Mathématiques générales II **(MATH1009)**

Année académique 2021-2022

Corrigé de l'interrogation du 19 avril 2022

Version 24 mars 2022

QUESTIONNAIRE

Questions de théorie *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

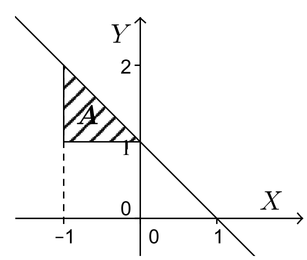
1. (a) Donner la définition de la notion de matrice inverse d'une matrice carrée.
   (b) Si une matrice carrée possède une matrice inverse, démontrer que cette matrice inverse est unique.

2. (a) Enoncer la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.
   (b) Si f est une fonction continue sur A, déterminer, en utilisant le point (a), la nouvelle expression de l'intégrale
   $$\iint_A f(x,y)\ dx\ dy \qquad \text{avec} \qquad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\leq x^2+y^2\leq 2,\ y\leq 0,\ y\leq x\leq -y\right\}$$
   si on travaille en coordonnées polaires.
   Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le coloriant).

Exercices *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y)=\operatorname{arcos}(y^2-x)$.
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est dérivable et le représenter, en le hachurant (ou en le coloriant), dans un repère orthonormé.
   (b) Dans celui-ci, simplifier au maximum le produit de $D_xf(x,y)$ par $D_yf(x,y)$.
   (c) Si $(4,-\sqrt{5})$ est un point du domaine de dérivabilité, calculer cette expression en ce point ; sinon, justifier pourquoi.

2. Si possible, calculer l'intégrale suivante
   $$\iint_A x\sin\left(x^3\right)dx\,dy$$
   où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



3. On donne
   $$I=\int_0^{+\infty}\left(\int_y^{2y}\frac{ye^{-x}}{x}\ dx\right)\ dy.$$
   (a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le coloriant).
   (b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant démarches et réponses.

4. Soit la matrice
   $$A=\begin{pmatrix} i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}.$$
   (a) Si elle existe, calculer la matrice inverse de A.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
   (c) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, justifier pourquoi et en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice qui y conduit. Si non, justifier pourquoi.

CORRIGE

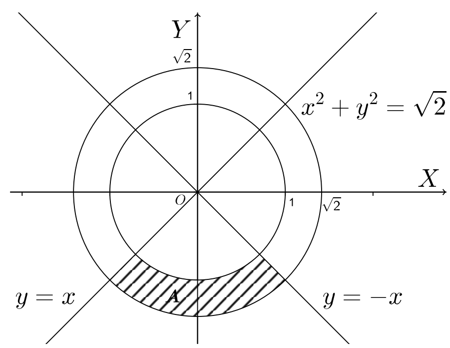
Questions de théorie

1. **(a) Donner la définition de la notion de matrice inverse d'une matrice carrée.**
   (b) Si une matrice carrée possède une matrice inverse, démontrer que cette matrice inverse est unique.
   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

2. **(a) Enoncer la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.**
   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).
   (b) Si f est une fonction continue sur A, déterminer, en utilisant le point (a), la nouvelle expression de l'intégrale

$$\iint_A f(x,y)\ dx\ dy \qquad \textbf{avec} \qquad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\leq x^2+y^2\leq 2,\ y\leq 0,\ y\leq x\leq -y\right\}$$

   si on travaille en coordonnées polaires.
   Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le coloriant).
   Solution. L'ensemble A est la partie du plan hachurée ci-dessous, les points des bords étant inclus dans l'ensemble.



