(x)=(C+e^x-\ln(e^x+1))e^{-2x},\ x\in\mathbb{R}$ où C est une constante complexe arbitraire.

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-4x+\dfrac{33}{2}-12\ e^{\frac{1-x}{4}},\ x\in\mathbb{R}$

e) $f(x)=x-2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right),\ x\in\mathbb{R}$

f) $f(x)=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x}{9}\right)e^x+\dfrac{e^{2x}}{4},\ x\in\mathbb{R}$ où C_1,C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

g) $f(x)=C_1\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+C_2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}\sin(x)+\dfrac{1}{30}\cos(2x),\ x\in\mathbb{R}$ où C_1,C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

h) $f(x)=\left(C_1x+C_2+\dfrac{x^2}{2}\right)e^{-2x},\ x\in\mathbb{R}$ où C_1,C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

i) $f(x)=\left(C_1-\dfrac{1}{4}\ln(e^{2x}+1)\right)e^{-x}+\left(C_2-\dfrac{1}{4}\ln(e^{-2x}+1)\right)e^x,\ x\in\mathbb{R}$ où C_1,C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 3

—

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2017-2018

Mathématique

CORRECTION DES LISTES D'EXERCICES DU 1$^{\text{ER}}$ QUADRIMESTRE

2017-2018

Version 22 août 2017

Chapitre 8

Listes d'exercices 2017 - 2018 : correction Q1

Liste 1 : problèmes élémentaires, unités et puissances de 10

I. Problème élémentaire

Résoudre les problèmes suivants en rédigeant la solution selon le schéma donné ci-dessus :

1. **Un terrassier a creusé les 4/5 de la longueur d'un fossé. Il creuse encore une longueur de 4,5 m et constate qu'il n'a plus qu'à creuser les 14 % de la longueur pour en avoir terminé. Quelle est la longueur du fossé en mètres ?**

   (a) **Que cherche-t-on ?**
   On cherche la longueur du fossé en mètres.

   (b) **Quelles sont les données ?**
   Un terrassier a creusé les 4/5 de la longueur d'un fossé plus 4,5 m ; il lui reste à creuser 14 % de la longueur de ce fossé.

   (c) **Si on nomme x l'inconnue, que représente x de façon précise ? (Mentionner l'unité si nécessaire)**
   x représente la longueur du fossé en mètres.

   (d) **Que peut-on calculer successivement en utilisant l'inconnue ?**
   1) La longueur creusée : $\frac{4x}{5} + 4,5$
   2) La longueur à encore creuser : $\frac{14x}{100} = \frac{7x}{50}$

   (e) **Quelle est l'équation obtenue ?**
   L'équation obtenue est $\frac{4x}{5} + 4,5 + \frac{7x}{50} = x$.

   (f) **La résoudre.**
   L'équation est équivalente à
   $$\frac{40x}{50} + \frac{225}{50} + \frac{7x}{50} = \frac{50x}{50} \Leftrightarrow 3x = 225 \Leftrightarrow x = 75.$$

   (g) **Donner la solution du problème en rédigeant une conclusion.**
   Le fossé a une longueur de 75 mètres.

2. **1 litre d'eau de mer pèse 1,025 kg et contient** 3% **de sa masse en sel. Combien de litres d'eau pure doit-on ajouter à 2 litres d'eau de mer pour obtenir de l'eau contenant** 1% **de sa masse en sel ?**

   On doit ajouter 4,1 litres d'eau pure aux 2 litres d'eau de mer pour obtenir de l'eau contenant 1% de son poids en sel.

3. **Un train parcourt 120 km à l'heure. Après 2 heures de marche, il est obligé de s'arrêter et d'attendre 1 heure. Ensuite il continue sa marche à une vitesse de 60 km à l'heure et arrive 3 heures en retard. Quel temps le train aurait-il mis s'il n'avait pas dû s'arrêter et s'il avait parcouru toute la distance avec la vitesse primitive ?**

   S'il avait gardé sa vitesse initiale tout au long du trajet, le train aurait mis 4 heures.

4. **Un nombre est composé de 2 chiffres dont la somme est 6 ; si on retranche 18 de ce nombre, on obtient le nombre renversé. Quel est ce nombre ?**

   Le nombre cherché est 42.

5. **Un père a 40 ans et son fils 10 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de celui du fils ?**

   Dans 5 ans, l'âge du père sera triple de celui de son fils.

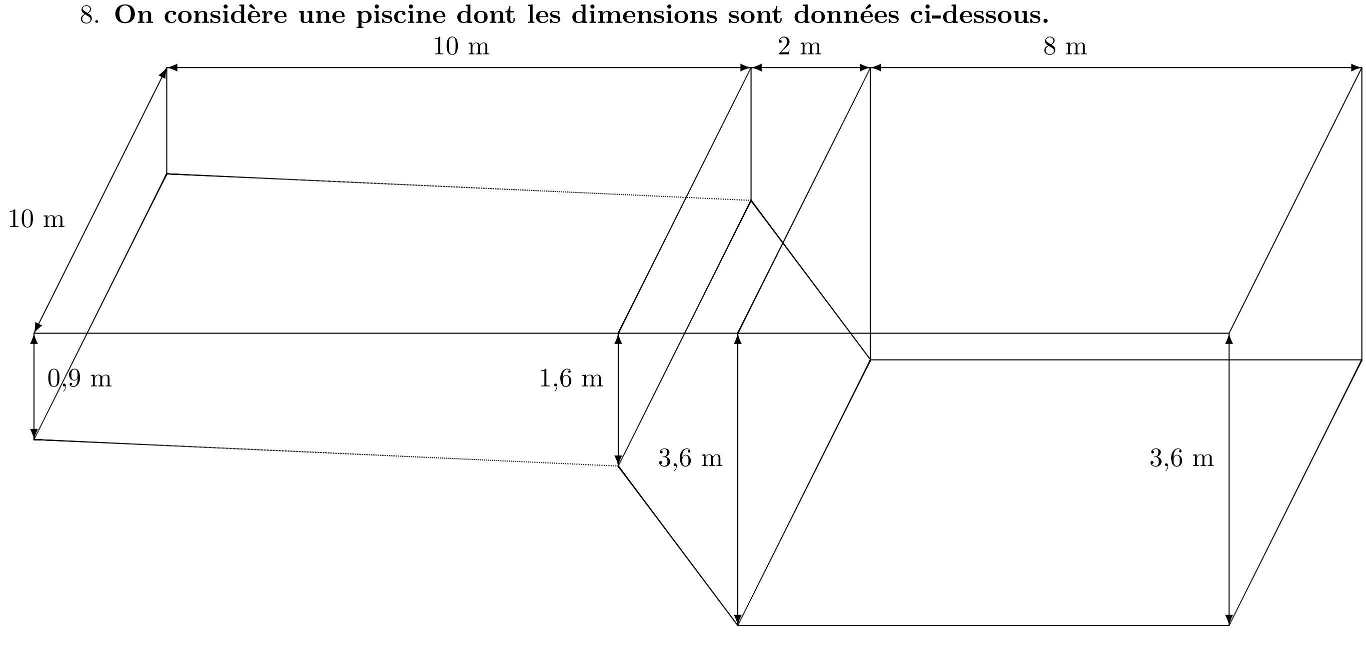
6. **On a acheté 15 bouteilles de champagne et 17 bouteilles de vin rouge pour 504 €. Si le prix du champagne augmentait de 75 centimes par bouteille et si celui du vin rouge diminuait de 30 centimes par bouteille, on payerait 649 € pour 20 bouteilles de chaque sorte. Quel est le prix d'une bouteille de chaque vin ?**

   Une bouteille de champagne coûte 20 € et une bouteille de vin rouge coûte 12 €.

7. **Trouver deux nombres dont la somme est** 3 **sachant que leur rapport augmenté de leur rapport inverse vaut 13/6.**

   Les nombres cherchés sont 9/5 et 6/5.

8. **On considère une piscine dont les dimensions sont données ci-dessous.**



(a) **Combien de litres d'eau cette piscine contient-elle quand elle est remplie à 10 cm du bord ?**
Quand elle est remplie à 10 cm du bord, la piscine contient 445 000 litres.

(b) **Un m^3 d'eau coûte 4 euros. Combien cela coûte-t-il de la remplir ?**
Pour remplir cette piscine (à 10 cm du bord) cela coûte 1780 €.

(c) **Sachant que la pompe filtre 50 000 litres par heure, combien de temps faut-il (en théorie) pour filtrer la totalité de l'eau du bassin ?**
Pour filtrer la totalité de l'eau du bassin, il faut 8h54 minutes.

(d) **Quel est le pourcentage de chacune des deux pentes ?**
La pente dans la petite profondeur est de 7 % ; l'autre pente est de 100 %.

II. Unités et puissances de 10

1. **Compléter**
- en français :
a) 10^6 **correspond à ...** **b)** $0,0001$ **peut se lire ...** **c)** 10^9 **correspond à ...**
d) 10^{-9} **correspond à ...** **e)** 10^{-2} **c'est ...** **f) mille millards de mille sabords, c'est ... de sabords.**
- sous forme d'un entier ou d'un décimal :
g) un millième peut s'écrire ... **h)** 10^0 **égal ...** **i) un centième s'écrit ...**
j) 1 milliard équivaut à ... millions **k) un milliard vingt millions s'écrit ...**
- sous forme de puissance de 10 :
l) $10^3.10^9.10^{13}$ **=...**

- en français :
a) 10^6 correspond à un million
b) $0,0001$ peut se lire un dix-millième
c) 10^9 correspond à un milliard
d) 10^{-9} correspond à un milliardième
e)10^{-2} c'est un centième
f) Mille millards de mille sabords, c'est un billiard de sabords.

- sous forme d'un entier ou d'un décimal :
g) Un millième peut s'écrire $0,001$
h) 10^0 égal 1
i) Un centième s'écrit 0,01
j) 1 milliard équivaut à 1000 millions
k) Un milliard vingt millions s'écrit 1020000000

- sous forme de puissance de 10 :
l) $10^3.10^9.10^{13} = 10^{25}$

2. **Sans se servir d'un abaque, en utilisant les puissances de** 10 **et en effectuant les transformations, compléter le tableau ci-dessous**

	Forme décimale		Puissance de 10
(1)	$543,5\ hm$	=	$5,435\ .10^7\ mm$
(2)	$\frac{3}{8}\ dm$	=	$3,75\ .10^{-2}\ m$
(3)	$0,0000805\ km$	=	$805\ .10^{-4}\ m$

	Forme décimale		**Puissance de** 10
(4)	$\frac{23}{50}\ km$	$=$	$4,6\ .10^4\ cm$
(5)	$481,96\ dm^2$	$=$	$4,8196\ .10^{-4}\ ha$
(6)	$32,5\ cm^2$	$=$	$3,25\ .10^{-5}\ a$
(7)	$\frac{17}{25}\ m^2$	$=$	$6,8\ .10^{-7}\ km^2$
(8)	$0,25m^3$	$=$	$2,5\ .10^5\ \ ml$
(9)	$0,4\ hl$	$=$	$4\ .10^4\ cm^3$
(10)	$2,75\ m^3$	$=$	$2,75\ .10^9\ mm^3$
(11)	$4\ 800\ cl$	$=$	$4,8\ .10^{-2}\ kl$
(12)	$0,17\ kg$	$=$	$17\ .10^2\ dg$
(13)	$35\ cg$	$=$	$3,5\ .10^{-4}\ kg$
(14)	$400\ mg$	$=$	$4\ .10^{-7}\ t$

Liste 2 : Équations, inéquations et puissances

I. Résolution d'équations (x est l'inconnue réelle)

Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.

$$a)\ \pi^2 x - \frac{1}{3} = -\frac{x}{\pi} \qquad b)\ 64x^2 + 1 = 0 \qquad c)\ 64x^3 + 1 = 0 \qquad d)\ 2x - \frac{2}{x} = 1$$

Si on note S l'ensemble des solutions de l'équation, on a

a) $S = \left\{ \dfrac{\pi}{3(\pi^3+1)} \right\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{ -\dfrac{1}{4} \right\}$ d) $S = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \right\}$

II. Valeur absolue et équations (A est l'inconnue réelle)

1. a) **Si un réel est noté $A-2$, définir la valeur absolue de $A-2$.**
   La valeur absolue du réel $A-2$ est
   $$|A-2| = \begin{cases} A-2 & \text{si} \quad A-2 \geq 0 \\ -A+2 & \text{si} \quad A-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |A-2| = \begin{cases} A-2 & \text{si} \quad A \geq 2 \\ -A+2 & \text{si} \quad A \leq 2 \end{cases}$$
   b) **Dans ce cas, quelle est la valeur de A qui joue un rôle différent des autres valeurs ?**
   La valeur de A qui joue un rôle différent des autres valeurs est 2.
   c) **Répondre aux mêmes questions en considérant le réel A^2-2.**
   La valeur absolue du réel A^2-2 est
   $$|A^2-2| = \begin{cases} A^2-2 & \text{si} \quad A^2-2 \geq 0 \\ -A^2+2 & \text{si} \quad A^2-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |A^2-2| = \begin{cases} A^2-2 & \text{si} \quad A \leq -\sqrt{2} \text{ ou } A \geq \sqrt{2} \\ -A^2+2 & \text{si} \quad -\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2} \end{cases}$$
   Les valeurs de A qui jouent un rôle différent des autres valeurs sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

2. **Résoudre les équations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.**
   $$a)\ |-A+\sqrt{2}| = |-2A| \qquad b)\ \left|A^2 - |A^4|\right| + 1 = 0 \qquad c)\ \left|A^2 - |A^4|\right| - 1 = 0$$
   Si on note S l'ensemble des solutions de l'équation, on a

   a) $S = \left\{ -\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{3} \right\}$ b) $S = \Phi$ c) $S = \left\{ \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \right\}$

III. Résolution d'inéquations (x est l'inconnue réelle)

1. **Si on a $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ $(a, b \in \mathbb{R}_0)$ peut-on toujours dire que cette inégalité est équivalente à $a > b$?**
   a) **Si oui, le prouver.**
   b) **Si non, donner un contre-exemple et dire dans quel(s) cas cette équivalence pourrait être correcte.**
   Non. On a $\frac{-1}{2} < \frac{1}{10}$ par exemple mais on n'a pas -2 supérieur à 10. Cette équivalence est correcte si et seulement si les réels sont de même signe.

2. **Résoudre les inéquations suivantes sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes inéquations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions**

$$a)\ \frac{-1}{2x-1} \leq \frac{-1}{x-2} \quad b)\ |3x-2| > 3 \quad c)\ \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{|5x-2x^2-3|} \quad d)\ |x^2+x-2| \leq 1-x$$

Si on note S l'ensemble des solutions de l'inéquation, on a

a) $S =]-\infty, -1] \cup \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ b) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$ c) $S = [2, +\infty[$ d) $S = [-3, -1] \cup \{1\}$

IV. Racines de réels et puissances

1. **Que valent (a)** $\sqrt{(-\pi)^4}$ **(b)** $\sqrt[3]{(-4)^3}$ **?**

   On a a) $\sqrt{(-\pi)^4} = \pi^2$ et b) $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

2. a) **Pour quelles valeurs de** x **la racine** $\sqrt{4x^2}$ **est-elle définie ?**
   La racine $\sqrt{4x^2}$ est définie pour tout réel.
   b) **Peut-on dire que** $\sqrt{4x^2} = 2x$ **? Justifier votre réponse.**
   Non car le premier membre est positif alors que le second est positif ou négatif suivant la valeur de x. Cette égalité n'est vraie que si $x \geq 0$.
   c) **Si** x **est un réel négatif, que vaut** $\sqrt{4x^2}$ **?**
   Si x est un réel négatif alors $\sqrt{4x^2} = 2|x| = -2x$.

