1, 2, 3...Sciences

Année académique 2017-2018

Mathématiques générales : partim B'

Répétition 3* : correction

Physique

Version 20 avril 2018

Répétition 3* : analyse vectorielle et opérateurs de dérivation

I. Dérivation des intégrales paramétriques

1. **Soient un réel a et une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction**

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a

$$DF(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\, dt.$$

Il s'agit d'une application du théorème des intégrales paramétriques avec $A =]0, +\infty[$ comme ensemble d'intégration (variable notée t) et $\Lambda =]a, +\infty[$ comme ouvert de variation du paramètre (paramètre noté x).
Seule la majoration uniforme de la dérivée première n'est pas immédiate.

Suggestion. Si K est un bornÈ fermÈ inclus dans Λ, alors il existe $r > a$ tel que $K \subset [r, +\infty[$. Il s'ensuit que

$$|D_x(e^{-xt} f(t))| = te^{-xt}|f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|\; te^{-(r-a)t} \leq Ce^{-at}|f(t)| \quad \forall x \in K,\; t > 0,$$

où C est une constante.

2. **Sachant qu'elles sont définies [1], calculer les intégrales suivantes.**
   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, e^{-x}\, dx \quad (a, b \in \mathbb{R})$
   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\, dx \quad (a,\; b > 0)$

   La première intégrale vaut $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+b^2}{1+a^2}\right)$ et la seconde $\dfrac{\pi}{2} \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

3. **Soit**

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\, dx, \quad t > -1.$$

   (a) Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$.
   (b) Calculer $F(0)$.
   (c) Montrer que $DF(t) = \dfrac{1}{t+1}$.
   (d) En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F.

   Montrons que F est bien défini, c'est-à-dire que $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{x^t - 1}{\ln x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ pour tout $t > -1$.
   La fonction $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{x^t - 1}{\ln x}$ est continue sur $]0, 1[$ et
   - Intégrabilité en 1^- : le théorème de l'Hospital montre que $\lim_{x \to 1^-} f(x,t) = t \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 1^-.

1. Vérifier l'intégrabilité de chacune des fonctions sur le domaine considéré constitue un bon exercice !!

– Intégrabilité en 0^+ lorsque $t \geq 0$: on a $\lim_{x \to 0^+} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+.
– Intégrabilité en 0^+ lorsque $-1 < t < 0$: on a $\lim_{x \to 0^+} x^{-t} f(x,t) = 0 \in \mathbb{R}$; la fonction est donc intégrable en 0^+.

La seconde étape consiste alors à appliquer le théorème de dérivation des intégrales paramétriques. Vérifions-en les hypothèses : tout est direct sauf, peut-être, l'estimation uniforme de la dérivée.

Suggestion. On a $D_t f(x,t) = x^t$.
– Majoration lorsque $t \in [r, 0]$ avec $-1 < r < 0$:

$$\sup_{t \in [r,0]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq x^r$$

et la fonction $x \mapsto x^r$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $r \in]-1,0[$.
– Majoration lorsque $t \in [0, R]$ avec $R > 0$:

$$\sup_{t \in [0,R]} |D_t f(x,t)| = x^t \leq 1$$

et la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $R \in]0, +\infty[$.

Les intégrales paramétriques donnent

$$DF(t) = \int_0^1 D_t f(t,x)\ dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}, \quad \forall\, t > -1$$

donc

$$F(t) = \ln(t+1) + \mathit{constante}, \quad \forall\, t > -1.$$

Comme $F(0) = 0$, on trouve *constante* $= 0$ et, finalement,

$$\int_0^1 f(t,x) dx = \ln(t+1), \quad \forall\, t > -1.$$

II. Manipulations (algébrique et géométrique) et dérivation

1. **Soient $\vec{F}$, $\vec{G}$ des fonctions vectorielles en la variable réelle u et soit ϕ une fonction scalaire de la variable réelle u. On suppose que ces fonctions sont dérivables dans le même intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Dans cet intervalle,**
(a) établir la formule

