# *1, 2, 3... Sciences*

***Année académique 2017-2018***

*Mathématiques générales : partim B'*

## Répétition 1* : correction

### Physique

Version 7 mars 2018

# Répétition 1* : Compléments sur les équations différentielles (1)

---

## I. Equations différentielles linéaires à coefficients constants

**Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'intervalle sur lequel on travaille ($f$ est une fonction de la variable réelle $x$).**

**(a)** $D^3f(x) - 12Df(x) + 16f(x) = 32x - 8$ **(b)** $D^3f(x) + 2D^2f(x) - Df(x) - 2f(x) = e^x + x^2$

**(c)** $D^2f(x) - 2Df(x) + 3f(x) = \sin(x)$ **(d)** $D^3f(x) + Df(x) = \pi$

Les solutions générales des EDLCC sont données par

(a) $f(x) = (C_1 + C_2x)\, e^{2x} + C_3e^{-4x} + 2x + 1,\ \ x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{4} + \dfrac{x}{6}e^x,\ x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^x \left(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)\right) + \dfrac{1}{4}\left(\sin(x) + \cos(x)\right),\ x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = C_1 + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) + \pi x,\ x \in \mathbb{R}$

où $C_1, C_2, C_3$ sont des constantes complexes arbitraires.

## II. Equations d'Euler

**Résoudre les équations différentielles suivantes sur $]0, +\infty[$ ($f$ et $y$ sont des fonctions de la variable réelle $x$).**

**(a)** $x^2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = 1$

**(b)** $x^2D^2f(x) - xDf(x) + f(x) = x$

**(c)** $x^3D^2y(x) - x^2Dy(x) - 3xy(x) + 16\ln(x) = 0$

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x) = C_1 \cos(\ln(x)) + C_2 \sin(\ln(x)) + 1, \quad x \in\, ]0, +\infty[,$

(b) $f(x) = x\left(C_1 + C_2\ln(x) + \dfrac{\ln^2(x)}{2}\right), \quad x \in\, ]0, +\infty[,$

(c) $y(x) = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} + 2\dfrac{\ln^2(x)}{x}, \quad x \in\, ]0, +\infty[,$

où $C_1, C_2$ sont des constantes complexes arbitraires.

## III. Equations différentielles à second membre linéaire

**Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le domaine sur lequel on travaille ($f$ et $y$ sont des fonctions de la variable réelle $x$).**

**(a)** $\left(1+x^2\right)Dy(x)-2xy(x)=\left(1+x^2\right)^2$

**(b)** $Df(x)+2xf(x)=2xe^{-x^2}$

**(c)** $xDy(x)+y(x)=-x^3$

**(d)** $x^3Df(x)+\left(2-3x^2\right)f(x)=x^3$**,** $\quad f(1)=\dfrac{1}{2}$

**(e)** $xDy(x)+1=\dfrac{1}{\ln(x)}y(x)$**,** $\quad y(e)=1$

**(f)** $Df(x)=\sin(x)-\operatorname{cotg}(x)f(x), \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

Les solutions générales de ces équations différentielles sont données par

(a) $y(x)=(C+x)\left(1+x^2\right),\ x\in\mathbb{R}$

(b) $f(x)=\left(C+x^2\right)e^{-x^2},\ x\in\mathbb{R}$

(c) $y(x)=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x^3}{4},\ x\in\mathbb{R}_0$

(d) $f(x)=Cx^3\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{x^3}{2},\ x\in\mathbb{R}_0$

(e) $y(x)=(C-\ln|\ln(x)|)\ln(x),\ x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$

(f) $f(x)=\dfrac{2x-\sin(2x)+4C}{4\sin(x)},\ x\in I=\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$

où $C$ est une constante complexe arbitraire.
Pour les points (d), (e) et (f), les solutions uniques des problèmes sont respectivement

$$f(x)=\frac{x^3}{2},\ x\in\,]0,+\infty[,\quad y(x)=(1-\ln(\ln(x)))\ln(x),\ x\in\,]1,+\infty[,\quad \text{et}\quad f(x)=\frac{2x-\sin(2x)}{4\sin(x)},\ x\in\,]0,\pi[.$$

*Remarque* : La solution générale de (d) est valable sur $\mathbb{R}_0=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, mais comme la condition initiale est donnée en $x_0=1\in\,]0,+\infty[$, la solution du problème est valable uniquement sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Pareillement, la solution générale de (e) est valable sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, mais comme la condition initiale est donnée en $x_0=e\in\,]1,+\infty[$, la solution du problème est valable uniquement sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
Encore, la solution générale de (f) est valable sur $I=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi,\pi+k\pi[$, mais comme la condition initiale est donnée en $x_0=\frac{\pi}{2}\in\,]0,\pi[$, la solution du problème est valable uniquement sur l'intervalle $]0,\pi[$.

## IV. Equations exactes

**Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant, si possible, l'intervalle sur lequel on travaille ($f$ et $u$ sont des fonctions de la variable réelle $x$).**

**(a)** $xDf(x)+f(x)+x^3=0$

**(b)** $\ln(x)Du(x)+\dfrac{u(x)}{x}=\dfrac{3}{x}\ln^2(x)$

**(c)** $Du(x)=-\dfrac{3x^2u(x)-u^3(x)}{x^3-3xu^2(x)}$

**(d)** $Df(x)=-\dfrac{f(x)\cos(xf(x))+2x}{x\cos(xf(x))}$

**(e)** $x^2Df(x)+4f(x)Df(x)+2xf(x)-1=0$

Les solutions générales sont données par

(a) $f(x)=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x^3}{4},\ x\in\mathbb{R}_0$

(b) $u(x)=\dfrac{C}{\ln(x)}+\ln^2(x),\ x\in\,]0,+\infty[\setminus\{1\}$

(c) $x^3u(x)-xu^3(x)=C$

(d) $\sin\left(xf(x)\right)+x^2=C$

(e) $2f^2(x)+x^2f(x)-x=C$

où $C$ est une constante complexe arbitraire.