1, 2, 3...Sciences

Année académique 2017-2018

Mathématiques générales : partim B'

Répétition 5* : correction

Physique

Version 4 mai 2018

Répétition 5* : intégrales de surfaces et formules de Gauss, Green et Stokes

I. Paramétrages et intégrales de surfaces

1. **Soit $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un repère orthonormé de l'espace. On donne l'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2=0$.**
(a) Représenter l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient cette équation. Comment s'appelle cet ensemble ?
(b) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ correspondant aux points de cet ensemble dont la cote z est comprise entre 0 et 4.
(c) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{S}$.

(a) Il s'agit d'un cône circulaire droit dont l'axe de symétrie de rotation est Oz.

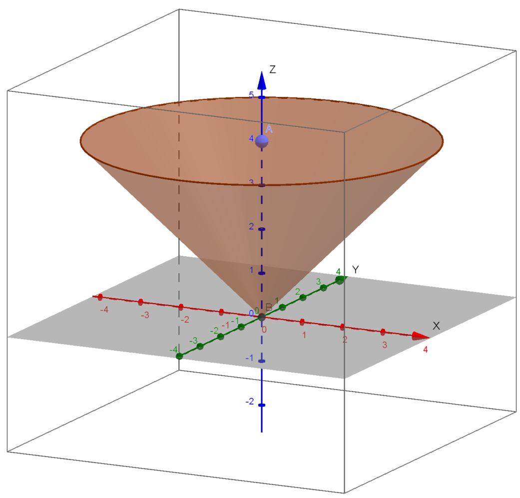

Figure 1 – Représentation de $\mathcal{S}$.

(b) Un paramétrage injectif continument dérivable de $\mathcal{S}$ est par exemple

$$\vec{\Phi}\ :\ (u,v)\in[0,4]\times[0,2\pi]\mapsto(u\cos(v),u\sin(v),u).$$

(c) Dès lors, l'aire de $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} d\sigma=\int_0^4\int_0^{2\pi}\|D_u\vec{\Phi}\wedge D_v\vec{\Phi}\|\,du\,dv=\sqrt{2}\int_0^4\int_0^{2\pi}u\,du\,dv=16\sqrt{2}\pi$$

(unités d'aire).

2. **Dans un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ du plan, on considère l'arcade de cycloïde paramétrée par**

$$(t-\sin t,\ 1-\cos t)\,,\quad t\in[0,2\pi].$$

(a) Déterminer un paramétrage de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par cette arcade de cycloïde et l'axe des abscisses.
(b) Calculer l'aire de cette surface $\mathcal{A}$.

(a) Un paramétrage injectif continument dérivable de $\mathcal{A}$ est par exemple

$$\vec{\Phi}\ :\ (u,t)\in[0,1]\times[0,2\pi]\mapsto(t-\sin(t),u(1-\cos(t))).$$

(b) Dès lors, l'aire de $\mathcal{A}$ est donnée par

$$\iint_{\mathcal{A}} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|D_u\vec{\Phi} \wedge D_t\vec{\Phi}\| \; dt \; du = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \; dt \; du = 3\pi$$

(unités d'aire).

3. **Calculer** $\iint_{\mathcal{B}} x^2 z \; d\sigma$ **où** $\mathcal{B}$ **est le bord du borné fermé de l'espace défini par les relations**

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad z \in [0,1].$$

L'intégrale vaut $\frac{3\pi}{4}$.

II. Formules de Gauss, Green et Stokes

1. **Formule de Green dans le plan**
Soit K un borné fermé de $\mathbb{R}^2$ dont le contour $\mathcal{C}^+$ est une union finie de courbes planes orientées « aire à gauche » et soit $\vec{f} = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert Ω tel que $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$. On a

$$\iint_K (D_x f_2 - D_y f_1) \; dx \; dy = \oint_{\mathcal{C}^+} (f_1 \; dx + f_2 \; dy)$$

Vérifier la formule de Green pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ **et la surface**

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 1 \leq y \leq 2 - x^2\right\}.$$

Représenter $\mathcal{A}$**.**

Les intégrales des deux membres de la formule ont pour valeur $\frac{56}{15}$.

2. **Formule de Gauss (ou théorème de la divergence)**
Soit V un borné fermé de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière $\mathcal{S}$ est une union finie de surfaces orientables et soit $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur Ω tel que $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{f}\right) \; dx \; dy \; dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n} \; d\sigma,$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure à la surface.

Vérifier le théorème de la divergence pour la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = (4x, 3z, 5y)$ **et la surface** $\mathcal{S}$ **du cône (portion de cône)**

$$\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0,2]\right\}.$$

Les intégrales des deux membres de la formule de Gauss ont pour valeur $\frac{32\pi}{3}$.

3. **Formule de Stokes**
Soit $\mathcal{S}^+$ une union finie de surfaces régulières orientées dont la frontière est la courbe fermée $\mathcal{C}^+$ composée d'une union finie de courbes régulières et orientées de manière à respecter la règle du tire-bouchon par rapport à l'orientation de $\mathcal{S}^+$.
Soit également $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur Ω tel que $\mathcal{S} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. On a

$$\iint_{\mathcal{S}^+} \vec{\operatorname{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n} \; d\sigma = \oint_{\mathcal{C}^+} \vec{f} \cdot \vec{t} \; ds = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 \; dx + f_2 \; dy + f_3 \; dz,$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire à $\mathcal{S}^+$ et $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}^+$.