3. a) **Si** n **est un naturel non nul, comparer les réels** $(-x)^{2n}$ **et** $-x^{2n}$ **: sont-ils égaux ou différents ? Justifier votre réponse.**
   Ces réels ne sont égaux que si $x = 0$ sinon le premier est positif tandis que le second est négatif.
   b) **Même question avec** $(-x)^{2n+1}$ **et** $-x^{2n+1}$**.**
   Ces réels sont égaux pour tout réel x.

V. Sommes et symboles sommatoires

1. a) **On considère la somme** $s_1 = 2+4+6+8+10+12$**. Exprimer en français la somme considérée.**
   C'est la somme des 6 premiers naturels pairs non nuls.
   b) **Comment note-t-on de façon générale un terme de ce type ?**
   On peut le noter $2n$ avec $n \in \mathbb{N}_0$.
   c) **Ecrire cette somme à l'aide d'un symbole sommatoire.**
   On peut noter cette somme sous la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} 2n$ par exemple.

2. a) **On considère la somme** $s_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$**. Comment caractériser chacun des termes de cette somme sans tenir compte de son signe ?**
   Chaque terme de la somme est une puissance naturelle de $\frac{1}{3}$.
   b) **Comment, dans une somme, peut-on passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif ?**
   On peut passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif grâce à un facteur du type $(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   c) **Ecrire** s_2 **à l'aide d'un symbole sommatoire.**
   On peut noter cette somme sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k$ par exemple.

3. **On considère la somme** $S_1 = \sum_{j=2}^{4} (-2)^{2j}$**.**

a) **Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?**
Cette somme comporte 3 termes.
b) **Que vaut le terme correspondant à** $j = 3$ **?**
Le terme correspondant à $j = 3$ vaut $(-2)^6 = 64$.
c) **Que vaut cette somme ?**
Cette somme vaut

$$4^2 + 4^3 + 4^4 = 4^2(1 + 4 + 4^2) = 16 \ . \ 21 = 336.$$

d) **Si** j **variait de** 2 **à** 20**, quelle formule pratique pourrait-on utiliser pour calculer la somme ? L'appliquer sans calculer le résultat numérique final.**
On utiliserait la formule suivante dans laquelle q est un réel ou un complexe et M est un naturel non nul

$$\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \begin{cases} \frac{1-q^M}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ M & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

La somme

$$\sum_{j=2}^{20} 4^j = 4^2 \sum_{j=0}^{18} 4^j = 4^2 \frac{1 - 4^{19}}{1 - 4} = -\frac{16}{3} \ . \ (1 - 4^{19}).$$

4. **On considère la somme** $S_2 = \sum_{l=0}^{7} (\sqrt[3]{2})^2$.

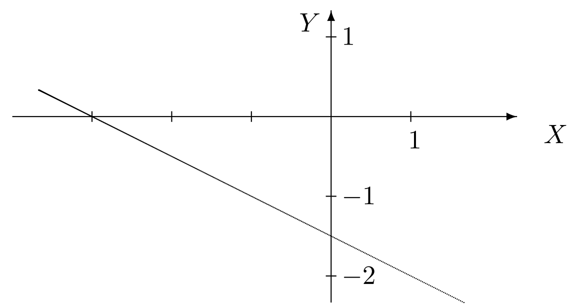
a) **Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?**
Cette somme comporte 8 termes.
b) **Que vaut le terme correspondant à** $l = 3$ **?**
Le terme correspondant à $l = 3$ vaut $\sqrt[3]{4}$.
c) **Que vaut cette somme ?**
Cette somme vaut $8\sqrt[3]{4}$.

Liste 3 : droites et trigonométrie

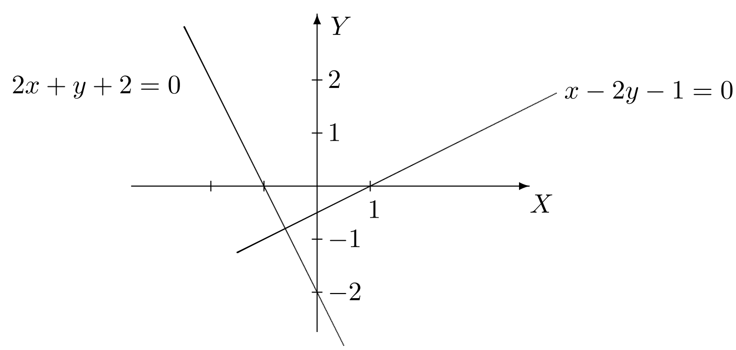
I. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

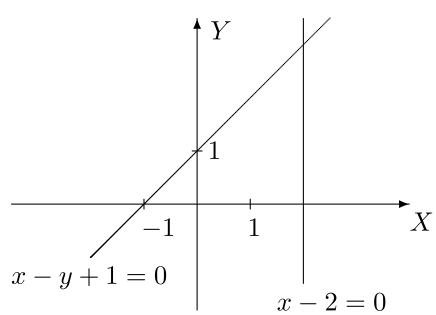
1. **Sans en déterminer une équation cartésienne, représenter graphiquement la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(1,-2)$ et de coefficient angulaire $-\frac{1}{2}$.**



2. **Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnée $(1,0)$ et orthogonale à la droite d'équation $2x+y+2=0$. Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.**
L'équation cartésienne demandée est $x-2y-1=0$.



3. **a) Donner une équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(2,3)$ et $(1,2)$ ainsi que celle de la droite passant par $(2,3)$ et $(2,0)$.**
La première droite a pour équation cartésienne $x-y+1=0$; la deuxième a pour équation $x-2=0$.
b) Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.



4. **On considère la droite d'équation cartésienne** $2x+y+2=0$.
a) Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes $(1,-2)$ (ou tout autre multiple non nul)
.

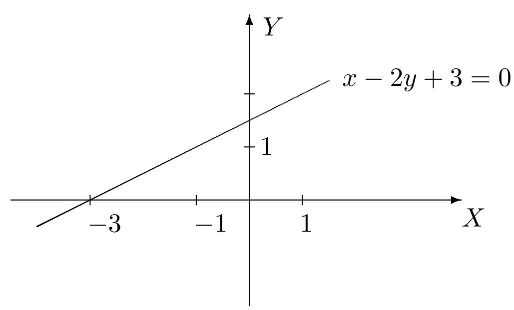
b) Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.
Un point de cette droite a pour coordonnées $(-1, 0)$ par exemple.
c) Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.
Des équations paramétriques cartésiennes de cette droite sont données, par exemple, par

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + r \\ y = -2r \end{array}\right. , \; r \in \mathbb{R}$$

d) La droite passe par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point ?
Vu les équations paramétriques données au point précédent, ce point correspond à $r = 1 - \sqrt{2}$.

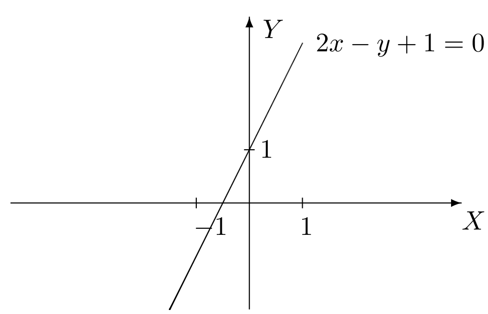
II. Résolution de systèmes linéaires

1. **a) Si on considère l'équation $2y - x = 3$, représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans un repère cartésien du plan. Quel est le nom de cette courbe ?**
   Cette courbe est une droite dont voici la représentation graphique.



   b) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} y + x = 0 \\ 2y - x = 3 \end{array}\right.$
   Ne pas oublier de mentionner l'ensemble des solutions.
   L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \{(-1, 1)\}$.
   c) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
   Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites sécantes au point de coordonnées $(-1, 1)$.

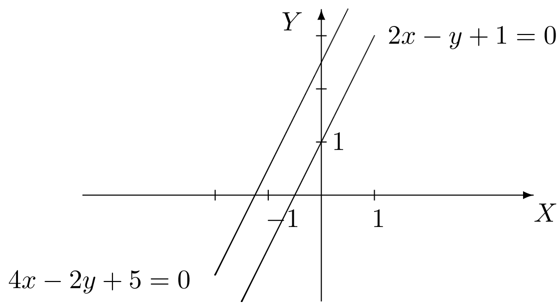
2. **a) Dans le plan, représenter graphiquement les solutions du système**
   $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 3 \end{array}\right.$



   b) Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?
   Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites parallèles confondues.

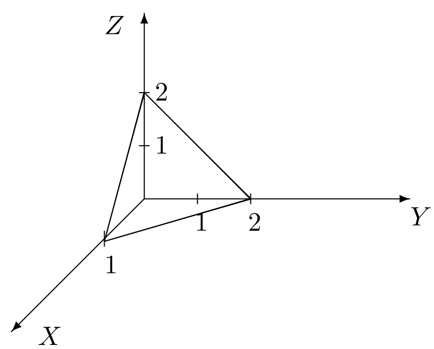
   c) Résoudre ce système et donner son ensemble de solutions.
   Son ensemble de solutions est l'ensemble $S = \{(x, 2x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$.

d) Faire de même avec le système $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$



Le système correspond aux équations cartésiennes de deux droites parallèles et distinctes. L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \emptyset$.

3. **a) Si on considère l'équation $y + 2x + z = 2$, comment peut-on représenter graphiquement les solutions dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom de cet élément ?**
Cette équation est l'équation cartésienne d'un plan dont voici la représentation graphique.



b) Si on a un système formé de deux équations de ce type, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.
Trois cas sont possibles :
1) 2 plans sécants ; ils ont une droite de points en commun et leur ensemble de solutions dépend d'un paramètre
2) 2 plans parallèles confondus ; ils ont tous leurs points en commun et leur ensemble de solutions dépend de 2 paramètres
3) 2 plans parallèles distincts ; ils n'ont aucun point en commun et leur ensemble de solutions est l'ensemble vide.
c) Résoudre $\begin{cases} y + 2x + z = 2 \\ y - 2x + 2z = 0 \end{cases}$
L'ensemble de solutions est donné par $S = \{(x, 4 - 6x, 4x - 2) : x \in \mathbb{R}\}$.

III. Trigonométrie

1. **a) Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, dans quel quadrant travaille-t-on ?**
On travaille dans le quatrième quadrant.
b) Dans ce quadrant, on sait que $\mathrm{tg}(x) = -\frac{4}{3}$. Sans utiliser de calculatrice, déterminer la valeur des trois autres nombres trigonométriques ?
On a $\quad \mathrm{cotg}(x) = -\dfrac{3}{4}, \qquad \cos(x) = \dfrac{3}{5} \quad$ et $\quad \sin(x) = -\dfrac{4}{5}.$

2. **a) Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression** $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) - \dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)}$ **est-elle définie ?**
   L'expression est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
   b) En simplifiant cette expression, montrer qu'elle est indépendante de x.
   Cette expression vaut 0 ; elle est donc indépendante de x.
3. **a) Rapprocher** $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$ **d'un produit remarquable qui permettrait de simplifier cette expression. Lequel envisager ?**
   On peut envisager le carré d'une somme de 2 termes donc, par exemple, l'expression $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2,\ a, b \in \mathbb{R}$.
   b) Transformer l'expression ci-dessus en utilisant la formule trouvée pour simplifier au maximum cette expression.
   L'expression donnée peut donc s'écrire sous la forme $(\sin^2(x) + \cos^2(x))^2 = 1$.
4. **a) Parmi les formules de trigonométrie, quelle est celle qui permet de transformer un double produit de sinus cosinus ? La citer.**
   Pour transformer un double produit de sinus cosinus, on utilise la formule
   $$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin(a)\cos(b),\ a, b \in \mathbb{R}.$$
   b) Prouver que $4\sin\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)\cos\left(\dfrac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{2} - 1$**.**
5. **a) Résoudre l'équation** $\sin(4x) = \cos(2x)$ **(note : x est l'inconnue réelle)**
   Cette équation a pour ensemble de solutions
   $$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{12} + k\pi,\ \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
   b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
   Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{17\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{4}$.
6. **a) Résoudre l'équation** $\cos(4x) = \cos(2x)$ **(note : x est l'inconnue réelle)**
   Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{ \dfrac{k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
   b) Parmi toutes les solutions de cette équation, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$**.**
   Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\pi,\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi,\ \dfrac{7\pi}{3},\ \dfrac{8\pi}{3},\ 3\pi$.
7. **a) Si un produit de 2 facteurs est négatif, que peut-on affirmer à propos de ces facteurs ?**
   Si un produit de 2 facteurs est négatif alors ces facteurs sont de signe contraire, l'un positif et l'autre négatif.
   b) Transformer $\sin(2x)$ **en un produit de 2 facteurs.**
   On a la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$.
   c) Résoudre $\sin(2x) \leq \cos(x)$ **(note : x est l'inconnue réelle)**
   L'ensemble des solutions est donné par
   $$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \right).$$
   d) Parmi toutes les solutions, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$**.**
   Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

8. **Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, résoudre les équations suivantes**

a) $1 + \cos(x) = \sin(x)$. b) $\cos(2x)\cos(4x) = \sin(2x)\sin(4x)$. c) $\cos(x) + \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
d) $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$. e) $\cos(2x) + \sin(x) = 0$. f) $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(2x)$.
g) $2\sin^2(x) + \sin(2x) = 0$. h) $\sin(3x)\cos(2x) + \sin^2(x) = \frac{1}{2}$.

Solutions.
a) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{\pi + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, la solution qui appartient à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $\frac{\pi}{2}$.

b) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-5\pi}{12},\ \frac{-\pi}{4},\ \frac{-\pi}{12},\ \frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{12}$.

c) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{12} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12}$.

d) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{\frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}$.

e) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{-\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$.

f) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{2k\pi,\ k\frac{\pi}{2} :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2}$.

g) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{k\pi,\ \frac{-\pi}{4} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-\pi}{4},\ 0$.

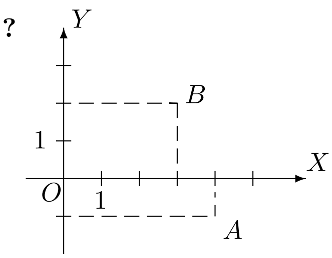
h) Cette équation a pour ensemble de solutions $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-7\pi}{18},\ \frac{-\pi}{4},\ \frac{\pi}{18},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{18}$.

