

---

Université  
de Liège



# *1, 2, 3...Sciences*

*Année académique 2017-2018*

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
EXERCICES DE RÉVISION EN VUE DE L'INTERROGATION DU 6/11/2017

---

### Problèmes élémentaires

1. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente de  $1/15$ . Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir  $3,36 \text{ m}^3$  de glace ?
2. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient un point. S'il ne répond pas, il a 0 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il ne répond pas à 13 questions et qu'il obtient 45,75 comme cote finale, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?
3. Un tonneau rempli aux trois cinquièmes d'eau pèse 125 kg. Rempli aux trois quarts d'eau, il pèse 137 kg. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau ?

### Manipulations de réels

Résoudre les équations et inéquations suivantes ( $x$  est une inconnue réelle)

1.  $|4x^2 - 1| = 3x$
2.  $|4x^2 - 1| = |3x|$
3.  $x^2 - 9 \geq 3x|x - 3|$
4.  $x \geq 27x^4$
5.  $|x - 3| \geq |x + 3|$
6.  $(3 - x)^2 \leq x - 3$
7.  $x|x^2 - 9| \leq 4|x - 3|$
8.  $\frac{|3 - x|}{x^2 - 9} \geq |x - 3|$
9.  $|x^2 - 9| \geq 5$
10.  $\frac{1}{|2x + 5|} > 3$

### Calcul vectoriel et droites

1. Dans un repère orthonormé, on donne les droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  dont les équations cartésiennes sont

$$d_1 : 2x - y + 3 = 0 \quad d_2 : 5x + 2y - 12 = 0 \quad d_3 : x + 4y - 24 = 0.$$

- (a) Représenter ces 3 droites.
  - (b) Les droites  $d_1$  et  $d_2$  se coupent au point  $A$ . Déterminer l'équation cartésienne de la droite  $d$  passant par  $A$  et orthogonale à  $d_3$ .
  - (c) Donner des équations paramétriques de  $d_3$ .
  - (d) Déterminer les coordonnées du point  $B$  d'intersection de la droite  $d_2$  avec l'axe des abscisses.
  - (e) Le point  $C$  de coordonnées  $(4, 5)$  appartient-il à  $d_1$  ? à  $d_2$  ? à  $d_3$  ?
  - (f) Déterminer le produit scalaire  $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$ .
  - (g) Déterminer les composantes de la projection orthogonale de  $\vec{AB}$  sur  $d_1$ .
2. Dans un repère orthonormé, on donne les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement

$$(-1, 1, 0) \quad (2, -1, 3) \quad (0, -4, 2).$$

Déterminer les composantes du produit vectoriel  $\vec{AB} \wedge 2\vec{BC}$

### Trigonométrie

1. Si  $\alpha$  désigne un réel de l'intervalle  $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$  et si  $\text{tg}(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , que valent les nombres  $\text{cotg}(\alpha)$ ,  $\sin(\alpha)$ ,  $\cos(\alpha)$  ?
2. Simplifier  $\frac{\cos(\frac{4\pi}{3})}{\sin^2(\frac{7\pi}{3})}$ .

3. Résoudre dans  $[\pi, 2\pi]$  ( $x$  est une inconnue réelle)

- (a)  $\sin(2x) \cos(2x) = -1$
- (b)  $4 \sin(2x) \cos(2x) = -1$
- (c)  $\sin(2x) = \sin(6x)$
- (d)  $4 \cos^2(2x) = 3$
- (e)  $2 \cos^2(2x) = \sin^2(4x)$
- (f)  $\sin(x) \sin(2x) = \cos(2x) \cos(x) + \frac{1}{2}$

### Coniques

On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s)? Quelle est leur excentricité? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes?

- 1.  $x^2 + y = 4$
- 2.  $y^2 = x + 1$
- 3.  $x^2 + y^2 + 4x = 0$
- 4.  $x^2 - 1 = 4y^2$
- 5.  $x^2 + 3y^2 = 12$

### Nombres complexes

- 1. On donne le complexe  $z = 1 + i$ .
  - a) En déterminer le module et une forme trigonométrique. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé ( $X =$  "axe réel" et  $Y =$  "axe imaginaire")
  - b) Que vaut la partie réelle du complexe  $z^2$ ?
  - c) La partie imaginaire du carré d'un complexe est-elle toujours égale au carré de la partie imaginaire du complexe? Pourquoi?
- 2. Déterminer
  - a) le module du complexe  $\cos(2) + i \sin(2)$
  - b) les parties réelle et imaginaire des complexes  $z_1 = \frac{1}{1-2i}$ ,  $z_2 = \frac{i^2 7}{1+i}$ ,  $z_3 = \frac{-i}{1+i^3}$ .
- 3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ 
  - a)  $z^2 - z + 1 = 0$
  - b)  $z^2 + 25 = 0$

### Fonctions élémentaires

Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

- 1.  $\arcsin\left(\sin\left(\frac{-4\pi}{7}\right)\right)$
- 2.  $\cos\left(\arcsin\left(\frac{7}{8}\right)\right)$
- 3.  $\ln\left(e^3 \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) + \ln\left(\sqrt{(-2)^2}\right)$
- 4.  $e^{-i\pi/2}$
- 5.  $\arctg\left(\operatorname{tg}\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$
- 6.  $\exp\left(\ln(\pi) + \ln(\sqrt{2})\right)$