Soit la fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z) = \alpha\left(l^4z^2, -3l^4xy, x^3y^3\right)$ où $l > 0$ est une longeur et $\alpha > 0$ donne à $\vec{f}$ les dimensions d'une force et soit la surface $\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = l, \ x^2+y^2 \leq 4l^2\right\}$ orientée de sorte que sa normale soit dirigée dans le sens de l'axe Z.

(a) Vérifier la formule de Stokes dans le cas de $\vec{f}$ et $\mathcal{S}$.

(b) Soit la surface $\mathcal{S}' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq l, \ x^2+y^2 = l(5l-z)\right\}$ orientée de sorte que sa normale soit dirigée dans le sens de l'axe Z. Représenter $\mathcal{S}'$ dans un repère orthonormé.

(c) Déduire des deux points précédents le flux de $\vec{\text{rot}}\left(\vec{f}\right)$ au travers de $\mathcal{S}'$, donné par

$$\iint_{\mathcal{S}'} \vec{\textbf{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n} \ d\sigma.$$

(a) Les intégrales des deux membres de la formule de Stokes sont nulles.

(b) La surface $\mathcal{S}'$ est un morceau de paraboloïde circulaire, situé au dessus du plan $z = l$. Le bord de cette surface est le même que celui de $\mathcal{S}$, à savoir $\mathcal{C} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = l, \ x^2+y^2 = 4l^2\right\}$.

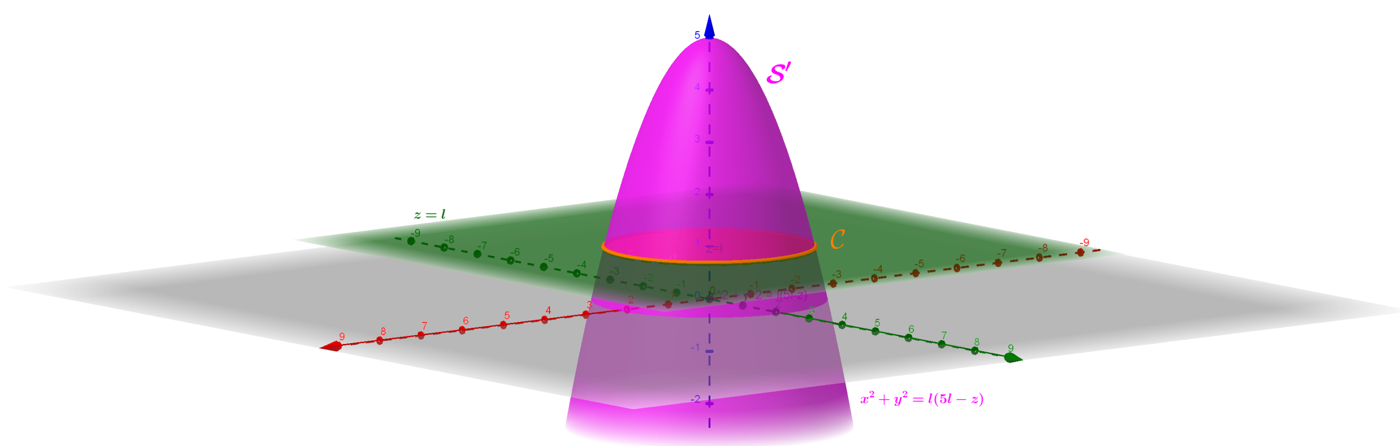

FIGURE 2 – Représentation de $\mathcal{S}'$ et de son bord $\mathcal{C}$ $(l = 1)$.

(c) Comme les surfaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ possèdent le même bord $\mathcal{C}$ et sont orientées dans le même sens, le théorème de Stokes implique que

$$\iint_{\mathcal{S}'} \vec{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n} \ d\sigma = \oint_{\mathcal{C}} l^4z^2 \ dx - 3l^4xy \ dy + x^3y^3 \ dz = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}}\left(\vec{f}\right) \cdot \vec{n} \ d\sigma = 0.$$

III. Divers

1. **Un dispositif d'éclairage est muni d'un élément réflecteur dont la forme est obtenue par rotation de la branche de parabole $y = \sqrt{z}$ $(y \in [0,1])$ autour de l'axe OZ. Déterminer l'aire du réflecteur.**

   Le réflecteur $\mathcal{R}$ est paramétré par

$$\vec{\Phi} \ : \ (z,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi] \mapsto \left(\sqrt{z}\cos(\theta), \sqrt{z}\sin(\theta), z\right)$$

qui est injectif et continûment dérivable sur $[0,1]\times[0,2\pi]$.
L'aire du réflecteur est alors donnée par

$$\iint_{\mathcal{R}} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|D_z\vec{\Phi} \wedge D_\theta\vec{\Phi}\| \, d\theta \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{z+\frac{1}{4}} \, d\theta \, dz = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

(unités d'aire).

