



LIÈGE université
Sciences

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2019-2020

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES (PARTIM B)

RÉVISIONS EN VUE DE L'INTERROGATION DU 20 AVRIL 2020 :
CORRECTION

RÉPÉTITION 8 : CORRECTION DES EXERCICES DE RÉVISION

1. Soient les matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

1) $A + \tilde{B}$ 2) $C = AB$ 3) C^{-1}

Les matrices étant carrées et de même dimension, on peut calculer $A + \tilde{B}$ et $C = AB$. On a

$$A + \tilde{B} = \begin{pmatrix} -2i & -i & i \\ 0 & 2i & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(C) = -2i \neq 0$, la matrice C^{-1} existe et on a

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Pourquoi?

Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

La matrice M possède 3 valeurs propres simples ($-i$, i et 1); M est donc diagonalisable.

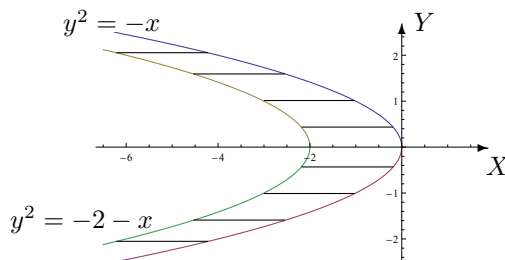
On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On donne la fonction f par

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcsin(y^2 + x + 1)$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.

La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y^2 + x + 1 < 1\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points des paraboles étant exclus.



- (b) Calculer la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable.

La dérivée de f par rapport à sa deuxième variable est donnée par

$$(D_y f)(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (y^2 + x + 1)^2}}.$$

- (c) Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que la forme explicite de $F(t) = f(5t^2 - 1, 2t)$ et de sa dérivée en tout point de ce domaine.

Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[$, la forme explicite de cette fonction est $t \mapsto F(t) = \arcsin(9t^2)$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \frac{18t}{\sqrt{1 - 81t^4}}$.

- (d) Si F est dérivable en $1/6$, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.

La dérivée de F en $1/6$ vaut $\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

4. On donne la fonction f continûment dérivable sur $]1, 2[\times]0, 1[$ et à valeurs strictement positives.

- (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3 - x)))$.

La fonction g est dérivable sur $]1, 2[$.

- (b) Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.

La dérivée de g est donnée par

$$Dg(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x}, \ln(3 - x))} \left[(D_u f)(\sqrt{x}, \ln(3 - x)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + (D_v f)(\sqrt{x}, \ln(3 - x)) \cdot \left(\frac{-1}{3 - x} \right) \right]$$

si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f .

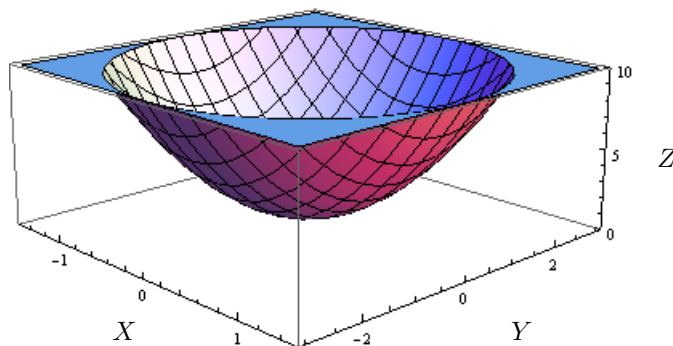
- (c) Si g est dérivable en $5/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?

La fonction g n'est pas dérivable en $5/2$ car $5/2 \notin]1, 2[$.

5. (a) Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation

$$4x^2 + y^2 - z + 1 = 0.$$

Voici la représentation de cette surface.



(b) Quel est le nom de cette quadrique ?

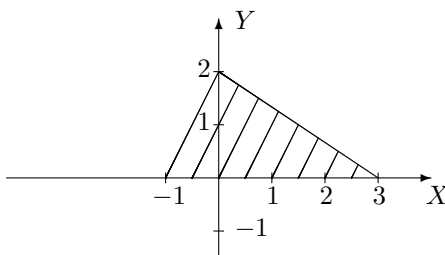
Cette quadrique est un parabolôide elliptique.