Liste 4 : calcul vectoriel et coniques

I. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

1. **a) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base correspondant au repère orthonormé ci-contre ?**



Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont respectivement $(4, -1)$ et $(3, 2)$.

b) Donner les composantes de $\overrightarrow{AB}$

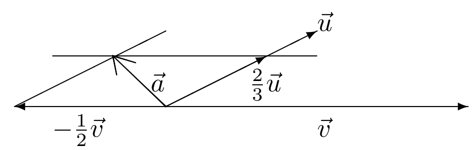
Les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont$(-1, 3)$.

2. **Soit la base du plan définie par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.**

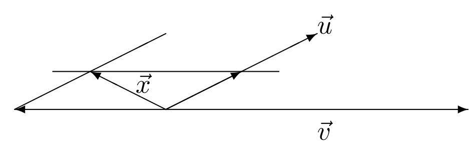
a) Si $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$, donner les composantes de $\vec{a}$ dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$.

Dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$, les composantes de $\vec{a}$ sont $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$.

b) Représenter $\vec{a}$.



c) On considère le vecteur $\vec{x}$. Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis en donner les composantes dans cette base.



Comme $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$, ses composantes dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$ sont $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

3. **On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$.**

a) Si $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$, quelles sont les composantes de $\vec{a}$ dans cette base ?

Dans cette base, les composantes de $\vec{a}$ sont $(\frac{1}{2}, 2, 0)$.

b) De même pour $\vec{b} = \vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3}$.

Dans cette base, les composantes de $\vec{b}$ sont $(1, 1, -1)$.

c) Déterminer le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$.

Le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$ vaut $\frac{5}{2}$.

d) Déterminer le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$.

Le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$ est le vecteur de composantes $(2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

e) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge \vec{a}$, celles de $\vec{y} = (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{a}$ et celles de $\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$.

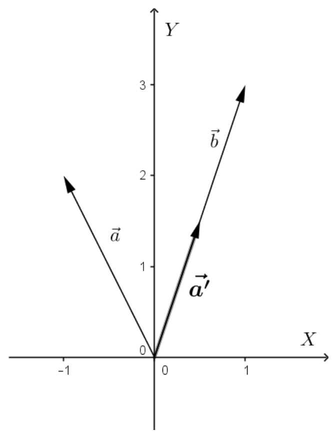
Les composantes des différents vecteurs sont les suivantes

$$\vec{x}\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right), \qquad \vec{y}\left(\frac{5}{4}, 5, 0\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{z}\left(3, -\frac{3}{4}, -\frac{17}{4}\right).$$

4. **a) Dans une base orthonormée du plan, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(-1, 2)$ sur la droite vectorielle engendrée par**

le vecteur de composantes $(1,3)$. Représenter ces vecteurs.

Le vecteur $\vec{a'}$ a pour composantes $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



b) Dans une base orthonormée de l'espace, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(0,1,-2)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $(-1,2,-2)$.

Le vecteur $\vec{a'}$ a pour composantes $\left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-4}{3}\right)$.

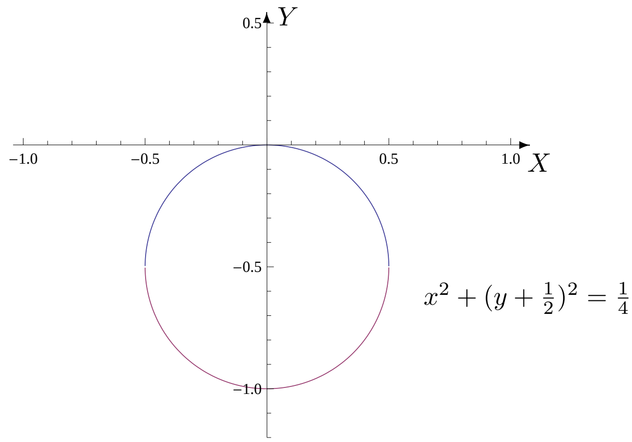
II. Les coniques

1. **Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes**

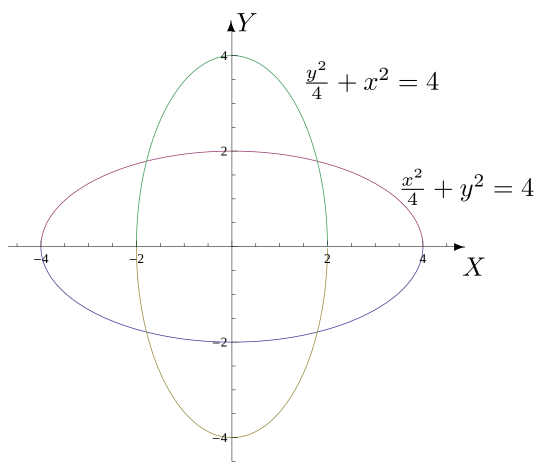
   (1) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$ (2) $x = y^2 + 2$ (3) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ (4) $x^2 + y^2 + y = 0$
   (5) $x^2 = -y^2$ (6) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 4$ (7) $y = xy^2$ (8) $\frac{y^2}{4} + x^2 = 4$

   Sans faire aucun calcul, quelles sont celles qui pourraient être l'équation cartésienne
   a) d'un cercle ? Les équations (4) et (5) pourraient être l'équation cartésienne d'un cercle.
   b) d'une ellipse ? Les équations (3) et (8) pourraient être l'équation cartésienne d'une ellipse.
   c) d'une hyperbole ? Les équations (1) et (6) pourraient être l'équation cartésienne d'une hyperbole.
   d) d'une parabole ? L'équation (2) pourrait être l'équation cartésienne d'une parabole.

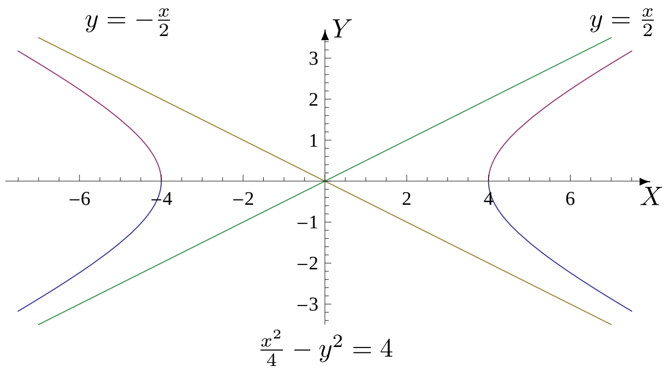
2. **a) Ecrire $y^2 + y$ sous la forme d'un carré parfait auquel on ajoute (ou on soustrait) une constante.**
   On a $y^2 + y = (y^2 + y + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.
   b) Déterminer les coordonnées du centre et la valeur du rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$. Le représenter graphiquement.
   Le centre du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$ a pour coordonnées $(0, -\frac{1}{2})$ et son rayon vaut $\frac{1}{2}$.

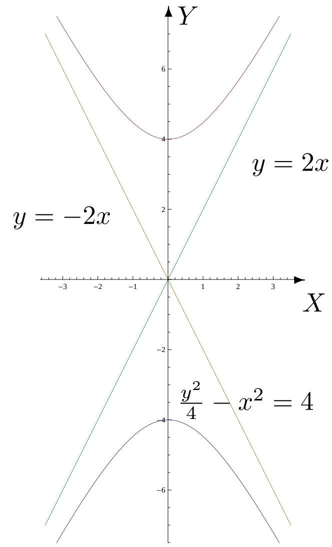


c) Pour chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent, déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection avec les axes. Les représenter graphiquement.
L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(4, 0), (-4, 0)$, $(0, 2)$ et $(0, -2)$.
L'ellipse d'équation $\frac{y^2}{4} + x^2 = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(2, 0), (-2, 0)$, $(0, 4)$ et $(0, -4)$.

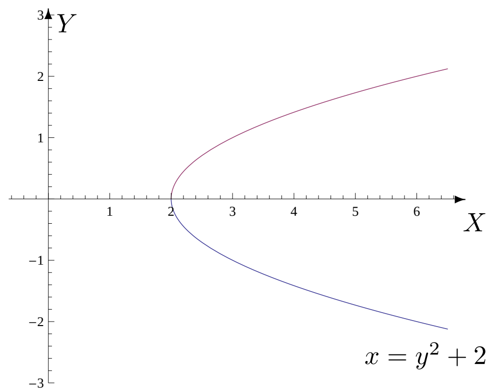


d) Donner les coordonnées des foyers et la valeur de l'excentricité des ellipses représentées ci-dessus.
Les foyers de l'ellipse d'équation (3) ont pour coordonnées $(2\sqrt{3}, 0)$ et $(-2\sqrt{3}, 0)$; son excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les foyers de l'ellipse d'équation (8) ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{3})$ et $(0, -2\sqrt{3})$; son excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
e) Donner les coordonnées des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes des asymptotes et la valeur de l'excentricité des hyperboles repérées dans l'exercice ci-dessus.
Pour l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{5}, 0)$ et $(-2\sqrt{5}, 0)$, les sommets ont pour coordonnées $(4, 0)$ et $(-4, 0)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = \frac{x}{2}$ et $y = -\frac{x}{2}$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Pour l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{4} - x^2 = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{5})$ et $(0, -2\sqrt{5})$, les sommets ont pour coordonnées $(0, 4)$ et $(0, -4)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = 2x$ et $y = -2x$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
f) Représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.

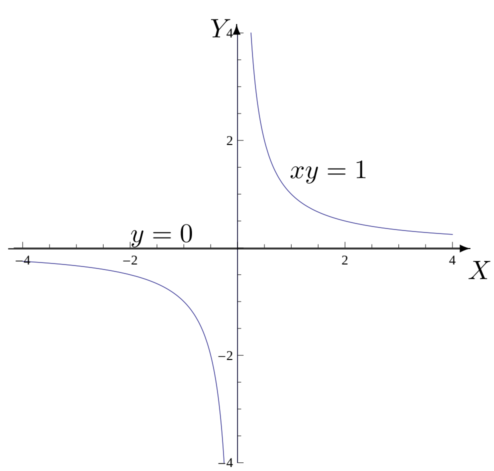




g) Donner les coordonnées du foyer et la valeur de l'excentricité des éventuelles paraboles repérées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement.
La parabole d'équation $x=y^2+2$ a un foyer dont les coordonnées sont $(\frac{9}{4},0)$ et son excentricité vaut $e=1$.



h) Si, dans l'exercice précédent, il reste des équations de courbes non encore représentées, les analyser afin d'en donner aussi une représentation graphique.
L'équation $x^2+y^2=0$ n'est vérifiée que par le point de coordonnées $(0,0)$.
L'équation $y=xy^2 \Leftrightarrow y(1-xy)=0 \Leftrightarrow (y=0 \text{ ou } xy=1)$ a pour représentation graphique la droite d'équation $y=0$ et l'hyperbole équilatère d'équation $y=1/x$.



Liste 5 : représentation d'ensembles

Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(t, \sqrt{1-t^2}) : t \in [-1, 1]\}.$$

a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.

Des équations paramétriques de cette courbe sont $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \ t \in [-1, 1]$.

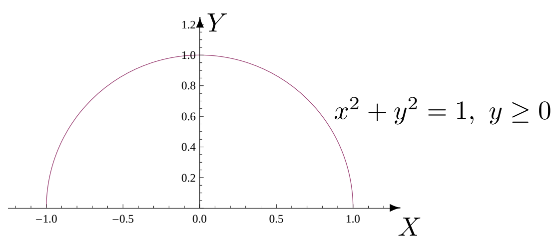
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.

En éliminant le paramètre, on obtient l'équation $y = \sqrt{1-x^2}, \ x \in [-1, 1]$.

c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.

L'équation précédente se transforme en $x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geq 0$.

d) Représenter graphiquement la courbe.



2. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(2\sqrt{1+x^2}, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.

Des équations paramétriques de cette courbe sont $\begin{cases} x = 2\sqrt{1+t^2} \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.

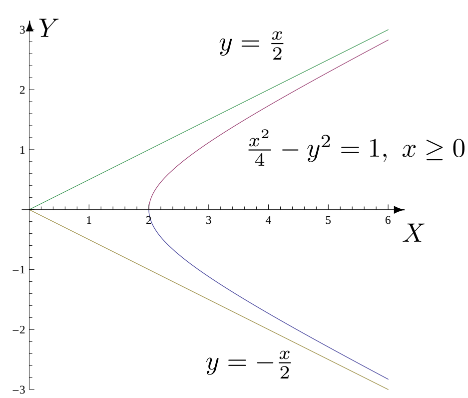
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.

En éliminant le paramètre, on obtient l'équation $x = 2\sqrt{1+y^2}, \ y \in \mathbb{R}$.

c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.

L'équation précédente se transforme en $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ avec $x \geq 0$.

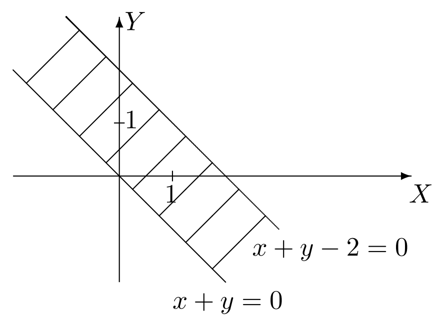
d) Représenter graphiquement la courbe.



3. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x + y - 1| \leq 1\}.$$

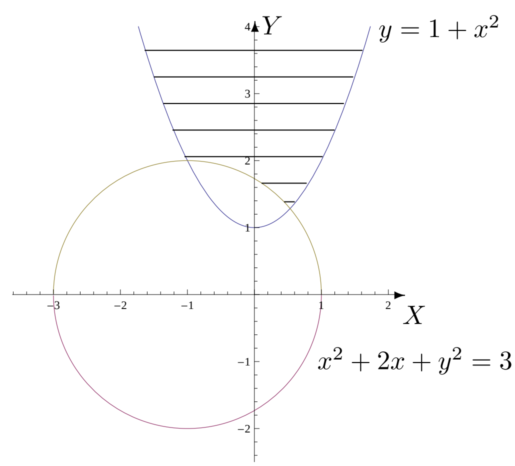
a) Si la valeur absolue d'un nombre vaut 1, que vaut ce nombre ?
Ce nombre vaut 1 ou -1.
b) Comment écrire $|x+y-1|=1$ de façon équivalente ?
L'équation $|x+y-1|=1$ est équivalente à $x+y-2=0$ ou $x+y=0$.
c) Représenter graphiquement la (les) équation(s) obtenue(s) ci-dessus.
d) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné en la(les) hachurant. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points des « bords » sont compris dans l'ensemble.



4. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \geq 1+x^2 \text{ et } x^2+2x+y^2 \geq 3\right\}.$$

a) Représenter la courbe d'équation $y=1+x^2$ ainsi que celle d'équation $x^2+2x+y^2=3$.
b) Déterminer la région du plan qui correspond à $y \geq 1+x^2$.
c) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à $x^2+2x+y^2 \geq 3$.
d) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points des « bords » sont compris dans l'ensemble.

