LIÈGE université
Sciences

Mathématique (MATH0009)

Année académique 2020-2021

Corrigé de l'examen du 24 août 2021
Chimistes bloc 1 et géologues bloc 2

Version 10 juillet 2021

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \frac{x}{1-2x} \ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction f explicitement par

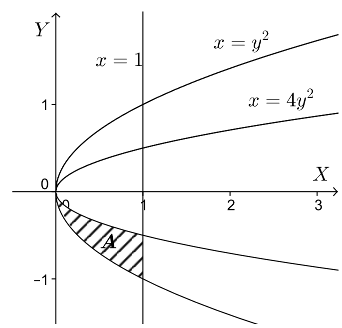
$$f(x,y) = \ln(y^2 - x^2) + \ln(x).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$y D_y f(x,y) + x D_x f(x,y)$$

3. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A \frac{2y}{\sqrt[3]{x}(y^2+2x)} \ dx \ dy.$$



4. On donne l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, x \leq 0\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.

$$I = \iint_E \frac{1}{4 + (x^2+y^2)^2} \ dx \ dy.$$

5. (a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\pi+\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ \cos(\pi-\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(\pi+\alpha) \end{pmatrix} \ , \ \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer **uniquement** l'élément $(M^{-1})_{2,3}$. Simplifier au maximum l'expression.

(b) Les enfants aiment qu'on leur raconte des histoires et souvent les mêmes pendant un certain temps. Ils ont le choix entre trois histoires : les Aristochats, Blanche-Neige et Cendrillon.

Si un enfant choisit d'abord les Aristochats, pour la suivante, il choisira à nouveau cette histoire avec une probabilité de 60% ; sinon il choisira Cendrillon 1 fois sur 10.
S'il choisit d'abord Blanche-Neige, pour la suivante, il choisit les Aristochats 1 fois sur 5 et Cendrillon 1 fois sur 10.
S'il choisit d'abord Cendrillon, pour la suivante, il choisit 3 fois sur 10 les Aristochats, 1 fois sur 5 Blanche-Neige.

(1) Déterminer la matrice de transition.
(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant choisisse Banche-Neige ?

6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.

$$(a)\sum_{j=2}^{+\infty}\frac{2j^2}{1+j^2} \qquad\qquad (b)\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{m+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{m-1}\right)\right)$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x)=\frac{x}{1-2x}\ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1/2\}$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{1-2x+2x}{(1-2x)^2}=\frac{1}{(1-2x)^2}\ ,\\ D^2f(x) &= \frac{(-2)(-2)}{(1-2x)^3}=\frac{4}{(1-2x)^3}\ ,\\ D^3f(x) &= \frac{4(-3)(-2)}{(1-2x)^4}=\frac{24}{(1-2x)^4}\ . \end{aligned}$$

Comme $f(0)=0$, $Df(0)=1$ et $D^2f(0)=4$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0)+Df(0)x \ = \ x,\\ P_2(x) &= f(0)+Df(0)x+D^2f(0)\frac{x^2}{2} \ = \ x+2x^2,\ x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{4}{(1-2u_1)^3}.\ \frac{x^2}{2}=\frac{2x^2}{(1-2u_1)^3}\ ,\\ R_2(x) &= \frac{24}{(1-2u_2)^4}.\ \frac{x^3}{3!}=\frac{4x^3}{(1-2u_2)^4},\ x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notons qu'il est possible d'exprimer ces restes à l'aide de la définition :

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x)-P_1(x)=\frac{x}{1-2x}-x=\frac{2x^2}{1-2x}\ ,\\ R_2(x) &= f(x)-P_2(x)=\frac{x}{1-2x}-(x+2x^2)=\frac{4x^3}{1-2x}\ ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1/2\}. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.

Solution. Considérons les premières expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est du signe de $1 - 2u_1$. Cela étant, on a $1 - 2t > 0$ si et seulement si $t < 1/2$. Dès lors si x est voisin de 0, alors $x < 1/2$ et $u_1 < 1/2$ aussi puisque u_1 est compris entre 0 et x ; il s'ensuit que $1 - 2u_1 > 0$ donc $R_1(x) > 0$, $\forall x$ voisin de 0. Le graphique de f est donc situé au-dessus de celui de P_1 au voisinage de 0.