2. **La température T en un point d'une boule métallique est proportionnelle au carré de la distance au centre de la boule. Calculez le taux de transmission de chaleur à travers une sphère $\mathcal{S}$ de rayon R centrée au centre de la boule.**
(Sugg. : utiliser ($\star$))

Si le centre de la boule occupe l'origine du repère orthonormé dans lequel on travaille, la température est donnée par

$$T(x,y,z) = C(x^2+y^2+z^2)$$

où C est une constante de proportionnalité. Le transfert de chaleur est caractérisé par

$$\vec{F}(x,y,z) = -K \operatorname{grad} T = -KC\ \left(2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + 2z\vec{e}_3\right)$$

où K est la conductivité du métal.
Sachant que, en utilisant les coordonnées sphériques, la sphère de rayon R est paramétrée par

$$\vec{\Phi}\ :\ (\varphi,\theta) \in [0,2\pi]\times[0,\pi] \mapsto \left(R\sin(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\theta)\sin(\varphi), R\cos(\theta)\right),$$

le taux de transmission de chaleur à travers la sphère $\mathcal{S}$ est donné par

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)\left(\vec{\Phi}(\varphi,\theta)\right) \|D_\varphi\vec{\Phi}\wedge D_\theta\vec{\Phi}\|\, d\varphi\, d\theta \\ &= -2KCR\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \|D_\varphi\vec{\Phi}\wedge D_\theta\vec{\Phi}\|\, d\varphi\, d\theta \\ &= -8\pi R^3 KC\end{aligned}$$

puisque $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \|D_\varphi\vec{\Phi}\wedge D_\theta\vec{\Phi}\|\, d\varphi\, d\theta = \iint_{\mathcal{S}} d\sigma$ correspond à l'aire de la sphère, c'est-à-dire $4\pi R^2$.

3. **Un champ magnétique est donné par**

$$\vec{B} = \left(5x+\sin(y^2z)\right)\vec{e}_1 + \left(\arctan(xz)+4y\right)\vec{e}_2 + \left(\cos(xy)-6z\right)\vec{e}_3$$

Calculer le flux de ce champ magnétique au travers de la surface fermée $\mathcal{S}$ correspondant au bord d'un cube d'arête égale à 2 centré à l'origine. **(Sugg. : remplacer l'intégrale de surface par une autre)**

La formule de Gauss (divergence) stipule que le flux d'un champ vectoriel donné au travers d'une surface fermée $\mathcal{S}$ est égale à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le borné fermé délimité par $\mathcal{S}$. Dans notre cas, la divergence du champ magnétique considéré vaut 3 et donc le flux cherché est donné par

$$\iiint_K 3\, dx\, dy\, dz = 3\iiint_K dx\, dy\, dz$$

où K est le borné fermé correspondant au cube. Puisque $\iiint_K dx\, dy\, dz$ correspond au volume de ce borné fermé, c'est-à-dire 8 (unités de volume), le flux cherché vaut 24.

4. **La formule de Green, stipulant que**

$$\iint_K D_x f_2 - D_y f_1 \; dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} f_1 dx + f_2 dy$$

où K est un borné fermé du plan, $\mathcal{C}^+$ son bord orienté « aire à gauche » et $\vec{f} = (f_1, f_2)$ une fonction vectorielle continûment dérivable sur un ouvert contenant K, peut être utilisée pour déterminer l'aire d'une surface plane : en effet, en prenant $f_2 = x$ et $f_1 = 0$ (resp. $f_1 = -y$ et $f_2 = 0$), on obtient

$$\iint_K dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} x \, dy \qquad \left(\textbf{resp. } \iint_K dxdy = \oint_{\mathcal{C}^+} -y \, dy\right).$$

Utiliser ce fait pour calculer l'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$.

L'aire d'une ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ vaut πab.

5. **Un champ électrique est donné par**

$$\vec{B} = \left(e^x + 2y + \sin(x^2 z)\right) \vec{e}_1 + (12x + \arctan(yz))\, \vec{e}_2 + \cos(xyz)\vec{e}_3$$

Calculer la circulation de ce champ électrique le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. (Sugg. : remplacer l'intégrale curviligne par une autre)

Le théorème de Stokes stipule que la circulation cherchée est égale à

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{n} \; d\sigma$$

où $\mathcal{S}$ est la surface planaire délimitée par l'ellipse et où $\vec{n}$ est la normale unitaire à cette surface. Si on choisit $\vec{n} = \vec{e}_3$ comme vecteur normal unitaire, il vient que

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) \cdot \vec{n} = (\star, \star, 10) \cdot (0, 0, 1) = 10$$

et donc que la circulation de $\vec{B}$ le long de l'ellipse, <u>dans le sens trigonométrique</u>, est donnée par

$$\iint_{\mathcal{S}} 10 \; d\sigma = 10 \iint_{\mathcal{S}} d\sigma = 20\pi$$

puisque $\iint_{\mathcal{S}} d\sigma$ correspond à l'aire de l'ellipse, à savoir 2π (cf. exercice précédent).