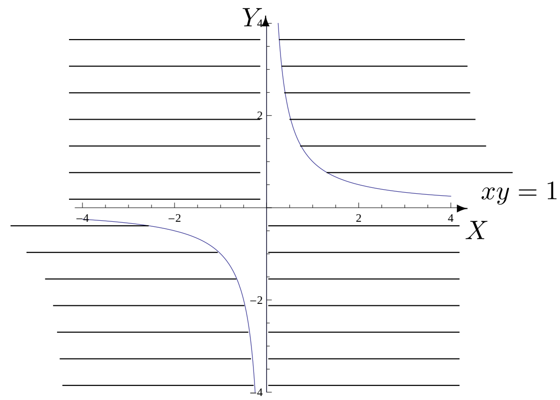


5. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{xy} \leq 1\right\}.$$

a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
Puisque $xy \neq 0$, les points des axes ne peuvent appartenir à l'ensemble.
b) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
c) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?

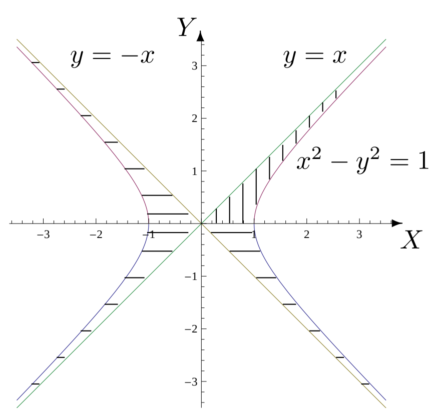
Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais non les points des axes.



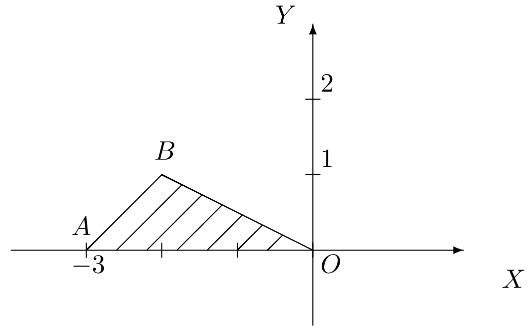
6. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y\in\mathbb{R},\ \frac{1}{x^2-y^2}\geq 1\right\}.$$

a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
Puisque $x^2-y^2\neq 0$, les points des droites d'équation $y=x$ et $y=-x$ ne peuvent appartenir à l'ensemble.
b) Si $P_1(x,y)$ avec $x,y>0$ appartient à l'ensemble, que peut-on dire des points $P_2(-x,y)$, $P_3(-x,-y)$, $P_4(x,-y)$ à propos de leur éventuelle appartenance à l'ensemble ?
Si $P_1(x,y)$ avec $x,y>0$ appartient à l'ensemble alors les points $P_2(-x,y)$, $P_3(-x,-y)$ et $P_4(x,-y)$ appartiennent aussi à l'ensemble.
c) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
d) Quel est le signe de la fraction $\frac{1}{x^2-y^2}$? Que peut-on en déduire ?
La fraction $\frac{1}{x^2-y^2}$ est positive puisqu'elle est supérieure ou égale à 1. Dès lors, $x^2-y^2>0$ et l'inéquation est équivalente à $0<x^2-y^2\leq 1$.
e) Dans le premier quadrant, hachurer l'ensemble des points correspondants à $\frac{1}{x^2-y^2}\geq 1$.
f) Dans une autre couleur, hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais non ceux des asymptotes.



7. **Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.**



a) Donner les coordonnées cartésiennes des sommets du triangle ABO.
Les coordonnées des sommets sont les suivantes : $A(-3,0)$, $B(-2,1)$ et $O(0,0)$.
b) Déterminer les équations cartésiennes des droites AB, BO et AO.
La droite AB a pour équation cartésienne $x - y + 3 = 0$.
L'équation de BO est $x + 2y = 0$ et celle de AO est $y = 0$.
c) Décrire analytiquement l'ensemble E comme dans les exercices ci-dessus.
On a $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x+3,\ y \leq -\frac{x}{2},\ y \geq 0\}$.
d) Quel est l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ?
L'ensemble de variation des ordonnées des points de E est $[0,1]$.
e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
Pour un y fixé dans $[0,1]$, l'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[y-3,-2y]$.
f) Donner une description analytique de E autre que celle donnée en c) en se servant des deux items précédents.
On peut aussi décrire analytiquement E par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [y-3,-2y]\}$.
g) Quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
L'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[-3,0]$.
h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, peut-on donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ? Si oui, le donner. Si non, que doit-on faire ?
Non, y ne varie pas entre les mêmes bornes si $x \in [-3,-2]$ ou si $x \in [-2,0]$.
Si x est fixé dans $[-3,-2]$ alors y varie dans $[0,x+3]$ et si x est fixé dans $[-2,0]$ alors y varie dans $[0,-\frac{x}{2}]$.
i) Donner une description analytique de E autre que celles données en c) et en f) en se servant des deux items précédents.
On a aussi la description suivante

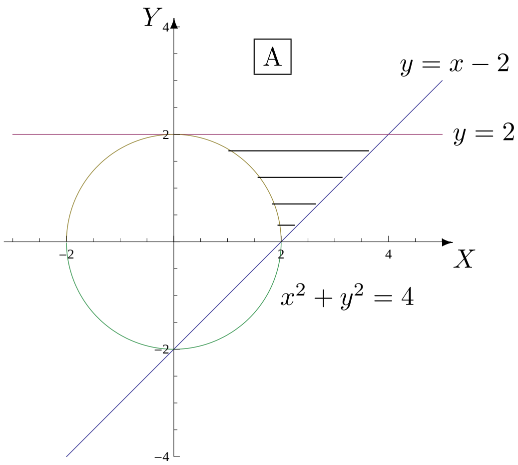
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3,-2],\ y \in [0,x+3]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,0],\ y \in \left[0,-\frac{x}{2}\right]\right\}.$$

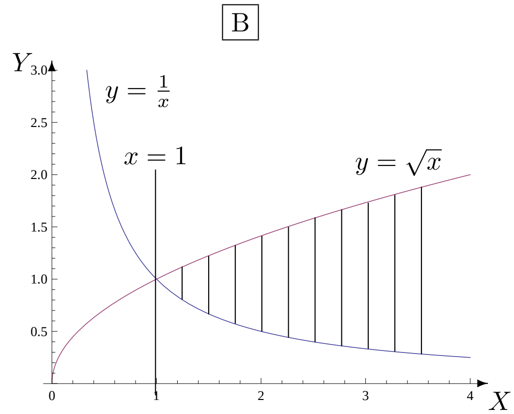
8. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B si**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x-2 \leq y \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 4\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Pour chacun de ces 2 ensembles,
a) déterminer leur ensemble X (respectivement Y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées)
b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans X (resp. Y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points
c) donner 2 descriptions analytiques en se servant des 2 items précédents





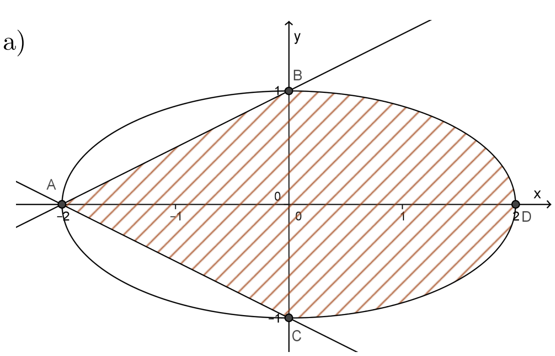
Les points des bords sont compris dans A et dans B.

Pour A :
a) $X = [0, 4]$ et $Y = [0, 2]$
b) si x fixé dans $[0, 2]$ alors les ordonnées varient dans $[\sqrt{4 - x^2}, 2]$
si x fixé dans $[2, 4]$ alors les ordonnées varient dans $[x - 2, 2]$.
si y fixé dans Y alors les abscisses varient dans $[\sqrt{4 - y^2}, y + 2]$
c) on a
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in [\sqrt{4 - x^2}, 2]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2, 4],\ y \in [x - 2, 2]\}$
$\quad = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2],\ x \in [\sqrt{4 - y^2}, y + 2]$

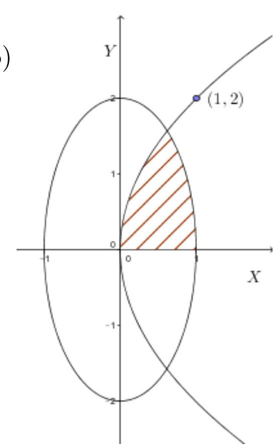
Pour B :
a) $X = [1, +\infty[$ et $Y =]0, +\infty[$
b) si x fixé dans X alors les ordonnées varient dans $[\frac{1}{x}, \sqrt{x}]$
si y fixé dans $]0, 1]$ alors les abscisses varient dans $[\frac{1}{y}, +\infty[$.
si y fixé dans $[1, +\infty[$ alors les abscisses varient dans $[y^2, +\infty[$
c) on a
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[,\ y \in [\frac{1}{x}, \sqrt{x}]\}$
$\quad = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0, 1],\ x \in [\frac{1}{y}, +\infty[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [y^2, +\infty[\}$

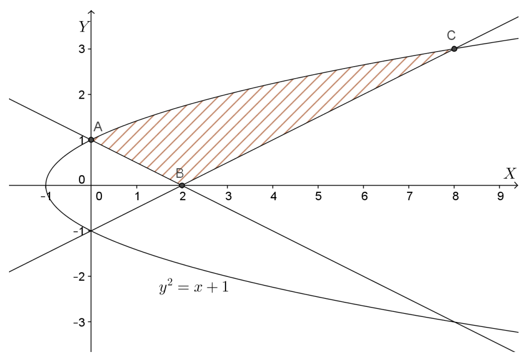
9. **Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.

a)



b)



c) 

a) Les points A, B, C et D ont respectivement pour coordonnées $(-2, 0), (0, 1), (0, -1)$ et $(2, 0)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv x - 2y + 2 = 0$, $AC \equiv x + 2y + 2 = 0$, et l'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in \left[-2y - 2, 2\sqrt{1 - y^2}\right]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in \left[2y - 2, 2\sqrt{1 - y^2}\right]\right\}.$$

ou encore par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0],\ y \in \left[\frac{-x - 2}{2}, \frac{x + 2}{2}\right]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in \left[\frac{-\sqrt{4 - x^2}}{2}, \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}\right]\right\}.$$

b) L'ellipse a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ou encore $4x^2 + y^2 = 4$. la branche de la parabole qui comprend le point de coordonnées $(1, 2)$ a pour équation $y = 2\sqrt{x}$. Le point d'intersection entre les deux courbes est le point de coordonnées $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{-2 + 2\sqrt{5}})$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}\right],\ x \in \left[\frac{y^2}{4}, \frac{\sqrt{4 - y^2}}{2}\right]\right\}.$$

ou encore par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right],\ y \in \left[0, 2\sqrt{x}\right]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right],\ y \in \left[0, 2\sqrt{1 - x^2}\right]\right\}.$$

c) Les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées $(0, 1), (2, 0)$ et $(8, 3)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB : x + 2y - 2 = 0$, $BC : x - 2y - 2 = 0$, et la parabole a pour équation $y^2 - 1 = x$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

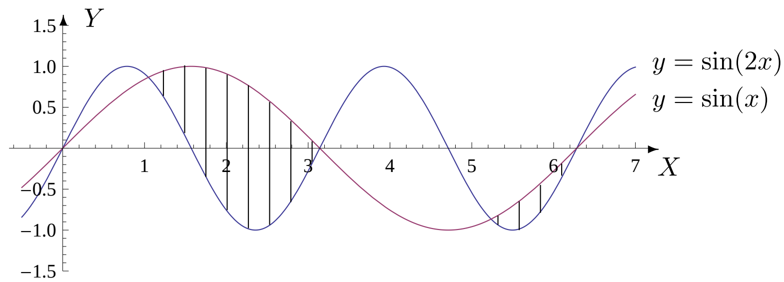
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [-2y + 2, 2y + 2]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, 3],\ x \in \left[y^2 - 1, 2y + 2\right]\right\}.$$

ou encore par

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in \left[\frac{-x}{2} + 1, \sqrt{x + 1}\right]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2, 8],\ y \in \left[\frac{x}{2} - 1, \sqrt{x + 1}\right]\right\}.$$

10. **On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.**

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \sin(2x) \le y \le \sin(x)\}.$$



Les points des « bords » sont compris dans l'ensemble.

Liste 6 : nombres complexes

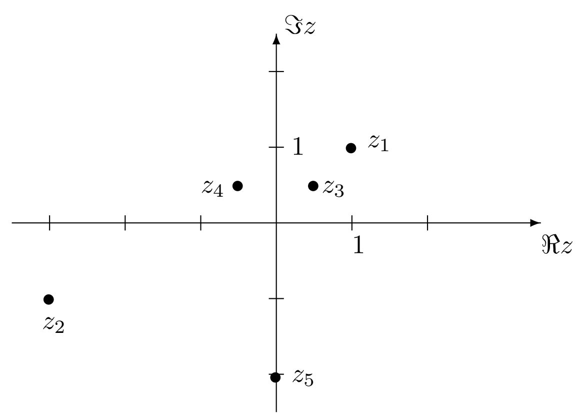
I. Exercices de base sur les nombres complexes

1. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$i+1, \quad (-i+1)(-1-2i), \quad \frac{1}{-i+1}, \quad \frac{i^7}{i-1}, \quad (1-i)^2$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = i+1$	1	1	$1-i$	$\sqrt{2}$
$z_2 = (-i+1)(-1-2i)$	-3	-1	$-3+i$	$\sqrt{10}$
$z_3 = \frac{1}{-i+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_4 = \frac{i^7}{i-1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_5 = (1-i)^2$	0	-2	$2i$	2



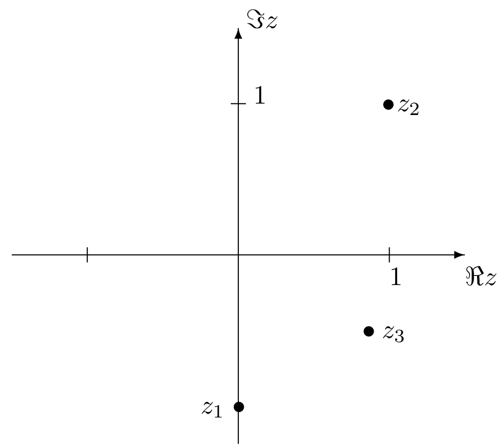
2. **Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$-i, \quad i+1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i).$$

On a

$$z_1 = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad z_2 = i+1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right).$$

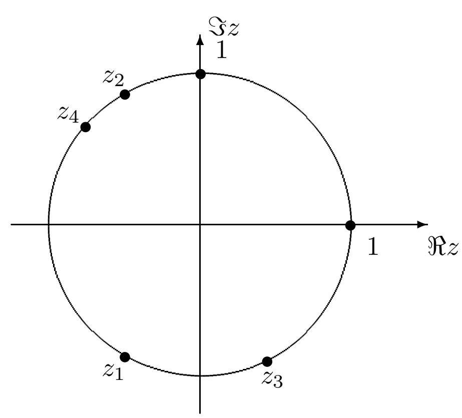


3. **On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫) en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$**

$$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha), \quad \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}, \quad (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)), \quad \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha).$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$	1
$z_2 = \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$	1
$z_3 = (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))$	$\cos(1-\alpha)$	$\sin(1-\alpha)$	$\cos(1-\alpha) - i\sin(1-\alpha)$	1
$z_4 = \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$-\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha)$	1