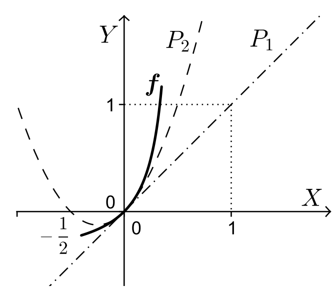
D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0 et $R_2(x) < 0$, $\forall x < 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Si on utilise la définition des restes pour les exprimer, on aura le raisonnement suivant.

D'une part, $R_1(x)$ est du signe de $1 - 2x$. Comme $1 - 2x > 0$ au voisinage de 0, on a $R_1(x) > 0$, $\forall x$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé au-dessus de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, comme $1 - 2x > 0$ au voisinage de 0, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0 et $R_2(x) < 0$, $\forall x < 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x, y) = \ln(y^2 - x^2) + \ln(x).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

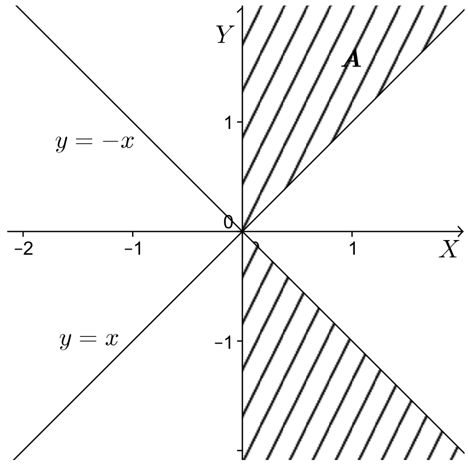
$$yD_y f(x, y) + xD_x f(x, y)$$

Solution.

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 > 0,\ x > 0\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan, bords exclus.

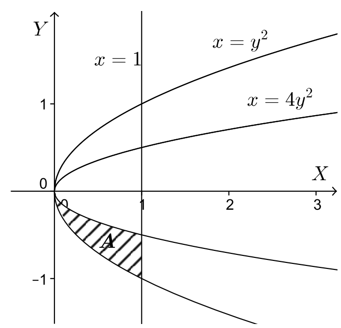


(c) En tout point de A, on a

$$\begin{aligned} yD_yf(x,y)+xD_xf(x,y) &= y\frac{2y}{y^2-x^2}+x\left(\frac{-2x}{y^2-x^2}+\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{2y^2-2x^2}{y^2-x^2}+1\\ &= \frac{2(x^2-y^2)}{x^2-y^2}+1\\ &= 3. \end{aligned}$$

3. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$I=\iint_A \frac{2y}{\sqrt[3]{x}(y^2+2x)}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{2y}{\sqrt[3]{x}(y^2+2x)}$ est continue sur

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \ \text{ et } y^2+2x\neq 0\ \right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \ \text{ et } y^2\neq -2x\right\}$$

donc sur

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in]0,1] \text{ et } y\in\left[-\sqrt{x},-\sqrt{x}/2\ \right]\right\},$$

borné non fermé . Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)|=-f(x,y),\ \forall(x,y)\in A$. Pour x fixé dans $]0,1]$, la fonction $h:y\mapsto\left|\dfrac{2y}{\sqrt[3]{x}(y^2+2x)}\right|=\dfrac{-2y}{\sqrt[3]{x}(y^2+2x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[-\sqrt{x}, -\sqrt{x}/2\ ]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{x}/2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{-2y}{y^2+2x}\, dy &= -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left[\ln\left(|y^2+2x|\right)\right]_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{x}/2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\ln\left(\frac{x}{4}+2x\right) - \ln(3x)\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\ln\left(\frac{9x}{4}\right) - \ln(3x)\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \ln\left(\frac{9x}{12x}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \ln\left(\frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

puisque $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b), \forall a, b > 0$.
La fonction $g : x \mapsto -\ln\left(\frac{3}{4}\right) \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $]0, 1]$. Elle est intégrable en 0 puisque la fonction $x \mapsto 1/x^s$ est intégrable en 0 si et seulement si $s < 1$ et ici $s = 1/3$.
Dès lors, f est intégrable sur A. En reprenant les calculs précédents avec f et non $|f|$, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{x}/2} \frac{2y}{\sqrt[3]{x}(y^2+2x)}\, dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \ln\left(\frac{3}{4}\right) dx \\
&= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \\
&= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{x^2}\ \right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