(c) Calculer le volume du corps borné par les plans de coordonnées, le plan d'équation $2x + y = 1$ et la surface donnée ci-dessus.

La fonction $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + y^2 + 1$ est intégrable sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{2}], y \in [0, 1 - 2x]\}$ car elle est continue sur cet ensemble fermé borné et le volume demandé vaut $1/3$ (de l'unité de volume).

6. On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer

$$\iint_A y e^{y-2x} dx dy.$$



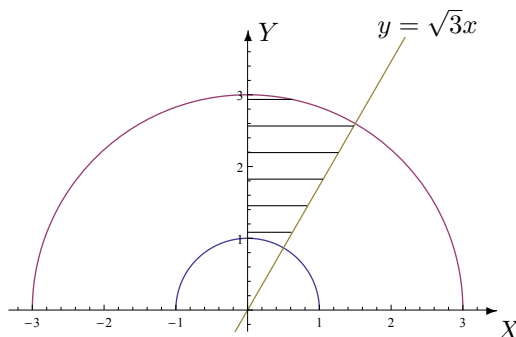
La fonction $f : (x, y) \mapsto y e^{y-2x}$ est continue sur le fermé borné $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2], x \in [\frac{y-2}{2}, 3 - \frac{3}{2}y]\}$; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A y e^{y-2x} dx dy = \frac{25e^8 - 1}{32e^6}.$$

7. Calculer, si possible l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{x}{y} dx dy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



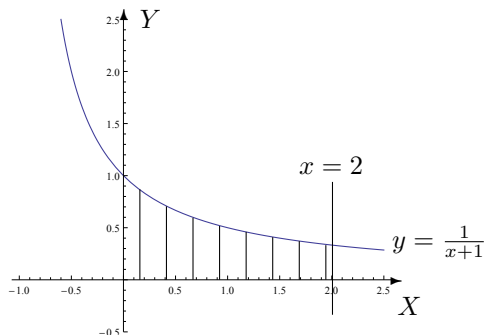
La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ est continue sur le fermé borné A; elle est donc intégrable sur cet ensemble et, en passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$\iint_A \frac{x}{y} dx dy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} r \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \right) dr = -4 \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

8. La fonction f étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Voici la représentation graphique de l'ensemble d'intégration



En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I = \int_0^{1/3} \left(\int_0^2 f(x, y) dx \right) dy + \int_{1/3}^1 \left(\int_0^{(1/y)-1} f(x, y) dx \right) dy.$$

9. Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 0\}$. Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.

a) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx \right) dy$ b) $\int_1^{+\infty} \left(\int_{-x^2}^{-x} \frac{y e^{2x}}{x^2} dy \right) dx$ c) $\iint_C \sin(x-y) e^x dx dy$

a) La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2}$ est continue et positive sur l'ensemble d'intégration A (ensemble hachuré ci-dessous) dont on exclut $(0, 0)$. Comme on peut vérifier facilement son intégrabilité après permutation de l'ordre d'intégration, la fonction est donc intégrable sur A et on a

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \frac{1 - 2 \operatorname{arctg}(1/2)}{8}.$$

b) La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{y e^{2x}}{x^2}$ est continue et négative sur l'ensemble d'intégration B (ensemble hachuré ci-dessous) non borné. En vérifiant son intégrabilité sur B , on constate qu'elle n'y est pas intégrable.

c) La fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x-y) e^x$ est continue sur l'ensemble d'intégration C (ensemble hachuré ci-dessous) non borné fermé. En majorant $|\sin(x-y)|$ par 1 et en appliquant le critère de comparaison, on prouve que f est intégrable sur C . Dès lors, en effectuant l'intégrale, on obtient

$$\iint_C \sin(x-y) e^x dx dy = \int_{-\infty}^0 \left(\int_x^0 \sin(x-y) e^x dy \right) dx = -\frac{1}{2}.$$