$$D\left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right) = \left(D\vec{F}\right) \bullet \vec{G} + \vec{F} \bullet \left(D\vec{G}\right)$$

et en déduire qu'un vecteur de norme constante est orthogonal à sa dérivée ;
(b) établir la formule

$$D\left(\phi\, \vec{F}\right) = \phi\ D\vec{F} + (D\phi)\ \vec{F}.$$

2. **On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On définit la fonction vectorielle $\vec{R}$ par**

$$\vec{R}(t) = \cos(t)\ \vec{e}_1 + \sin(t)\ \vec{e}_2 + t\ \vec{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer

$$(i)\ D\vec{R}, \quad (ii)\ D^2\vec{R}, \quad (iii)\ \left\|D\vec{R}\right\|, \quad (iv)\ D\vec{R} \wedge D^2\vec{R}.$$

(i) $D\vec{R}(t) = -\sin t\, \vec{e_1} + \cos t\, \vec{e_2} + \vec{e_3}$ (iii) $\left\| D\vec{R}(t) \right\| = \sqrt{2}$

(ii) $D^2\vec{R}(t) = -\cos t\, \vec{e_1} - \sin t\, \vec{e_2}$ (iv) $D\vec{R} \wedge D^2\,\vec{R} = \sin t\, \vec{e_1} - \cos t\, \vec{e_2} + \vec{e_3}$

(b) Esquisser la courbe décrite par l'extrémité P du vecteur lié

$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{R}(t), \quad t \geq 0$$

et représenter le vecteur tangent à la courbe aux points de paramètre $t = \dfrac{\pi}{4}$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Il s'agit d'une hélice circulaire située sur le cylindre circulaire droit de rayon 1 et dont l'axe de symétrie est l'axe Oz.

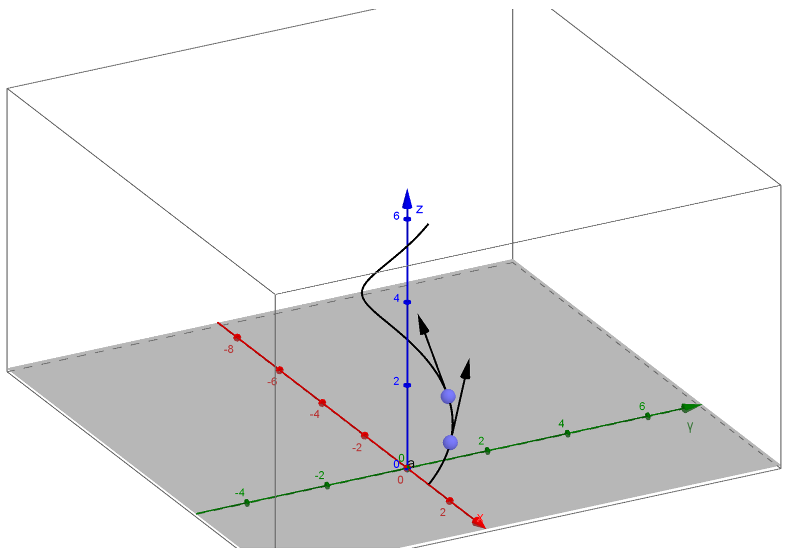

Figure 1 – Hélice circulaire et les vecteurs tangents.

3. **On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle**

$$\vec{F}(u, v) = u \sin(v)\ \vec{e}_1 + v \cos(u)\ \vec{e}_2 + u\ \vec{e}_3, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer l'expression explicite des fonctions suivantes (à valeurs scalaires ou vectorielles)

$$\textbf{(a)}\ D_u\vec{F} \bullet D_v\vec{F}, \quad \textbf{(b)}\ D_u\vec{F} \wedge D_v\vec{F}.$$

(a) $D_u\vec{F} \bullet D_v\vec{F} = u \sin(v) \cos(v) - v \sin(u) \cos(u)$

(b) $D_u\vec{F} \wedge D_v\vec{F} = -\cos(u)\, \vec{e_1} + u \cos(v)\, \vec{e_2} + (\sin(v) \cos(u) + uv \sin(u) \cos(v))\, \vec{e_3}$

4. **On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. Une particule se déplace de telle sorte que, à l'instant t, son vecteur position $\vec{r}$ est donné par**

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\ \vec{e}_1 + \sin(\omega t)\ \vec{e}_2$$

oú $t \in \mathbb{R}$ et ω désigne une constante.