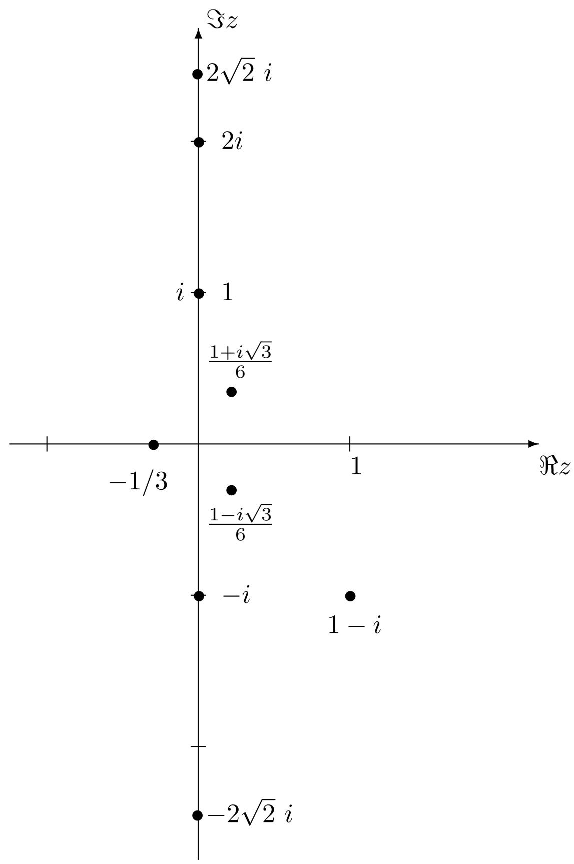
4. **Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

(1) $z^2 + 8 = 0$ (2) $27z^3 + 1 = 0$ (3) $z^2 + 2 = iz$ (4) $z^2 - z + 1 + i = 0$ (5) $z^2 - (1-2i)z = 1 + i$

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S = \{-2\sqrt{2}\ i, 2\sqrt{2}\ i\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation (2) est

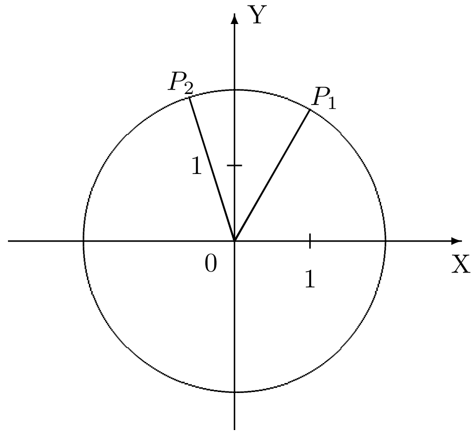
$$S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \right\}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S = \{-i, 2i\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation (4) est $S = \{1 - i, i\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation (5) est $S = \{1 - i, -i\}$.



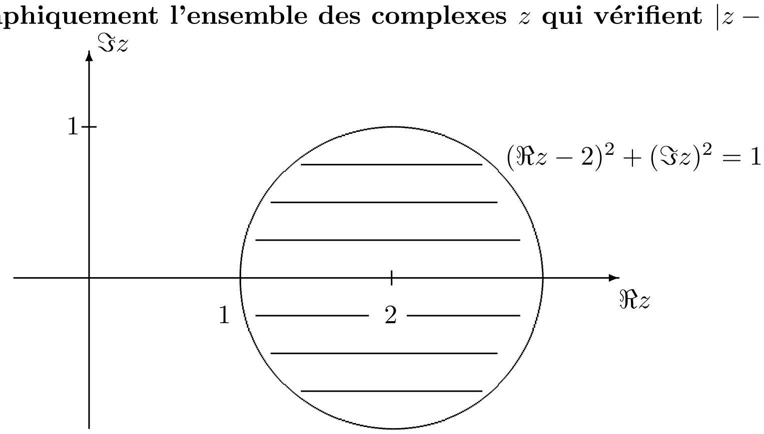
$\boxed{\textbf{II. Divers}}$

1. **Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point P_1 de coordonnées cartésiennes x_1, y_1, telles que $0 < x_1 < y_1$. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ de $30°$ dans le sens trigonométrique, en le maintenant lié à l'origine O. En fonction des coordonnées de P_1, déterminer les coordonnées cartésiennes de l'extrémité P_2 du vecteur obtenu après rotation.**
   a) Représenter graphiquement la situation.



b) En faisant appel à la trigonométrie, écrire les coordonnées de P_1 sous une autre forme.
Si la distance de P_1 à O vaut R, réel strictement positif, alors P_1 a pour coordonnées cartésiennes $(R\cos(\theta),\ R\sin(\theta))$ avec $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.
c) En déduire les coordonnées de P_2.
Les coordonnées cartésiennes de P_2 sont alors $(R\cos(\theta + \frac{\pi}{6}),\ R\sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$
d) Donner les coordonnées de P_2 en fonction de x_1 et y_1.
Les coordonnées cartésiennes de P_2 en fonction de x_1 et y_1 sont $\frac{1}{2}(\sqrt{3}\ x_1 - y_1, x_1 + \sqrt{3}\ y_1)$.
e) Interpréter cet exercice en utilisant les nombres complexes
P_1 est le point-image du complexe $z_1 = R(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et P_2 est le point-image du complexe $z_2 = R(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$. Si on multiplie z_1 par $z = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})$, on obtient z_2. Ainsi, la rotation de 30° dans le sens trigonométrique correspond à une multiplication du complexe z_1 par le complexe z.

2. **Représenter graphiquement l'ensemble des complexes z qui vérifient $|z - 2| \leq 1$.**



Les points du cercle (le « bord ») sont compris dans l'ensemble.

3. **On donne l'ensemble A suivant du plan. Décrire cet ensemble à l'aide des coordonnées polaires.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 9, x < 0, y < 0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 3, \Re z < 0, \Im z < 0\}.$$

On a

$$A' = \left\{(r, \theta) : r \in]0, 3],\ \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\right\}.$$

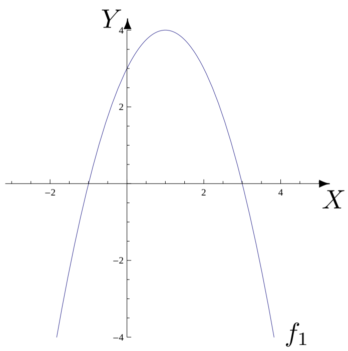
Liste 7 :
Éléments de base relatifs aux fonctions

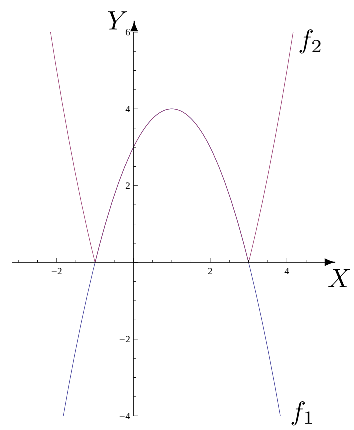
Exercices sur les éléments de base relatifs aux fonctions

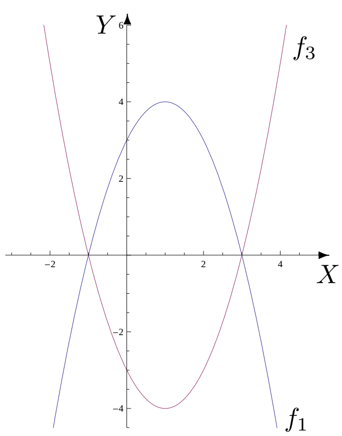
1. **Représenter graphiquement les fonctions données explicitement ci-dessous, toutes définies sur $\mathbb{R}$**

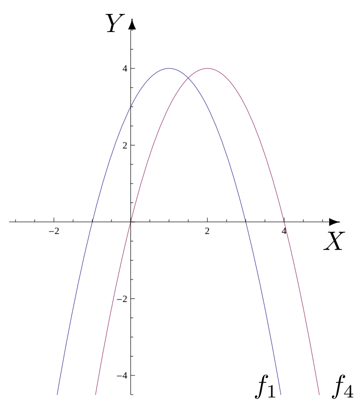
$$f_1(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad f_2(x) = |-x^2 + 2x + 3|$$

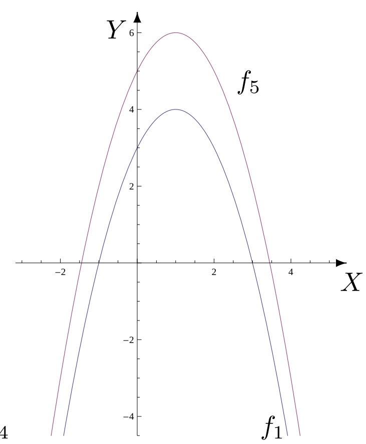
$$f_3(x) = -f_1(x), \quad f_4(x) = f_1(x-1), \quad f_5(x) = f_1(x) + 2.$$







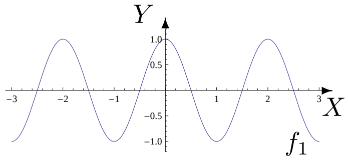


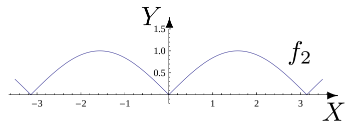


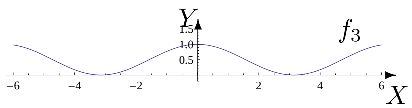
2. **Déterminer les domaines de définition, la parité, la périodicité et le graphique des fonctions données explicitement ci-dessous**

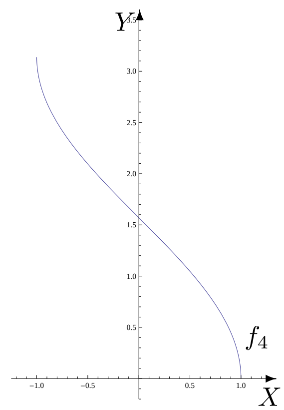
$$f_1(x) = \cos(\pi x), \; f_2(x) = |\sin(x)|, \; f_3(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right), \; f_4(x) = \operatorname{arcos}(x), \; f_5(x) = \operatorname{arcos}(\cos(x)).$$

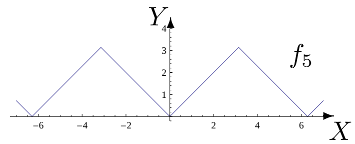
Fonction	dom(f)	Parité	Période
f_1	$\mathbb{R}$	pair	2
f_2	$\mathbb{R}$	pair	π
f_3	$\mathbb{R}$	pair	2π
f_4	$[-1, 1]$	—	non périodique
f_5	$\mathbb{R}$	pair	2π









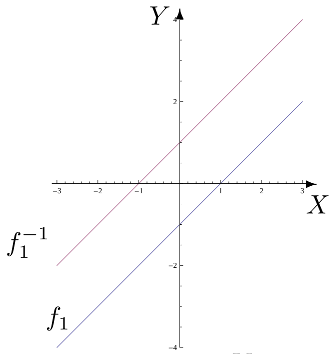


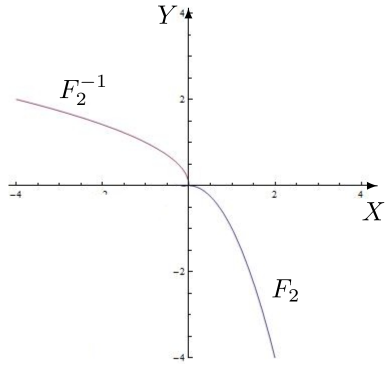
3. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image (x est une variable réelle). Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe ; au besoin, réduire le domaine de définition pour pouvoir en définir une. Représenter alors f et son inverse dans le même repère orthonormé.**

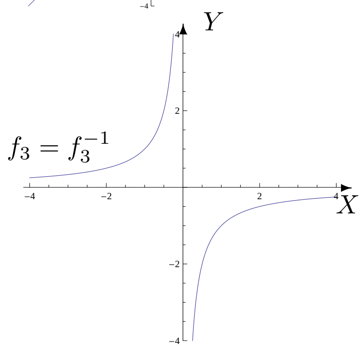
$$f_1(x) = x - 1, \quad f_2(x) = -x^2, \quad f_3(x) = \frac{-1}{x}, \quad f_4(x) = |x+2|.$$

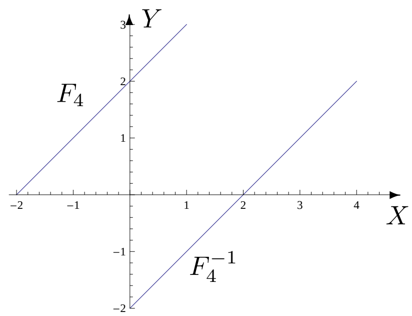
Fonction	dom(f)	im(f)	Fonction inverse
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_1^{-1} : x \mapsto x+1$
f_2	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0]$	pas d'inverse (cf. ci-dessous)
f_3	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$f_3^{-1} : x \mapsto -\frac{1}{x}$
f_4	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty[$	pas d'inverse (cf. ci-dessous)

Si on restreint le domaine de définition de f_2 à l'ensemble $[0, +\infty[$ par exemple alors la fonction $F_2 : [0, +\infty[\to]-\infty, 0] : x \mapsto -x^2$ admet une fonction inverse donnée par $F_2^{-1} :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[\ x \mapsto \sqrt{-x}$.
Si on restreint le domaine de définition de f_4 à l'ensemble $[-2, +\infty[$ par exemple alors la fonction $F_4 : [-2, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x+2$ admet une fonction inverse donnée par $F_4^{-1} :\ [0, +\infty[\to [-2, +\infty[\ x \mapsto x - 2$.









4. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous. Dans les cas (b), (c), (g) et (h), mentionner de quelles fonctions élémentaires chacune de ces fonctions est la composée**

$$(a)\ \frac{1}{2-|x+1|},\quad (b)\ \ln(-x^2-2x+3),\quad (c)\ \sqrt{\frac{x-1}{x-2}},\quad (d)\ \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}},\quad (e)\ \ln(e^x-1)$$

$$(f)\ \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right),\quad (g)\ \arcsin(x^2-1),\quad (h)\ \mathrm{arcotg}(\ln(x))$$

Fonction	dom(f)
$(a)\ x \mapsto \frac{1}{2-\lvert x+1\rvert}$	$\mathbb{R} \setminus \{-3,\ 1\}$
$(b)\ x \mapsto \ln(-x^2-2x+3)$	$]-3,1[$
$(c)\ x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$	$]-\infty,1] \cup\ ]2,+\infty[$
$(d)\ x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$	$]2,+\infty[$
$(e)\ x \mapsto \ln(e^x-1)$	$]0,+\infty[$
$(f)\ x \mapsto \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$	$\mathbb{R}$
$(g)\ x \mapsto \arcsin(x^2-1)$	$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
$(h)\ x \mapsto \mathrm{arcotg}(\ln(x))$	$]0,+\infty[$

Si la fonction donnée est égale à $f \circ g$ alors on a

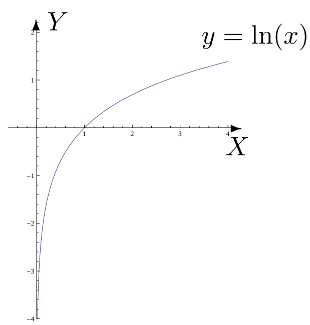
- (b) pour $x \mapsto \ln(-x^2-2x+3)$ on a les fonctions $g : x \mapsto -x^2-2x+3$ et $f : y \mapsto \ln(y)$
- (c) pour $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ on a les fonctions $g : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ et $f : y \mapsto \sqrt{y}$

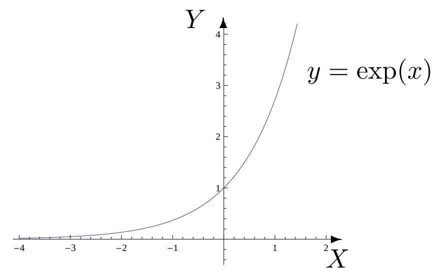
- (g) pour $x \mapsto \arcsin(x^2-1)$ on a les fonctions $g : x \mapsto x^2 - 1$ et $f : y \mapsto \arcsin(y)$
- (h) pour $x \mapsto \mathrm{arcotg}(\ln(x))$ on a les fonctions $g : x \mapsto \ln(x)$ et $f : y \mapsto \mathrm{arcotg}(y)$

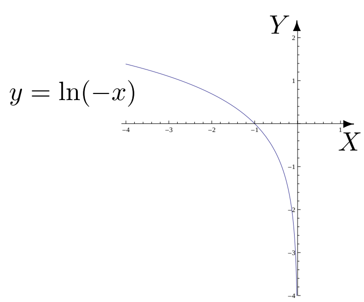
5. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de $\ln$ et de l'exponentielle).**

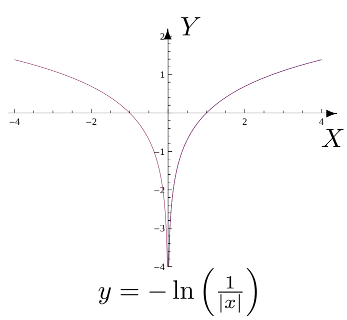
$$\ln(-x), \quad -\ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |-\ln(x)|, \quad -\exp(x), \quad \exp(x+1), \quad (\exp(x))+1.$$

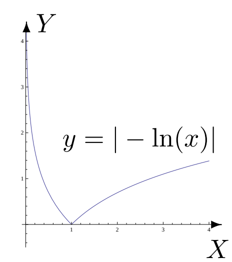
Le domaine de définition de la première fonction est $]-\infty,0[$; celui de la deuxième est $\mathbb{R}_0$ et celui de la troisième est $]0,+\infty[$.
Le domaine de définition des 3 fonctions exponentielles est $\mathbb{R}$.

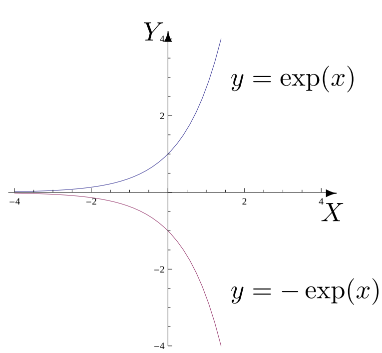


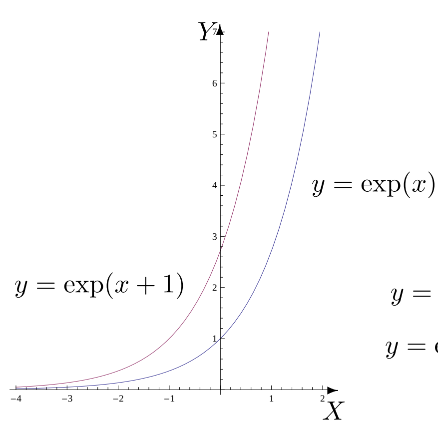


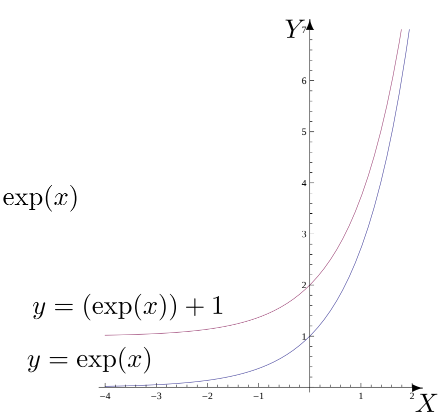












6. **On donne la fonction** $f : y \mapsto f(y) = g(\arcsin(y-2))$ **et la fonction** g **définie sur** $[0,2]$**.**
   a) Déterminer le domaine de définition de f
   b) Si elle existe, que vaut l'image de 2 par f **sachant que** $g(0) = 3,\ g(1) = 4$ **et** $g(2) = 7$ **?**

   a) Le domaine de définition de f est $[2,3]$.
   b) Puisque 2 appartient à $\text{dom}(f)$, l'image de 2 par f existe et on a $f(2) = g(\arcsin(0)) = g(0) = 3$.

7. **a) Déterminer le domaine de définition de** f **si** $f : x \mapsto f(x) = g(\sqrt{5x - x^2})$ **et si** g **est défini sur** $[-1,2]$**.**
   b) Si elle existe, que vaut l'image de $\frac{9}{2}$ **par** f **sachant que** $g(\frac{1}{2}) = -5,\ g(1) = \sqrt{3}$ **et** $g(\frac{3}{2}) = \sqrt{2}$ **?**

   a) Le domaine de définition de f est $[0,1] \cup [4,5]$.
   b) Puisque $\frac{9}{2}$ appartient à $\text{dom}(f)$, l'image de $\frac{9}{2}$ par f existe et on a $f(\frac{9}{2}) = g(\sqrt{\frac{9}{4}}) = g(\frac{3}{2}) = \sqrt{2}$.

Liste 8 :
Décomposition en fractions simples et manipulation des fonctions élémentaires

---

I. Décomposition en fractions simples

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

$$(1)\ \frac{1}{x^2-4x+4},\qquad (2)\ \frac{x}{-x^2+2x+3},\qquad (3)\ \frac{x^3}{x^3+1}$$

$$(4)\ \frac{x^2+1}{3x+1},\qquad (5)\ \frac{x^2-2}{x^2+2},\qquad (6)\ \frac{2}{x(x^2-4x+4)}$$

$$(7)\ \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1},\qquad (8)\ \frac{x^3-2}{x^3-x^2}\qquad (9)\ \frac{-2}{(x^2+1)(x+1)^2}$$

On a les décompositions suivantes :

$$(1)\ \frac{1}{x^2-4x+4}=\frac{1}{(x-2)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\quad (2)\ \frac{x}{-x^2+2x+3}=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}\right),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 3\}$$

$$(3)\ \frac{x^3}{x^3+1}=1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

$$(4)\ \frac{x^2+1}{3x+1}=\frac{3x-1}{9}+\frac{10}{9(3x+1)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}\qquad (5)\ \frac{x^2-2}{x^2+2}=1-\frac{4}{x^2+2},\quad x\in\mathbb{R}$$

$$(6)\ \frac{2}{x(x^2-4x+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right),\ x\in\mathbb{R}_0\setminus\{2\}\quad (7)\ \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1}=\frac{3}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$(8)\ \frac{x^3-2}{x^3-x^2}=1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x-1},\ x\in\mathbb{R}_0\setminus\{1\}\quad (9)\ \frac{-2}{(x^2+1)(x+1)^2}=\frac{-1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

II. Manipulation des fonctions élémentaires

Si elles sont définies, simplifier les expressions suivantes au maximum

$$(1)\ \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+\ln\left(\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)^2\right),\ (2)\ \mathrm{tg}\left(\ln(e^{3\pi}/2)\right),\ (3)\ \exp(3\ln(2e)),\ (4)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$(5)\ \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right),\ (6)\ \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ (7)\ \mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ (8)\ \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right).$$

Les expressions sont définies et valent respectivement (1) $\ln(3)-3\ln(2)$, (2) $-\mathrm{tg}(\ln(2))$, (3) $8e^3$
(4) $-\frac{\pi}{3}$, (5) $\frac{\pi}{5}$, (6) $\frac{\pi}{6}$, (7) $\frac{\pi}{2}$, (8) $-\frac{3\pi}{7}$.

Liste 9 : limites, continuité et dérivation

I. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

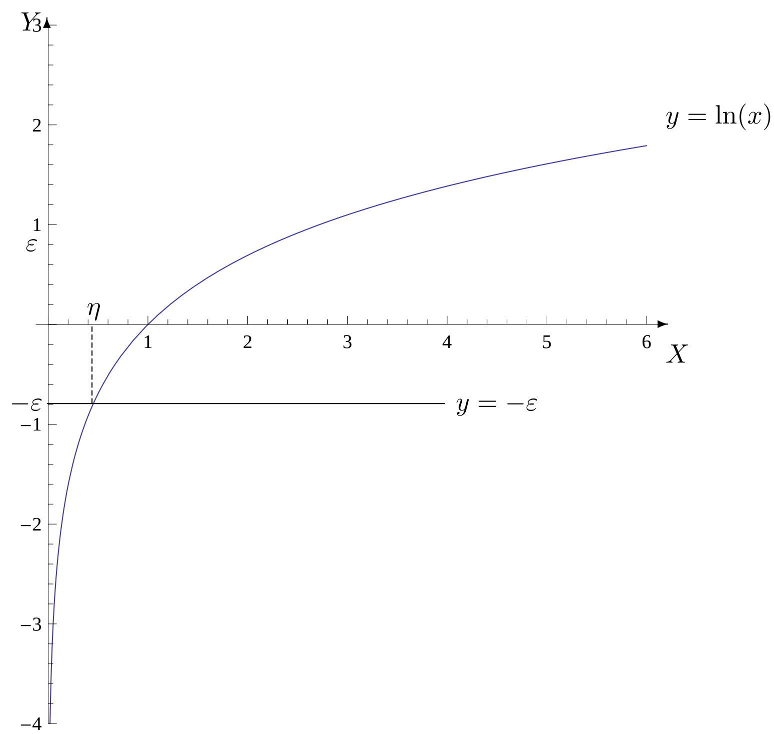
1. **On a**

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Exprimer mathématiquement explicitement la définition qui « se cache » derrière cette succession de symboles (qui « résument » en fait la définition) et en donner une interprétation graphique.

En mathématique, la définition de $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ est donnée par

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < x \leq \eta \Rightarrow \ln(x) \leq -\varepsilon.$$



2. **Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire les quelques limites suivantes par application du théorème de la limite des fonctions composées**

$$(a) \ \lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad (b) \ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\ln(x^2)}, \quad (c) \ \lim_{x \to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

La limite (a) n'existe pas, la limite (b) vaut 0^+ et la limite (c) vaut $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$.

3. **Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital***

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4}$ (2) $\lim_{x\to+\infty}(-x^2-2x)$ (3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^3}$

(4) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg}(x)}{\sin(3x)}$ (5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+2x^2}-\sqrt{2x^2+3}\right)$ (6) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \ln(\operatorname{arctg}(x))$

(7) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|1-x|}$ (8) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2+5x}{x^2+3}$ (9) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\sin(2x)}$

(10) $\lim_{x\to+\infty} \ln(|-x+\pi|)$ (11) $\lim_{x\to+\infty} (\ln(3x+2)-\ln(3x))$ (12) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-2x}{2x^2-1}$

(13) $\lim_{y\to+\infty} \log_y(3)$ (14) $\lim_{u\to-\infty} u\, e^{\frac{1}{u-1}}$ (15) $\lim_{x\to+\infty} \exp\left(-\frac{1}{x+2}\right)$

Toutes ces limites peuvent être envisagées sauf la limite (6) et sont respectivement égales à

(1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $(-1)^-$ (4) $+\infty$ (5) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^-$ (7) $(-2)^+$ (8) $(-2)^-$

(9) $\left(\frac{1}{2}\right)^+$ (10) $+\infty$ (11) 0^+ (12) $\left(\frac{3}{2}\right)^+$ (13) 0^+ (14) $-\infty$ (15) 1^-.

II. Continuité et dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que $f: x \mapsto 3x^2+x$ est dérivable en 1 et donner la valeur de sa dérivée en ce point.**

Calculons $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(3h+7) = 7$. Comme cette limite existe et est finie, la fonction est dérivable en 1. La limite valant 7, la dérivée de cette fonction en 1 vaut 7.

2. α) **On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.**

$(a)\sqrt[5]{3x^2+1}$ $(b)\frac{1}{\sqrt{2+x}}$ $(c)\frac{1}{3x^2+6x+3}$ $(d)\operatorname{arctg}(\cos(x))$ $(e)\sqrt{\sin(2x)}$ $(f)\sin(\operatorname{cotg}(x))$

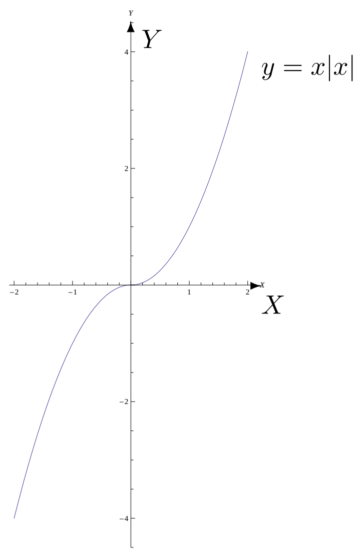
$(g)\, e^{\operatorname{arcos}(x)}$ $(h)\, e^{e^x}$ $(i)\ln(x^4)$ $(j)\ln(x^2+x-2)$ $(k)(\ln(4))^x$ $(l)x|x|$

Si on note A le domaine de définition des fonctions, B leur domaine de continuité et C leur domaine de dérivabilité, on a les résultats suivants

f	$A=B$	C	Dérivée
(a) $\sqrt[5]{3x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2+1)^4}}$
(b) $\frac{1}{\sqrt{2+x}}$	$]-2,+\infty[$	$]-2,+\infty[$	$\frac{-1}{2\sqrt{(2+x)^3}}$
(c) $\frac{1}{3x^2+6x+3}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{-2}{3(x+1)^3}$
(d) $\operatorname{arctg}(\cos(x))$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$

f	$A = B$	C	Dérivée
$(e)\ \sqrt{\sin(2x)}$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$	$\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$
$(f)\ \sin(\operatorname{cotg}(x))$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\frac{-\cos(\operatorname{cotg}(x))}{\sin^2(x)}$
$(g)\ e^{\arccos(x)}$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{-e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$
$(h)\ e^{e^x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$e^x\ e^{e^x}$
$(i)\ \ln(x^4)$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$\frac{4}{x}$
$(j)\ \ln(x^2+x-2)$	$]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,+\infty[$	$]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,+\infty[$	$\frac{2x+1}{x^2+x-2}$
$(k)\ (\ln(4))^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(\ln(4))\ (\ln(4))^x$
$(l)\ x\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2\lvert x\rvert$

β) **Représenter la fonction $x \mapsto x|x|$ dans un repère orthonormé.**



3. **On donne la fonction g dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction $f : t \mapsto f(t) = g(\ln(t-1))$.**
   a) Déterminer le plus grand ouvert dans lequel f est dérivable.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction de la dérivée de g.
   c) Mêmes questions si g est dérivable sur $]0,4[$ et si f est la fonction $y \mapsto f(y) = g(\sqrt{y^2-4})$.
   d) Mêmes questions si g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right[$ et si f est la fonction $a \mapsto f(a) = g(\arcsin(\sqrt{1-a}))$.

   a) Le plus grand ouvert dans lequel f est dérivable est $\left]\frac{1}{e}+1, e+1\right[$.

   b) Sur son domaine de dérivabilité, on a $Df(t) = D_u g(u)|_{u=\ln(t-1)} \cdot \frac{1}{t-1}$.

c) Le domaine de dérivabilité de f est $]-2\sqrt{5},-2[\,\cup\,]2,2\sqrt{5}[$; dans cet ensemble, sa dérivée vaut

$$Df(y) = D_u g(u)|_{u=\sqrt{y^2-4}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2-4}}.$$

d) Le domaine de dérivabilité de f est $\left]\frac{1}{2},1\right[$; dans cet ensemble, sa dérivée vaut

$$Df(a) = D_u g(u)|_{u=\arcsin(\sqrt{1-a})} \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{a(1-a)}}\right).$$

4. **Soit** $F : t \mapsto F(t) = f(x(t))$ **avec** $x(4) = 3$**,** $Dx(4) = -2$ **et** $(D_x f)(3) = 5$**. En supposant** F **dérivable en** 4**, que vaut** $(DF)(4)$ **?**

   La dérivée de F en 4 vaut -10.