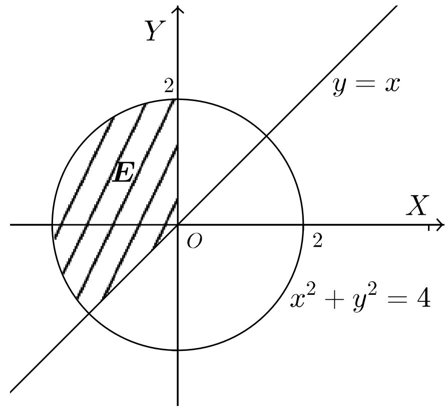
4. **On donne l'ensemble**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, x \leq 0\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.

$$I = \iint_E \frac{1}{4 + (x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy.$$

Solution. (a) Voici la représentation graphique (partie hachurée du plan, bords compris) de l'ensemble E.



(b) La fonction $f : (x,y) \mapsto 1/\left(4+(x^2+y^2)^2\ \right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble E fermé borné ; elle est donc intégrable sur E.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration E', en bijection avec l'ensemble $E \setminus \{(0,0)\}$, s'écrit $E' = \{(r,\theta) : r \in]0,2], \theta \in [\pi/2, 5\pi/4]\}$ et la fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{4+(r^2)^2}$$

multipliée par le jacobien r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \left(\int_{\pi/2}^{5\pi/4} \frac{r}{4+(r^2)^2}\, d\theta \right) dr \\
&= \frac{1}{4} \left(\int_0^2 \frac{r}{1+(r^2/2)^2}\ dr \right) \cdot \left(\int_{\pi/2}^{5\pi/4} d\theta \right) \\
&= \frac{1}{4}\ \left[\arctan(r^2/2)\right]_0^2 \cdot [\theta]_{\pi/2}^{5\pi/4} \\
&= \frac{1}{4} (\arctan(2) - \arctan(0)) \cdot \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} (\arctan(2) - 0) \cdot \frac{3\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi}{16} \arctan(2).
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(\pi+\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ \cos(\pi-\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(\pi+\alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer uniquement l'élément $(M^{-1})_{2,3}$. Simplifier au maximum l'expression.

Solution. La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie et en appliquant la première loi des mineurs à la première ligne, on a

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin(\pi+\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ \cos(\pi-\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(\pi+\alpha) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\sin(\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= -\sin(\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \tan(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= -\sin(\alpha)\left(2\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right) \\
&= -\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)+1\right).
\end{aligned}$$

Donc $\det M \neq 0$ si et seulement si

$$\sin(\alpha) \neq 0 \ \text{ et } \ \cos(\alpha) \neq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha \neq k\pi) \quad \text{et} \quad \left(\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ et } \ \alpha \neq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right), \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, la matrice M est donc inversible si et seulement si

$$\alpha \neq 0.$$

Dans ce cas, l'élément $(M^{-1})_{2,3}$ peut être calculé et, si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs, cet élément vaut

$$\begin{aligned}
(M^{-1})_{2,3} &= \frac{1}{\det M}\,(\widetilde{\mathcal{M}})_{2,3} \\
&= \frac{1}{-\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)+1\right)}\,(\mathcal{M})_{3,2} \\
&= \frac{1}{\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)+1\right)} \begin{vmatrix} 0 & -\sin(\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)+1\right)} \\
&= \frac{1}{\sin(\alpha)\left(2\cos(\alpha)+1\right)}.
\end{aligned}$$