(a) Montrer que, à tout instant, la vitesse $\vec{v}$ de la particule est orthogonale à son vecteur position.

On a $\vec{v}(t) = D\vec{r}(t) = \omega\, [-\sin(\omega t)\, \vec{e}_1 + \cos(\omega t)\, \vec{e}_2]$ de sorte que $\vec{v}(t) \bullet \vec{r}(t) = 0$ quel que soit t.

(b) Montrer que, à tout instant, l'accélération de la particule est dirigée vers l'origine et a une norme proportionnelle à sa distance à l'origine.

$\vec{a}(t) = D\vec{v}(t) = D^2\vec{r}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)$ de sorte que $\left\|D^2\vec{r}(t)\right\| = \omega^2\ \|\vec{r}(t)\|$ quel que soit t.

(c) Montrer que la fonction vectorielle $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant.

$\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t) = \omega\vec{e_3}$ quel que soit t.

(d) Interpréter géométriquement les résultats.
La particule suit un mouvement circulaire uniforme : elle parcourt un cercle centré à l'origine et de rayon 1.
La vitesse est, à tout instant, tangente au cercle, et donc perpendiculaire au vecteur position $\vec{r}$, et de norme constante ω.
L'accélération est quant à elle dirigée vers le centre du cercle (accélération centripète) et de norme constante ω^2 : elle permet à la particule de conserver sa trajectoire circulaire.

III. Gradient, divergence, rotationnel

1. **On donne les fonctions vectorielle et scalaire suivantes**

$$\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z), \quad r(x,y,z) = \|\vec{r}(x,y,z)\|$$

et le vecteur constant $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Déterminer

(a) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{r}$
(b) le gradient de la fonction scalaire $\frac{1}{r}$
(c) le gradient de la fonction scalaire $\vec{r} \bullet \vec{r}$
(d) le gradient de la divergence des fonctions vectorielles $\vec{r}$ et $r\,\vec{r}$
(e) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{a} \wedge \vec{r}$
(f) le gradient de la fonction scalaire $\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|$

(a) $\operatorname{rot}(\vec{r}) = \vec{0}$

(b) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

(c) $\operatorname{grad}(\vec{r} \bullet \vec{r}) = 2\vec{r}$

(d) $\operatorname{grad}[\operatorname{div}(\vec{r})] = \vec{0}$ et $\operatorname{grad}[\operatorname{div}(r\,\vec{r})] = 4\,\dfrac{\vec{r}}{r}$

(e) $\operatorname{rot}(\vec{a} \wedge \vec{r}) = 2\vec{a}$

(f) $\operatorname{grad}(\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|) = \dfrac{(\vec{a} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{a}}{\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|}$

2. **Soient les champs vectoriels**

$$\vec{f}(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \qquad \textbf{et} \qquad \vec{g}(x,y) = -\frac{1}{2}y\vec{e}_1 + \frac{1}{2}x\vec{e}_2$$

représentés sur les figures ci-dessous.