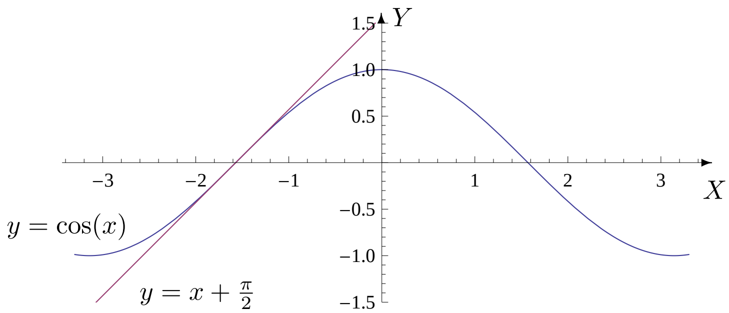
Liste 10 :

Étude de fonctions et application du théorème de l'Hospital

I. Etude d'une fonction

1. **Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$. Représenter cette fonction et cette tangente.**

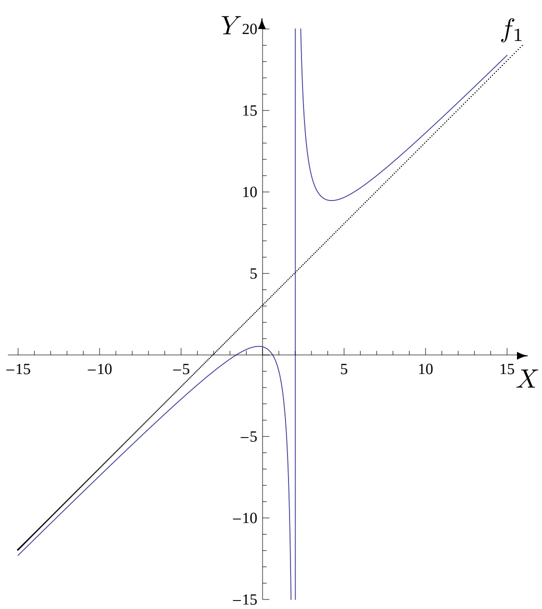
   L'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est $y = x + \frac{\pi}{2}$; le graphique de cette fonction et de cette tangente se trouve ci-dessous.

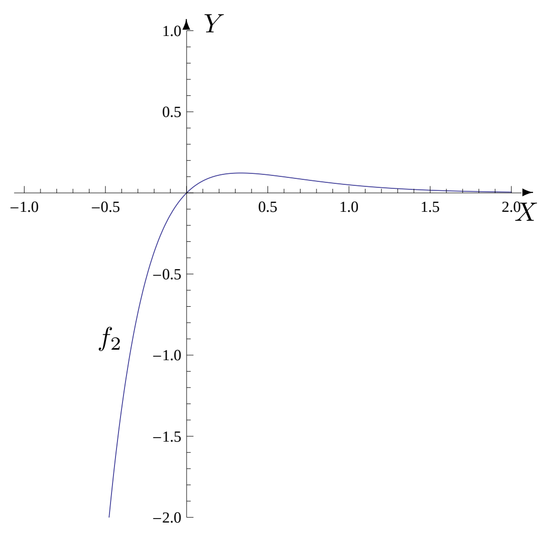


2. **Représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 suivantes**

$$f_1(x) = \frac{-x - x^2 + 1}{2 - x}, \qquad f_2(x) = xe^{-3x}.$$

   Une étude graphique permet de représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2. Voici leur graphique.





II. Théorème de l'Hospital

1. **Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x})$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2+1}{\operatorname{arctg}(x^2+2)}$

(7) $\displaystyle\lim_{t\to 1^+} (1-t)\ln(t^2-1)$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$ (9) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \big(\ln(|2-x|)-\ln(x^2)\big)$ (11) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$

(13) $\displaystyle\lim_{u\to +\infty} \frac{u^2}{e^{3u}}$ (14) $\displaystyle\lim_{y\to -\infty} y\,e^{-y^2}$ (15) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$

Fonction	dom(f)	Limite
(1) $f(x)=\dfrac{\cos(2x)}{x+1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)}{x+1}=1^-$
(2) $f(x)=x\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$	$\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\,\cup\,]0,+\infty[$	$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$
(3) $f(x)=\dfrac{\arcsin(2x)}{x}$	$\left[-\frac{1}{2},0\right[\,\cup\,\left]0,\frac{1}{2}\right]$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x}=2$
(4) $f(x)=\sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x})$	$]0,+\infty[$	$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3}\ln(\sqrt[5]{x})=0$
(5) $f(x)=\dfrac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}$	$\mathbb{R}_0$	$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}=0$
(6) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{\operatorname{arctg}(x^2+2)}$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2+1}{\operatorname{arctg}(x^2+2)}=+\infty$
(7) $f(x)=(1-t)\ln(t^2-1)$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$	$\displaystyle\lim_{t\to 1^+} (1-t)\ln(t^2-1)=0$
(8) $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{\|2-x\|}$	$]2,+\infty[$	$\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{\|2-x\|}$ pas de sens
(9) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]4,+\infty[$	$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2-3x-4)}{x-4}=0$
(10) $f(x)=\big(\ln(\|2-x\|)-\ln(x^2)\big)$	$\mathbb{R}_0\setminus\{2\}$	$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \big(\ln(\|2-x\|)-\ln(x^2)\big)=-\infty$
(11) $f(x)=\dfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}=0$
(12) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}$	$\mathbb{R}_0\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$
(13) $f(x)=\dfrac{u^2}{e^{3u}}$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\lim_{u\to +\infty} \frac{u^2}{e^{3u}}=0^+$
(14) $f(y)=y\,e^{-y^2}$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\lim_{y\to -\infty} y\,e^{-y^2}=0^-$
(15)$f(x)=\dfrac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$	$\mathbb{R}$	$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}=0^+$

La limite $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$ n'a pas de sens car on peut trouver un intervalle ouvert comprenant 2 dont l'intersection avec $\text{dom}(f)\cap\,]-\infty,2[$ est vide.

2. **Une lentille convexe est caractérisée par une distance focale f. Si un objet se trouve à une distance p de la lentille, son image sera à une distance q liée à p par la relation $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, quelle est la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm ?**

   Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm est égale à $\dfrac{-1}{100}$. La distance q de l'image décroît donc à la vitesse de $\dfrac{1}{100}$ cm pour une variation de 1 cm de p

3. **Démontrer par récurrence que**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^n}=+\infty$$

   avec $a>0$ et $n\in\mathbb{N}$ en admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. [1]
   En déduire que

$$\lim_{x\to-\infty}(x^n e^{ax})=0.$$

   On résume ces 2 propriétés en disant que " à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x".

1. Cette limite sera établie dans le cours 'Mathématiques générales (partim B)".

Liste 11 : primitivation (1)

1. **Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle dans lequel on travaille.**

(1) $\sqrt{1-2x}$	(2) $x^3 + x\sin(2x)$	(3) $x^3\sin(3x^4)$	(4) $\cos^2(3x)$
(5) $x\ln(2x+1)$	(6) $\arccos(x)$	(7) $\sqrt{x}\ln(x)$	(8) $(3x-4)e^{-x}$
(9) $x\sin^2(3x)$	(10) $x\sqrt{1+3x^2}$	(11) $\sin(\pi x)\ e^{2x}$	(12) π^x
(13) x^π	(14) $\dfrac{1}{8x^3+2x}$	(15) $\dfrac{1+3x}{2x+1}$	(16) $\dfrac{1}{1-2x+x^2}$

Remarque : les constantes peuvent différer d'un intervalle à l'autre.

Fonction	Intervalle de primitivation	Primitive à une constante près
(1) $f(x) = \sqrt{1-2x}$	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	$-\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3}$
(2) $f(x) = x^3 + x\sin(2x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^4}{4} - \frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$
(3) $f(x) = x^3\sin(3x^4)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{12}\cos(3x^4)$
(4) $f(x) = \cos^2(3x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(6x)}{12}$
(5) $f(x) = x\ln(2x+1)$	$\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$\frac{4x^2-1}{8}\ln(2x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$
(6) $f(x) = \arccos(x)$	$]-1,1[$	$x\ \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
(7) $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$\frac{2x\sqrt{x}}{3}\ln(x) - \frac{4x\sqrt{x}}{9}$
(8) $f(x) = (3x-4)e^{-x}$	$\mathbb{R}$	$(-3x+1)e^{-x}$
(9) $f(x) = x\sin^2(3x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{4} - \frac{x}{12}\sin(6x) - \frac{1}{72}\cos(6x)$
(10) $f(x) = x\sqrt{1+3x^2}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{9}\sqrt{(1+3x^2)^3}$
(11) $f(x) = \sin(\pi x)\ e^{2x}$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\ e^{2x}}{\pi^2+4}\left(\sin(\pi x) - \frac{\pi}{2}\cos(\pi x)\right)$
(12) $f(x) = \pi^x$	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi^x}{\ln(\pi)}$
(13) $f(x) = x^\pi$	$]0,+\infty[$	$\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}$
(14) $f(x) = \dfrac{1}{8x^3+2x}$	$]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$	$\frac{1}{2}\ln(\lvert x\rvert) - \frac{1}{4}\ln(4x^2+1)$
(15) $f(x) = \dfrac{1+3x}{2x+1}$	$\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$	$\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\ln(\lvert 2x+1\rvert)$
(16) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x+x^2}$	$]-\infty,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$	$\frac{-1}{x-1}$

2. **(1) Que vaut la primitive de $x \mapsto 2x^2+1$ qui prend la valeur 3 en -1 ?**
   (2) Que vaut la primitive de $y \mapsto \cos(3y)$ qui prend la valeur 2 en $\frac{\pi}{2}$?

   (1) La primitive de $x \mapsto 2x^2+1$ qui prend la valeur 3 en -1 est la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{3}x^3 + x + \dfrac{14}{3}$.

   (2) La primitive de $y \mapsto \cos(3y)$ qui prend la valeur 2 en $\dfrac{\pi}{2}$ est la fonction $y \mapsto \frac{1}{3}(\sin(3y)+7)$.

LISTE 12 : PRIMITIVATION (2)

Primitivation

1. **Primitiver les fonctions données explicitement ci-dessous. Dans chaque cas, spécifier les intervalles dans lesquels on travaille.**

$(1)\dfrac{\ln(x)}{x}$ $(2)\dfrac{\sin^3(x)-1}{\sin^2(x)}$ $(3)x\operatorname{arctg}(x)$ $(4)x\ln(x^2)$ $(5)\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

$(6)\dfrac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$ $(7)\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ $(8)\dfrac{x^5}{x^3-1}$ $(9)\dfrac{2x^2+6x-1}{(x^2+1)(x+2)}$ $(10)\dfrac{3x^2-2x-1}{(x^2+1)(x+2)}$

Remarque : les constantes peuvent différer d'un intervalle à l'autre.

Fonction	Intervalle de primitivation	Primitive à une constante près
(1)	$]0,+\infty[$	$\dfrac{\ln^2(x)}{2}$
(2)	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi,(k+1)\pi[$	$-\cos(x)+\operatorname{cotg}(x)$
(3)	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}(x)-\dfrac{x}{2}$
(4)	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$\dfrac{x^2}{2}(\ln(x^2)-1)$
(5)	$]-1,+\infty[$	$\dfrac{2}{15}\sqrt{x+1}(3x^2-4x+8)$
(6)	$]-1/2,1/2[$	$\dfrac{1}{4}\arcsin^2(2x)$
(7)	$]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$	$\ln\left(\left\lvert\dfrac{(x-2)^3}{x-1}\right\rvert\right)$
(8)	$]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$	$\dfrac{x^3}{3}+\ln(\sqrt[3]{\lvert x^3-1\rvert})$
(9)	$]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$	$\ln\left(\dfrac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{\lvert x+2\rvert}\right)$
(10)	$]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$	$-2\operatorname{arctg}(x)+3\ln(\lvert x+2\rvert)$

2. **Sans effectuer la primitivation, montrer que l'égalité suivante est correcte et préciser les intervalles dans lesquels on travaille.**

$$\int\frac{1-2x}{(1-x)(x-2)}\,dx\simeq\ln\left(\left\lvert\frac{(x-2)^3}{1-x}\right\rvert\right)$$

Pour le prouver, il suffit de montrer que la dérivée du membre de droite vaut $\dfrac{1-2x}{(1-x)(x-2)}$; on travaille dans $]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$.