(b) Les enfants aiment qu'on leur raconte des histoires et souvent les mêmes pendant un certain temps. Ils ont le choix entre trois histoires : les Aristochats, Blanche-Neige et Cendrillon.
Si un enfant choisit d'abord les Aristochats, pour la suivante, il choisira à nouveau cette histoire avec une probabilité de 60% ; sinon il choisira Cendrillon 1 fois sur 10.
S'il choisit d'abord Blanche-Neige, pour la suivante, il choisit les Aristochats 1 fois sur 5 et Cendrillon 1 fois sur 10.
S'il choisit d'abord Cendrillon, pour la suivante, il choisit 3 fois sur 10 les Aristochats, 1 fois sur 5 Blanche-Neige.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant choisisse Banche-Neige ?

Solution.
(1) Soient A_0, B_0 et C_0 les situations initiales respectives : on raconte « les Aristochats », « Blanche-Neige » et « Cendrillon » ; soient A_1, B_1 et C_1 , ces mêmes situations à la fin du récit de la première histoire. On a donc

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Si $\mathbb{1}$ est la matrice identité, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & -0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - 15z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x = 13z \\ 6y = 17z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{13}{6} z \\ y = \frac{17}{6} z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} z \\ \frac{17}{6} z \\ z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(13 + 17 + 6) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{36}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{36} \\ \frac{17}{36} \\ \frac{6}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} \\ \frac{17}{36} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que l'enfant choisisse Blanche-Neige est de 17/36.

6. **Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.**

$$(a) \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2j^2}{1+j^2} \qquad\qquad (b) \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{m-1}\right) \right)$$

Solution.

(a) Puisque

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{2j^2}{1+j^2} = 2,$$

le terme général de la série

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2j^2}{1+j^2}$$

ne tend pas vers 0 ; cette série n'est donc pas convergente.

(b) Pour tout $M \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{M} \left(\sin\left(\frac{1}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{m-1}\right) \right) &= \sum_{m=2}^{M} \sin\left(\frac{1}{m+1}\right) - \sum_{m=2}^{M} \sin\left(\frac{1}{m-1}\right) \\
&= \sum_{m=3}^{M+1} \sin\left(\frac{1}{m}\right) - \sum_{m=1}^{M-1} \sin\left(\frac{1}{m}\right) \\
&= -\sin(1) - \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{M}\right) + \sin\left(\frac{1}{M+1}\right).
\end{aligned}$$

Dès lors, par définition de la somme d'une série, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{m-1}\right) \right) \\
&= \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=2}^{M} \left(\sin\left(\frac{1}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{m-1}\right) \right) \\
&= \lim_{M\to+\infty} \left(-\sin(1) - \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{M}\right) + \sin\left(\frac{1}{M+1}\right) \right) \\
&= -\sin(1) - \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \lim_{M\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{M}\right) + \lim_{M\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{M+1}\right) \\
&= -\sin(1) - \sin\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

En effet, vu le théorème des limites de fonction de fonction,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M+r} = 0 \ (r \in \mathbb{R}) \text{ et } \lim_{t\to 0} \sin(t) = 0$$

donc

$$\lim_{M\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{M+r}\right) = 0.$$

La série est donc convergente et sa somme vaut

$$-\sin(1) - \sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

Mathématique (MATH0009)

Année académique 2020-2021

Corrigé de l'examen du 24 août 2021

Biologistes et géographes bloc 2

Version 10 juillet 2021

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \frac{x}{1-2x} \ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction f explicitement par

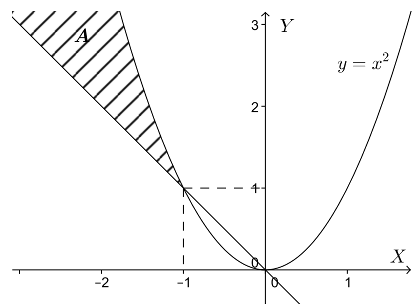
$$f(x,y) = \ln(y^2 - x^2) + \ln(x).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$yD_y f(x,y) + xD_x f(x,y)$$

3. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A \frac{2x}{y^5} \ dx \ dy.$$



4. On donne l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, x \leq 0\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.

$$I = \iint_E \frac{1}{4 + x^2 + y^2} \ dx \ dy.$$

5. (a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(-\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ \cos(-\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(\pi+\alpha) \end{pmatrix} \ , \ \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer **uniquement** l'élément $(M^{-1})_{2,3}$. Simplifier au maximum l'expression.