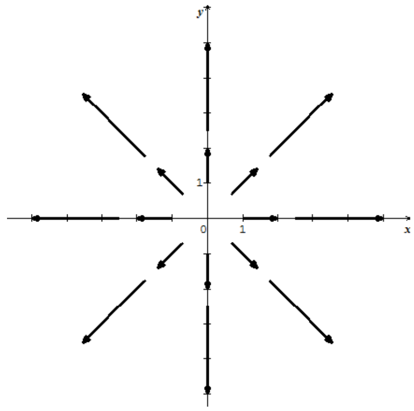

FIGURE 2 – Champ vectoriel $\vec{f}$

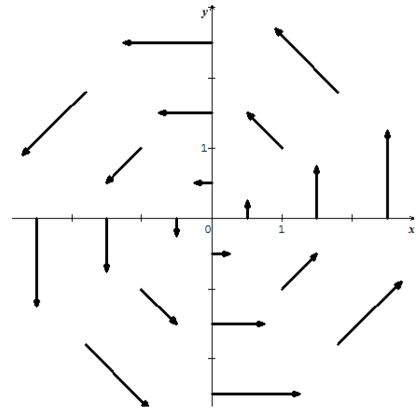

FIGURE 3 – Champ vectoriel $\vec{g}$

(a) Calculer la divergence du champ $\vec{f}$ et interpréter le résultat obtenu sur base de sa représentation (FIG. 2).

La divergence de $\vec{f}$ vaut 2 en tout point : elle est constante et positive, ce qui montre que le champ vectoriel $\vec{f}$ *fuit l'origine* de manière uniforme.

(b) Calculer le rotationnel du champ $\vec{f}$ et interpréter le résultat obtenu sur base de sa représentation (FIG. 2).

Le rotationnel de $\vec{f}$ est nul en tout point, ce qui montre que le champ vectoriel $\vec{f}$ *ne tourne à aucun endroit.*

(c) Mêmes questions pour le champ $\vec{g}$ et sa représentation (FIG. 3).

La divergence de $\vec{g}$ est nulle en tout point, ce qui montre que le champ vectoriel $\vec{g}$ ne possède *ni source, ni puits.*
Le rotationnel de $\vec{g}$ vaut le vecteur $\vec{e}_3$ en tout point : il est donc constant, ce qui montre que le champ vectoriel $\vec{g}$ *tourne, de manière uniforme, autour de l'origine.* Par ailleurs, en utilisant la règle de la main droite (le pouce en direction du rotationnel), on peut conclure que le champ $\vec{g}$ tourne dans le sens trigonométrique (par rapport à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan).

3. **Sur les exemples suivants, vérifier que le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire régulière est nul et que la divergence du rotationnel d'une fonction vectorielle régulière est nulle.**
   (a) $H(x, y, z) = \cos(xyz)$ **(b)** $\vec{f}(x, y, z) = \left(x^2 y,\ x^2 z^4,\ e^{xyz}\right)$

4. **Les opérations suivantes ont-elles un sens ?**
   Si oui, définissent-elles une fonction scalaire ou une fonction vectorielle ?
   (a) Gradient de la divergence d'une fonction vectorielle
   (b) Gradient de la divergence d'une fonction scalaire
   (c) Divergence du gradient d'une fonction scalaire
   (d) Divergence du gradient d'une fonction vectorielle
   (e) Divergence de la divergence d'une fonction scalaire
   (f) Rotationnel de la divergence d'une fonction vectorielle

   (a) L'opération a du sens et définit un vecteur.

   (b) L'opération n'a pas de sens.

(c) L'opération a du sens et définit un scalaire.

(d) L'opération n'a pas de sens.

(e) L'opération n'a pas de sens.

(f) L'opération n'a pas de sens.

5. **Soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ (resp. ϕ et ψ) deux fonctions vectorielles (resp. scalaires). Démontrer les relations suivantes :**
(a) $\nabla(\phi+\psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ **(c)** $\nabla \bullet (\vec{f}+\vec{g}) = \nabla \bullet \vec{f} + \nabla \bullet \vec{g}$
(b) $\nabla \wedge (\vec{f}+\vec{g}) = \nabla \wedge \vec{f} + \nabla \wedge \vec{g}$ **(d)** $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

VI. Divers

1. **La température en chacun des points du plan est donnée par $T(x,y) = x^2 - 2y^2$.**
(a) Dans quelle direction une fourmi initialement située en $(2,-1)$ doit-elle se déplacer pour se rafraîchir le plus rapidement possible ?