L'ensemble $A'=\left\{(r,\theta)\ :\ r\in[1,\sqrt{2}],\ \theta\in[5\pi/4,7\pi/4]\right\}$ est en bijection avec l'ensemble A par changement de variables en coordonnées polaires. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\ dx\ dy &= \iint_{A'} f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,r\ d\theta\ dr\\
&= \int_1^{\sqrt{2}} r\left(\int_{5\pi/4}^{7\pi/4} f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\ d\theta\right) dr\\
&= \int_{5\pi/4}^{7\pi/4}\left(\int_1^{\sqrt{2}} f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,r\ dr\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Exercices

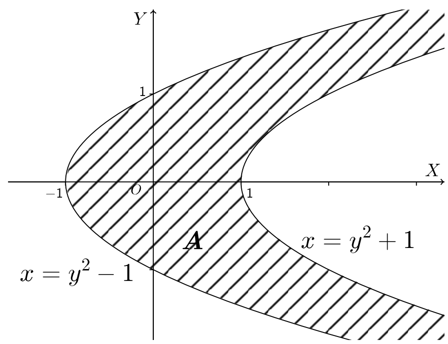
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y)=\operatorname{arcos}(y^2-x)$.**
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est dérivable et le représenter, en le hachurant (ou en le coloriant), dans un repère orthonormé.

(b) Dans celui-ci, simplifier au maximum le produit de $D_x f(x,y)$ par $D_y f(x,y)$.
(c) Si $(4, -\sqrt{5})$ est un point du domaine de dérivabilité, calculer cette expression en ce point ; sinon, justifier pourquoi.

Solution. (a) Le domaine de dérivabilité de la fonction arcosinus est l'intervalle $]-1,1[$ et celui de la fonction $g : (x,y) \mapsto y^2 - x^2$ est $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y^2 - x < 1\right\}.$$

La représentation graphique de cet ensemble est la partie hachurée du plan, bords exclus.



(b) Comme

$$D_x f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(y^2-x)^2}} \qquad \text{et} \qquad D_y f(x,y) = \frac{-2y}{\sqrt{1-(y^2-x)^2}},$$

le produit de $D_x f(x,y)$ par $D_y f(x,y)$ vaut

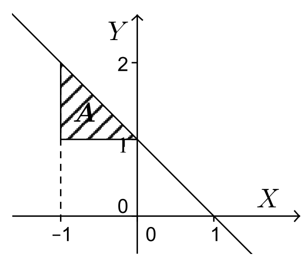
$$D_x f(x,y) \times D_y f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(y^2-x)^2}} \times \frac{-2y}{\sqrt{1-(y^2-x)^2}} = \frac{-2y}{1-(y^2-x)^2} = \frac{2y}{(y^2-x)^2-1}$$

quel que soit le point (x,y) dans A.
(c) La fonction f n'est pas dérivable au point de coordonnées $(4, -\sqrt{5})$ puisque ce point n'est pas élément de A. En effet, en $(4, -\sqrt{5})$, on a $y^2 - x = 5 - 4 = 1$.

2. **Si possible, calculer l'intégrale suivante**

$$\iint_A x \sin(x^3)\, dx\, dy$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto x\sin(x^3)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur le fermé borné $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [1, -x+1]\}$ et est par conséquent intégrable sur A. On a

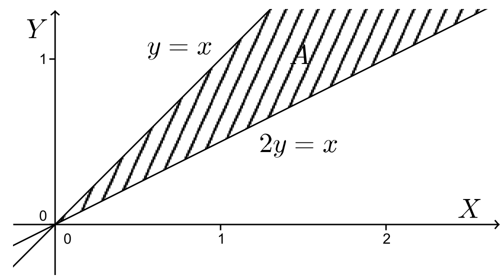
$$\begin{aligned}
\iint_A x\sin(x^3)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{1}^{1-x} x \sin(x^3)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} x\sin(x^3)\,[y]_1^{1-x}\ dx \\
&= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} 3x^2 \sin(x^3)\ dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\cos(x^3)\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1-\cos(-1)}{3} = \frac{1-\cos(1)}{3}.
\end{aligned}$$

3. **On donne**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_y^{2y} \frac{ye^{-x}}{x}\ dx \right)\ dy.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le coloriant).
(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant démarches et réponses.
Solution.

(a) L'ensemble d'intégration est
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[,\ x \in [y, 2y]\}$,
ensemble non fermé borné.