(b) Les enfants aiment qu'on leur raconte des histoires et souvent les mêmes pendant un certain temps. Ils ont le choix entre trois histoires : les Aristochats, Blanche-Neige et Cendrillon.

Si un enfant choisit d'abord les Aristochats, pour la suivante, il choisira à nouveau cette histoire avec une probabilité de 60% ; sinon il choisira Cendrillon 1 fois sur 10.
S'il choisit d'abord Blanche-Neige, pour la suivante, il choisit les Aristochats 1 fois sur 5 et Cendrillon 1 fois sur 10.
S'il choisit d'abord Cendrillon, pour la suivante, il choisit 3 fois sur 10 les Aristochats, 1 fois sur 5 Blanche-Neige.

(1) Déterminer la matrice de transition.
(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant choisisse Banche-Neige ?

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x) = \frac{x}{1-2x} \ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{array}{rcl} Df(x) & = & \dfrac{1-2x+2x}{(1-2x)^2} = \dfrac{1}{(1-2x)^2} \ , \\ D^2f(x) & = & \dfrac{(-2)(-2)}{(1-2x)^3} = \dfrac{4}{(1-2x)^3} \ , \\ D^3f(x) & = & \dfrac{4(-3)(-2)}{(1-2x)^4} = \dfrac{24}{(1-2x)^4} \ . \end{array}$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = 1$ et $D^2f(0) = 4$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & f(0) + Df(0)x \ = \ x, \\ P_2(x) & = & f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\dfrac{x^2}{2} \ = \ x + 2x^2, \ x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$\begin{array}{rcl} R_1(x) & = & \dfrac{4}{(1-2u_1)^3}.\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{2x^2}{(1-2u_1)^3} \ , \\ R_2(x) & = & \dfrac{24}{(1-2u_2)^4}.\dfrac{x^3}{3!} = \dfrac{4x^3}{(1-2u_2)^4}, \ x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Notons qu'il est possible d'exprimer ces restes à l'aide de la définition :

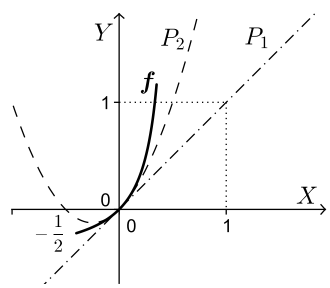
$$\begin{array}{rcl} R_1(x) & = & f(x) - P_1(x) = \dfrac{x}{1-2x} - x = \dfrac{2x^2}{1-2x} \ , \\ R_2(x) & = & f(x) - P_2(x) = \dfrac{x}{1-2x} - (x+2x^2) = \dfrac{4x^3}{1-2x} \ , \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}. \end{array}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.
Solution. Considérons les premières expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est du signe de $1 - 2u_1$. Cela étant, on a $1 - 2t > 0$ si et seulement si $t < 1/2$. Dès lors si x est voisin de 0, alors $x < 1/2$ et $u_1 < 1/2$ aussi puisque u_1 est compris entre 0 et x ; il s'ensuit que $1 - 2u_1 > 0$ donc $R_1(x) > 0$, $\forall x$ voisin de 0. Le graphique de f est donc situé au-dessus de celui de P_1 au voisinage de 0.
D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0 et $R_2(x) < 0$, $\forall x < 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Si on utilise la définition des restes pour les exprimer, on aura le raisonnement suivant.
D'une part, $R_1(x)$ est du signe de $1 - 2x$. Comme $1 - 2x > 0$ au voisinage de 0, on a $R_1(x) > 0$, $\forall x$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé au-dessus de celui de P_1 au voisinage de 0.
D'autre part, comme $1 - 2x > 0$ au voisinage de 0, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0 et $R_2(x) < 0$, $\forall x < 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x, y) = \ln(y^2 - x^2) + \ln(x).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