La direction dans laquelle la fonction T décroît le plus vite est, en tout point (x,y), celle du vecteur

$$-\text{grad}\, T(x,y) = -(2x,\ -4y).$$

En particulier, au point $(2,-1)$, elle est donnée le vecteur $(-4,-4)$, ou encore le vecteur unitaire $\vec{e} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) Si la fourmi se déplace à la vitesse constante v, quelle chute de température ressentira-t-elle initialement ?

Comme la fourmi se déplace dans la direction $\vec{e}$ à la vitesse constante v à partir du point $P_0(2,-1)$, sa position à tout instant t est donnée par

$$P(t) = P_0 + vt\vec{e} = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}vt,\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}vt\right)$$

et sa température à tout instant t vaut

$$T_f(t) = T(P(t)) = 2 - 4\sqrt{2}vt - \frac{1}{2}v^2t^2.$$

Dès lors, la variation de température subie initialement par la fourmi est donnée par

$$(DT_f)(0) = \left(-4\sqrt{2}v - v^2t\right)_{t=0} = -4\sqrt{2}v.$$

(c) Le long de quelle courbe la fourmi doit-elle se déplacer pour que la température décroisse le plus rapidement ?

Si on note $(x(t), y(t))$ la position de la fourmi à tout instant t, la direction dans laquelle elle se déplace est alors donnée par $\vec{v}(t) = (Dx(t), Dy(t))$.
Ainsi, pour que la température décroisse le plus rapidement, il faut que, à tout instant t, $\vec{v}(t)$ ait même direction et même sens que $-\text{grad}\, T(x(t), y(t))$, autrement dit il faut que ces deux vecteurs soient parallèles, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que

$$\begin{cases} Dx(t) = -2\lambda x(t) \\ Dy(t) = 4\lambda y(t) \end{cases}$$

Tenant compte des conditions initiales $x(0) = 2$ et $y(0) = -1$, il s'ensuit que ces deux EDLCC ont pour solutions

$$\begin{cases} x(t) = 2\exp(-2\lambda t) \\ y(t) = -\exp(4\lambda t) \end{cases}.$$

Enfin, en éliminant le paramètre t de ces équations, on conclut que la fourmi suit la courbe d'équation cartésienne $x^2y = -4$ ($x \geq 0$, $y \leq 0$).

2. **Un fil électrique rectiligne est parcouru par un courant d'intensité I constant. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace tel que $\vec{e}_3$ est parallèle au fil et orienté dans le sens du courant, la valeur du champ magnétique en tout point P de l'espace est donnée par**

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\vec{e}_3 \wedge \vec{d}}{\left\|\vec{d}\right\|^2}$$

où μ_0 (> 0) est la perméabilité magnétique du vide et où $\vec{d}$ est le vecteur joignant, perpendiculairement, le fil au point P.
(a) Faire un dessin de la situation ; indiquer le vecteur $\vec{d}$.

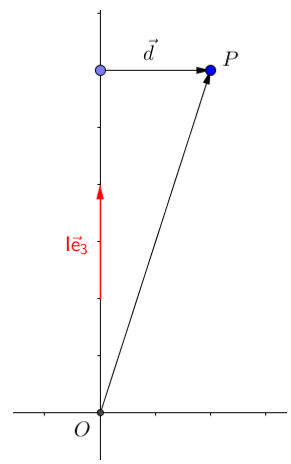

FIGURE 4 – Représentation du fil, du point P et du vecteur $\vec{d}$.

(b) Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{B}$.

Quel que soit le point $P(x, y, z)$, il vient que

$$\vec{d} = \vec{OP} - z\vec{e}_3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

Ainsi,

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \left(I\vec{e}_3 \wedge \vec{d}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(x^2 + y^2\right)}(-y, x, 0)$$

de sorte que la divergence et le rotationnel de $\vec{B}$ sont nuls [2] quel que soit P.

2. Notons que la divergence d'un champ (d'induction) magnétique est toujours nulle. Par contre, le fait que le rotationnel soit nul est un cas particulier de la situation physique considérée ici.