Liste 13 : calcul intégral sur un ensemble borné fermé

I. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. **Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que**

   (a) si f est une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

   (b) si f est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$(1)\ \int_{-2}^{1} (x^2+2x)\ dx \qquad (2)\ \int_{-1}^{1} xe^{x}\ dx \qquad (3)\ \int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx$$

$$(4)\ \int_{1/2}^{3} \sqrt{3+\frac{x}{2}}\ dx \qquad (5)\ \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(x)\ dx \qquad (6)\ \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cotg}^2(x)\ dx$$

$$(7)\ \int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx \qquad (8)\ \int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\ dx \qquad (9)\ \int_{-1}^{4} \frac{x+1}{x+2}\ dx$$

$$(10)\ \int_{-1}^{1} \operatorname{arctg}(x)\ dx \qquad (11)\ \int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\ dx \qquad (12)\ \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$$

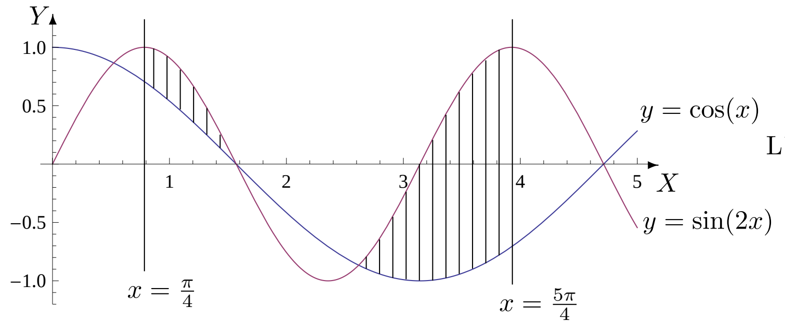
(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2+2x)\ dx = 0$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{x}\ dx = \frac{2}{e}$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx = \frac{1-e}{2e}$	(4) $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{3+\frac{x}{2}}\ dx = 9\sqrt{2} - \frac{13\sqrt{13}}{6}$
(5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(x)\ dx = \frac{\pi - 3\sqrt{3}+6}{24}$	(6) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cotg}^2(x)\ dx = \frac{12-4\sqrt{3}-\pi}{12}$
(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx = \frac{\pi^2}{4}$	(8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\ dx = \frac{1}{3}$
(9) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x+1}{x+2}\ dx = 5 - \ln(6)$	(10) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg}(x)\ dx = 0$
(11) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\ dx = \frac{7\pi}{24}$	(12) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

II. Calcul d'aires

1. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], y \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(x) \leq y \leq \sin(2x)\right\}.$$

   Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

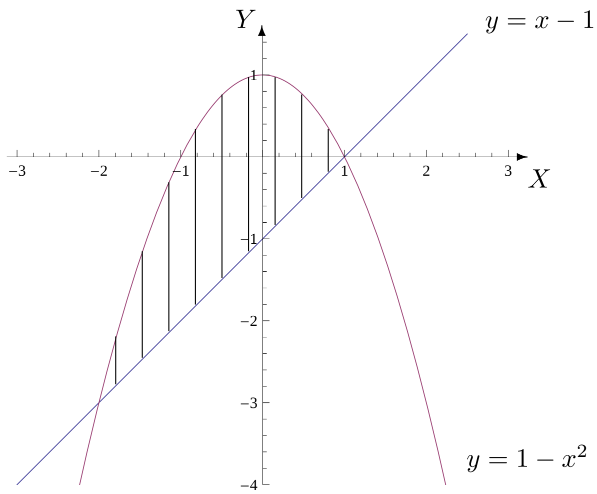


L'aire hachurée vaut $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

2. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) : x \in [-2, 1],\ y \in [x - 1, 1 - x^2]\right\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.



L'aire hachurée vaut $\frac{9}{2}$.

Liste 14 :

calcul intégral sur un ensemble non borné fermé

Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(|x|))\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$ (8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\,e^x\,dx$ (10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{2x}\,dx$

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{10\sqrt{2}}{3}$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\,dx = -2$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(|x|))\,dx = \frac{e^2+1}{4}$	(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{12}$
(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\,dx = \frac{1}{12}\ln(2)$	(6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx = 1$
(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{\pi}{8}$	(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx \quad \nexists$
(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\,e^x\,dx = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}(2\sqrt{3}-1)}{10}$	(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{2x}\,dx \quad \nexists$

Pour l'intégrale (8), la fonction n'est pas intégrable en -3 et pour l'intégrale (10), elle n'est pas intégrable en $+\infty$.

Liste 15 : calcul intégral

I. Intégrabilité

Justifier l'intégrabilité éventuelle des intégrales suivantes

$$(1)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad (2)\ \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (3)\ \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\cos^2(x)+2\sin^2(x)}\,dx$$

$$(4)\ \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{tg}(x)\,dx \qquad (5)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad (6)\ \int_{0}^{+\infty} x\,e^{-x}\sin(x)\,dx$$

(1) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty,0]$, intervalle non borné. On vérifie son intégrabilité en $-\infty$ en utilisant le critère en θ avec $\theta = 2 > 1$. La limite $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^2\,\dfrac{1}{x^2+1} = 1$.

(2) La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ donc sur $[0,1[$, intervalle non fermé. On vérifie son intégrabilité en 1^- en utilisant le critère en θ avec $\theta = 1/2 < 1$. La limite $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{1-x}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)+2\sin^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi]$, intervalle fermé borné. Cette fonction est donc intégrable sur cet intervalle.

(4) La fonction $x \mapsto \mathrm{tg}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ donc sur $[0,\pi/2[$, intervalle non fermé. Si on utilise le critère de non intégrabilité, on calcule la limite $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}(x)$. Comme cette limite vaut 1 (donc différente de 0), la fonction n'est pas intégrable en $\pi/2$; elle n'est donc pas intégrable sur l'intervalle considéré.

(5) La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$, intervalle non borné. On vérifie son intégrabilité en $+\infty$ en utilisant la définition. On peut aussi utiliser le critère en θ avec $\theta = 2 > 1$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} = 0$.

(6) La fonction $x \mapsto x\,e^{-x}\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$, intervalle non borné. En utilisant le critère de comparaison ($|x\,e^{-x}\sin(x)| \leq x\,e^{-x}$) puis le critère en θ avec $\theta = 2 > 1$ on vérifie que la fonction est intégrable en $+\infty$ donc intégrable sur intervalle considéré.

II. Calcul d'intégrales

Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum

$$(1)\ \int_{-\pi/4}^{0} \mathrm{tg}(x)\,dx, \qquad (2)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+x}\,dx.$$

$$(3)\ \int_{0}^{1} \ln(x)\,dx, \qquad (4)\ \int_{1}^{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{x}\,\ln^2(x)\,dx,$$

$$(5)\ \int_{0}^{1} \arcsin(x)\,dx, \qquad (6)\ \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx.$$

(1) La fonction $x \mapsto \mathrm{tg}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ donc sur $[-\frac{\pi}{4},0]$, l'intervalle fermé borné ; elle est donc intégrable sur cet intervalle. On a

$$\int_{-\pi/4}^{0} \mathrm{tg}(x)\ dx = -\frac{1}{2}\ln(2).$$

(2) La fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x^3+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1,+\infty[$, ensemble non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on peut prouver l'intégrabilité en utilisant la définition. On peut également utiliser le critère en θ . On a

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+x}\ dx = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2).$$

(3) La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$; elle est donc continue sur l'intervalle non fermé borné $]0,1]$. Comme $\ln(x)<0\ \forall x\in]0,1]$, on vérifie l'intégrabilité de cette fonction en 0 par application de la définition. (Quand on calcule $\lim_{t\to 0^+}\int_t^1(-\ln(x))dx$, on obtient une limite finie ; la fonction est donc intégrable en 0 donc sur $]0,1]$ et la valeur de l'intégrale est l'opposé de la limite obtenue.) On a

$$\int_0^1 \ln(x)\ dx = -1$$

.

(4) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ \ln^2(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[1,\sqrt[3]{e}]$, intervalle fermé borné ; elle est donc intégrable sur cet intervalle . On a

$$\int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{1}{x}\ \ln^2(x)\ dx = \frac{1}{81}.$$

(5) La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1,1]$ donc sur $[0,1]$, intervalle fermé borné ; elle est donc intégrable sur cet intervalle. On a

$$\int_0^1 \arcsin(x)\ dx = \frac{\pi}{2}-1.$$

(6) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$, intervalle non borné. Comme cette fonction est positive pour tout x, on vérifie son intégrabilité en $+\infty$ en utilisant la définition. On peut également utiliser le critère en θ. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\ dx = \frac{\pi}{4}.$$

II. Divers

En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est $\varphi \in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, est donnée par

$$y(\varphi) = R\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos(u)}du.$$

Montrer que

$$y(\varphi) = R\ \ln\left(\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right).$$

Liste 16 : Équations différentielles ($1^{\text{ère}}$ partie)

I. Quelques manipulations

1. **Si l'équation différentielle $(D_t y)^2 = 2y$ admet 2 solutions distinctes non nulles, peut-on affirmer qu'une combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de cette équation ?**

   Cette équation n'est pas linéaire car une combinaison linéaire de solutions de cette équation n'est pas solution de l'équation. On a par exemple que la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ est solution alors que la fonction $t \mapsto t^2$ ne l'est pas.

2. **Montrer que la fonction $g(t) = 3t^2 - 6t + 2,\ t \in \mathbb{R}$, vérifie le système** $\begin{cases} (D_t y)^2 = 12(y+1) \\ y(0) = 2 \\ y(2) = 2 \end{cases}$

   On a $g(0) = 2$ et $g(2) = 2$ ainsi que $Dg(t) = 6t - 6$. En remplaçant Dy et y respectivement par Dg et g dans le système, les trois équations sont vérifiées.

3. **Montrer que[2] la fonction $g(t) = \operatorname{cotg}(t) - \dfrac{1}{\sin(t)},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation $2\dfrac{dy}{dt} + y^2 = -1$.**

   On a $Dg(t) = \dfrac{-1 + \cos(t)}{\sin^2(t)}$ et en remplaçant $\dfrac{dy}{dt}$ et y respectivement par $Dg(t)$ et g dans l'équation donnée, celle-ci est vérifiée.

4. **Montrer que la fonction $u : x \mapsto C_1\, e^{C_2 x},\ x \in \mathbb{R}$, C_1 et C_2 étant des constantes complexes arbitraires, vérifie l'équation différentielle $v(x) D^2 v(x) - (Dv(x))^2 = 0$.**

   La fonction u est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Du(x) = C_1\, C_2\, e^{C_2 x}$ et $D^2 u(x) = C_1\, (C_2)^2\, e^{C_2 x}$. En remplaçant dans l'équation donnée, on constate que cette dernière est vérifiée.

5. **Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{tg}(x) + \dfrac{1}{\cos(x)},\ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation différentielle**

   $$2Df - f^2 = 1.$$

   La fonction donnée est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

   $$D\left(\operatorname{tg}(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

   Dès lors, il est facile de montrer que, pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a l'égalité.

2. Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2 f}{dx^2}$

II. Equations différentielles, résolutions

Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

1) $4Df(x) + 2if(x) = 0$ 2) $D^2 f(t) = 2f(t)$

3) $D^2 f(u) = 0$ 4) $D^2 f(x) + Df(x) - 2f(x) = 0$

5) $4D^2 f(x) - f(x) = 0$ 6) $D^2 f(x) + f(x) = 0$

Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

1) $f(x) = Ce^{-ix/2},\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe

2) $f(t) = C_1\, e^{-\sqrt{2}\,t} + C_2\, e^{\sqrt{2}\,t},\ t \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

3) $f(u) = C_1 u + C_2,\ u \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

4) $f(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

5) $f(x) = C_1\, e^{-x/2} + C_2\, e^{x/2},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

6) $f(x) = C_1\, e^{-ix} + C_2\, e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

Liste 17 : Équations différentielles (2ème partie)

Equations différentielles, résolutions

1. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille (pour l'équation 3, en donner aussi les solutions réelles)**

1) $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = e^x + 4x^2e^{2x} + 1$ 2) $4D^2f(x) - f(x) = \cos^2(x) - \frac{1}{2}$

3) $D^2f(x) + f(x) = x\, e^{2x}$ 4) $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = (2 + \cos(x))e^{-x}$

5) $Df(x) - f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$ 6) $Df(x) - 2f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$

Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

1) $f(x) = C_1\, e^{-2x} + \left(C_2 + \dfrac{x}{3}\right) e^x + \left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + \dfrac{21}{8}\right) e^{2x} - \dfrac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

2) $f(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} + C_2\, e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{34}\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

3) $f(x) = C_1\, e^{-ix} + C_2\, e^{ix} + \left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{4}{25}\right) e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.
Les solutions réelles sont données par

$$f(x) = C_1'\, \cos(x) + C_2'\, \sin(x) + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right) e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1' et C_2' sont des constantes arbitraires réelles

4) $f(x) = (C_1x + C_2 + x^2 - \cos(x))e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

5) $f(x) = (C - \ln(|e^{-x} - 1|))e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}_0$ où C est une constante arbitraire complexe

6) $f(x) = (C + e^{-x} + \ln(|e^{-x} - 1))e^{2x},\ x \in \mathbb{R}_0$ où C est une constante arbitraire complexe

Note : dans les exercices 5 et 6, la constante peut différer d'un intervalle à l'autre.

2. **Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle**

$$Dy(t) = k(y(t) - y_0)$$

où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée « Newton's law of cooling » et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.
Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(t) = C\, e^{kt} + y_0,\ t \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire réelle.
Comme $k < 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

Liste 18 : Équations différentielles ($3^{\text{ème}}$ partie)

I. Equations différentielles, résolutions

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles

(1) $D^2f(x) - f(x) = 1 + x^2$, (2) $9D^2f(x) - Df(x) = 1$
(3) $D^2f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}$, (4) $D^2f(x) + 4f(x) = \sin(4x)$

Les solutions des équations données sont les fonctions

(1) $c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{x} - x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(2) $c_1 + c_2 e^{x/9} - x,\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(3) $c_1\, e^{-2x} + \left(c_2 + \frac{1}{4}x\right)\, e^{2x} - \frac{1}{4},\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(4) $c_1\, e^{-2ix} + c_2\, e^{2ix} - \frac{1}{12}\sin(4x),\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants, du second ordre, avec conditions initiales

1. **Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$\begin{cases} 4D^2f(x) + f(x) = x^2 + x + 2 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 2 \end{cases}$$

La solution du système est la fonction

$$f(x) = 6\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 + x - 6,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. **Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.**

$$2D^2f(x) + Df(x) = 2x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 **en** 1 **et dont la dérivée première vaut** 0 **en** 1**.**

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2\, e^{\frac{-x}{2}} + x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.
La solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1 est la fonction

$$f(x) = 8 - 4\, e^{\frac{1-x}{2}} + x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}.$$

III. Divers

1. **Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement, cette population sera-t-elle triple sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?**

La population aura triplé depuis le recencement après $\dfrac{50\ln(3)}{\ln(2)} \approx 79,248$ ans donc environ 79 ans.

2. **La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est de 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s^2. Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?**

   Quand la balle sera arrêtée, elle aura parcouru une distance de 25 m.

3. **Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle**

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

   La constante vaut $-\dfrac{1}{12}$.

4. **Soit L la longueur d'un pendule et soit T sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant T et L est l'équation différentielle**

$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$

   Montrer que cela implique que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

   Les solutions de cette équation sont les fonctions $T(L) = C\sqrt{L},\ L \in]0, +\infty[$ où C est une constante arbitraire strictement positive.
   La période T est donc bien proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

Table des matières