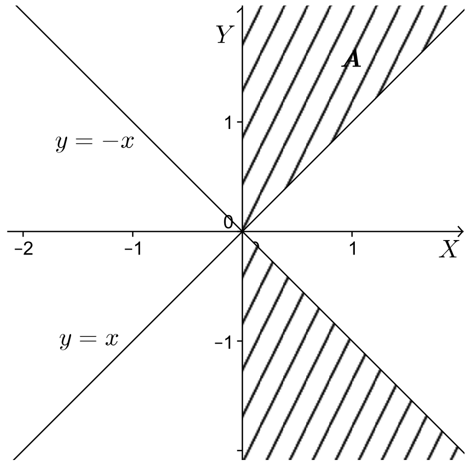
$$yD_y f(x, y) + xD_x f(x, y)$$

Solution.

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 > 0,\ x > 0\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan, bords exclus.

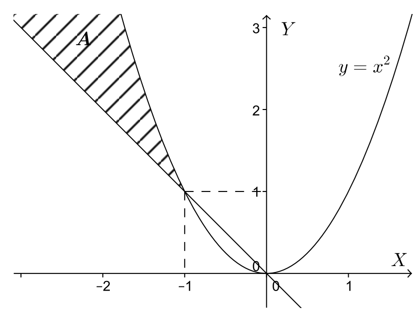


(c) En tout point de A, on a

$$\begin{aligned} yD_y f(x,y) + xD_x f(x,y) &= y\frac{2y}{y^2 - x^2} + x\left(\frac{-2x}{y^2 - x^2} + \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{2y^2 - 2x^2}{y^2 - x^2} + 1 \\ &= \frac{2(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

3. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$I = \iint_A \frac{2x}{y^5}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{2x}{y^5}$ est continue sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\ \right\}$ donc sur

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, -1] \text{ et } y \in \left[-x, x^2\ \right]\right\},$$

fermé non borné. Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)| = -f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$. Pour x fixé dans $]-\infty, -1]$, la fonction $h : y \mapsto \left|\dfrac{2x}{y^5}\right| = \dfrac{-2x}{y^5}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur le fermé borné $[-x, x^2\ ]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble. On a

$$\begin{aligned} \int_{-x}^{x^2} \frac{-2x}{y^5}\ dy &= -2x\ .\ \left[\frac{-1}{4y^4}\right]_{-x}^{x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^7} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $]-\infty, -1]$. Son intégrabilité en $-\infty$ est évidente puisque la fonction $x \mapsto 1/|x|^s$ est intégrable en $-\infty$ si et seulement si $s > 1$ (ici $s = 7$ et $s = 3$) ; ainsi, g est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

Dès lors, f est intégrable sur A. En reprenant les calculs précédents avec f et non $|f|$, on obtient

$$I = \int_{-\infty}^{-1} \left(\int_{-x}^{x^2} \frac{2x}{y^5}\, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^7} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^6} \right]_{-\infty}^{-1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{6}$$

puisque $\lim_{x \to -\infty} 1/x = 0$.

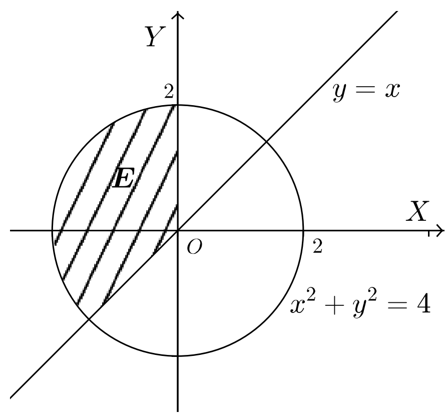
4. **On donne l'ensemble**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, x \leq 0\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.

$$I = \iint_E \frac{1}{4 + x^2 + y^2}\ dx\ dy.$$

Solution. (a) Voici la représentation graphique (partie hachurée du plan, bords compris) de l'ensemble E.