(b) A partir de la description donnée de A, cherchons celle qui va permettre de faire la permutation. Si on regarde tous les $(x, y) \in A$ alors les abscisses x varient dans $]0, +\infty[$. Cela étant, lorsque x est fixé, les points de l'ensemble A dont l'abscisse est x ont une ordonnée comprise entre $x/2$ et x. Dès lors

$$A \ = \ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \ ]0,+\infty[\text{ et } y \in [x/2, x]\right\}.$$

La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{-x}/x$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ donc sur l'ensemble non borné A. Comme cette fonction est positive sur A, on a $|f(x,y)| = f(x,y)$. Examinons alors l'intégrabilité de f sur A.
Soit x fixé dans $]0, +\infty[$; la fonction $h : y \mapsto ye^{-x}/x$ est continue sur $[x/2, x]$, fermé borné. Elle y est donc intégrable et on a

$$\begin{aligned}
\int_{x/2}^{x} \frac{ye^{-x}}{x}\ dy &= \frac{e^{-x}}{x} \int_{x/2}^{x} y\ dy \\
&= \frac{e^{-x}}{x} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x/2}^{x} \\
&= \frac{e^{-x}}{2x} \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) \\
&= \frac{e^{-x}}{8x} \left(4x^2 - x^2 \right) \\
&= \frac{3}{8}\ x\ e^{-x}.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction $g : x \mapsto 3xe^{-x}/8$; elle est continue sur $[0, +\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$ en utilisant la définition de l'intégrabilité. Quel que soit $t > 0$, la fonction g est continue sur le fermé borné $[0, t]$, elle y est donc intégrable et on a successivement

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{3}{8}\ |x\ e^{-x}|\ dx &= \int_0^t \frac{3}{8}\ x\ e^{-x}\ dx \\
&= \frac{3}{8} \left(\left[-xe^{-x} \right]_0^t + \int_0^t e^{-x}\ dx \right) \\
&= \frac{3}{8} \left(\left[-xe^{-x} \right]_0^t + \left[-e^{-x} \right]_0^t \right) \\
&= \frac{3}{8} \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Cela étant, on a $\lim_{t\to+\infty}(te^{-t}) = 0$, puisque l'exponentielle l'emporte sur les puissances antagonistes en $+\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}(e^{-t}) = 0$. Dès lors

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{3}{8}\ |x\ e^{-x}|\ dx \;=\; \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{3}{8}\ x\ e^{-x}\ dx \;=\; \frac{3}{8}.$$

Comme cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale de $g = |g|$ sur cet ensemble vaut $3/8$.
Il s'ensuit que la fonction f est intégrable sur A et comme cette fonction est à valeurs positives sur A, on a

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\int_y^{2y}\frac{ye^{-x}}{x}\ dx\right)\ dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_{x/2}^{x}\frac{ye^{-x}}{x}\ dy\right)\ dx = \frac{3}{8}.$$

4. **Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

(a) Si elle existe, calculer la matrice inverse de A.
Solution. La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
En appliquant la définition, on a $\det A \;=\; i^2 - 1 = -2$. La matrice A est donc inversible et son inverse est la matrice

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.
Solution. Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} i-\lambda & 1 \\ 1 & i-\lambda \end{vmatrix} = (i-\lambda)^2 - 1 = (i-\lambda-1)(i-\lambda+1).$$

Donc $i+1$ et $i-1$ sont les deux valeurs propres (simples) de A.
Les vecteurs propres associés à la valeur propre $i+1$ sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

solutions de l'équation

$$(A - (i+1)\mathbb{1})X = 0.$$

Il vient alors successivement

$$\begin{aligned}(A - (i+1)\mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad -x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = x;\end{aligned}$$

les vecteurs propres recherchés sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $i-1$ sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

solutions de l'équation

$$(A - (i-1)\mathbb{1})X = 0.$$

Il vient alors successivement

$$\begin{aligned}(A-(i-1)\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x+y=0 \\ &\Leftrightarrow \quad y=-x;\end{aligned}$$

les vecteurs propres recherchés sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

(c) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, justifier pourquoi et en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice qui y conduit. Si non, justifier pourquoi.

Solution. Puisque les valeurs propres de la matrice A sont simples, la matrice est diagonalisable. La matrice inversible

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} i+1 & 0 \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}.$$