(b) La fonction $f : (x, y) \mapsto 1/\left(4 + x^2 + y^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble E fermé borné ; elle est donc intégrable sur E.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration E', en bijection avec l'ensemble $E \setminus \{(0, 0)\}$, s'écrit $E' = \{(r, \theta) : r \in]0, 2], \theta \in [\pi/2, 5\pi/4]\}$ et la fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{1}{4 + r^2}$$

multipliée par le jacobien r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \left(\int_{\pi/2}^{5\pi/4} \frac{r}{4 + r^2}\, d\theta \right) dr \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{2r}{4 + r^2}\ dr \right) \cdot \left(\int_{\pi/2}^{5\pi/4} d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2}\ \left[\ln(|4 + r^2|) \right]_0^2 \cdot [\theta]_{\pi/2}^{5\pi/4} \\
&= \frac{1}{2} (\ln(8) - \ln(4)) \cdot \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{3\pi}{8}\ \ln(2),
\end{aligned}$$

puisque $\ln(x) - \ln(y) = \ln(x/y),\ \forall x, y > 0$.

5. **(a) Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(-\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ \cos(-\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(\pi+\alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer uniquement l'élément $(M^{-1})_{2,3}$. Simplifier au maximum l'expression.

Solution. La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie et en appliquant la première loi des mineurs à la première ligne, on a

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin(-\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ \cos(-\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos(\pi+\alpha) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\sin(\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) & \tan(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= -\sin(\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \tan(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= -\sin(\alpha)\left(2\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right) \\ &= -\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha) - 1\right). \end{aligned}$$

Donc $\det M \neq 0$ si et seulement si

$$\sin(\alpha) \neq 0 \ \text{ et } \ \cos(\alpha) \neq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha \neq k\pi) \ \text{ et } \ \left(\alpha \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ et } \ \alpha \neq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, la matrice M est donc inversible si et seulement si

$$\alpha \neq -\pi/3, \ \alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha \neq \pi/3.$$

Dans ce cas, l'élément $(M^{-1})_{2,3}$ peut être calculé et, si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs, cet élément vaut

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{2,3} &= \frac{1}{\det M}\,(\widetilde{\mathcal{M}})_{2,3} \\ &= \frac{1}{-\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)-1\right)}\,(\mathcal{M})_{3,2} \\ &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)-1\right)} \begin{vmatrix} 0 & -\sin(\alpha) \\ 1 & \tan(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)-1\right)} \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha)\left(2\cos(\alpha)-1\right)}. \end{aligned}$$

(b) Les enfants aiment qu'on leur raconte des histoires et souvent les mêmes pendant un certain temps. Ils ont le choix entre trois histoires : les Aristochats, Blanche-Neige et Cendrillon.

Si un enfant choisit d'abord les Aristochats, pour la suivante, il choisira à nouveau cette histoire avec une probabilité de 60% ; sinon il choisira Cendrillon 1 fois sur 10.

S'il choisit d'abord Blanche-Neige, pour la suivante, il choisit les Aristochats 1 fois sur 5 et Cendrillon 1 fois sur 10.

S'il choisit d'abord Cendrillon, pour la suivante, il choisit 3 fois sur 10 les Aristochats, 1 fois sur 5 Blanche-Neige.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant choisisse Banche-Neige ?

Solution.

(1) Soient A_0, B_0 et C_0 les situations initiales respectives : on raconte « les Aristochats », « Blanche-Neige » et « Cendrillon » ; soient A_1, B_1 et C_1 , ces mêmes situations à la fin du récit de la première histoire. On a donc

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Si $\mathbb{1}$ est la matrice identité, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$\begin{aligned}
(T - \mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & -0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - 15z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x = 13z \\ 6y = 17z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{13}{6}z \\ y = \frac{17}{6}z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6}z \\ \frac{17}{6}z \\ z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(13 + 17 + 6) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{36}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{36} \\ \frac{17}{36} \\ \frac{6}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} \\ \frac{17}{36} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que l'enfant choisisse Blanche-Neige est de 17/36.