Mathématique (MATH0009)

Année académique 2020-2021

Corrigé de l'examen du 14 juin 2021
Chimistes bloc 1 et géologues bloc 2

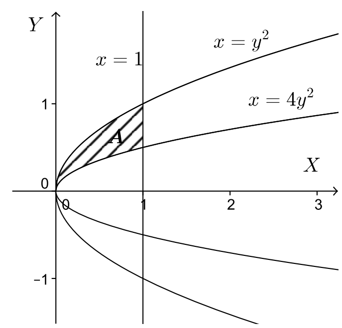
Version 2 juin 2021

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f explicitement par
$$f(x) = \frac{x}{1+2x}\ .$$
(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction f explicitement par
$$f(x,y) = \ln(x^2 - y^2) - \ln(y).$$
(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.
$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$$

3. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale
$$I = \iint_A \frac{2y}{\sqrt{x}(y^2+x)}\ dx\ dy.$$



4. On donne l'ensemble
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$
(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.
$$I = \iint_E \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\ dx\ dy.$$

5. (a) Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cos(\pi+\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \tan(\alpha) & \cos(\pi-\alpha) \end{pmatrix}\ ,\ \alpha \in]\pi/2, 3\pi/2[.$$
Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer **uniquement** l'élément $(M^{-1})_{3,2}$. Simplifier au maximum l'expression.

(b) Dans un jeu vidéo, un archer qui n'apprend pas de ses erreurs doit lancer une flèche dans une cible. Trois situations sont possibles : soit la cible est atteinte au centre, soit la cible est atteinte sur les bords, soit la cible n'est pas atteinte.

S'il a lancé une flèche au centre, la suivante le sera encore avec une probabilité de 60% ; elle ratera la cible avec une probabilité de 10%.

S'il a lancé une flèche sur les bords, la suivante a 1 chance sur 5 d'arriver au centre et autant de chances d'atteindre les bords que de rater la cible.

S'il a lancé une flèche hors cible, il a 1 chance sur 10 de placer la suivante au centre, 3 chances sur 10 d'atteindre les bords et 6 chances sur 10 de rater à nouveau.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'archer rate la cible (flèche en dehors) ?

6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.

$$(a) \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{m-1}\right) - \cos\left(\frac{1}{m+1}\right) \right) \qquad\qquad (b) \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{j^2}{1-j^2}$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x) = \frac{x}{1+2x} \ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0**.**

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{aligned}
Df(x) &= \frac{1+2x-2x}{(1+2x)^2} = \frac{1}{(1+2x)^2} \ , \\
D^2f(x) &= \frac{(-2)2}{(1+2x)^3} = \frac{-4}{(1+2x)^3} \ , \\
D^3f(x) &= \frac{(-4)(-3)2}{(1+2x)^4} = \frac{24}{(1+2x)^4} \ .
\end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = 1$ et $D^2f(0) = -4$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= f(0) + Df(0)x \ = \ x, \\
P_2(x) &= f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\frac{x^2}{2} \ = \ x - 2x^2, \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned}
R_1(x) &= \frac{-4}{(1+2u_1)^3}.\ \frac{x^2}{2} = \frac{-2x^2}{(1+2u_1)^3} \ , \\
R_2(x) &= \frac{24}{(1+2u_2)^4}.\ \frac{x^3}{3!} = \frac{4x^3}{(1+2u_2)^4}, \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Notons qu'il est possible d'exprimer ces restes à l'aide de la définition :

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - P_1(x) = \frac{x}{1+2x} - x = \frac{-2x^2}{1+2x}\ , \\ R_2(x) &= f(x) - P_2(x) = \frac{x}{1+2x} - (x - 2x^2) = \frac{4x^3}{1+2x}\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.

Solution. Considérons les premières expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est du signe contraire de $1 + 2u_1$. Cela étant, on a $1 + 2t > 0$ si et seulement si $t > -1/2$. Dès lors si x est voisin de 0, alors $x > -1/2$ et $u_1 > -1/2$ aussi puisque u_1 est compris entre 0 et x ; il s'ensuit que $1 + 2u_1 > 0$ donc $R_1(x) < 0$, $\forall x$ voisin de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

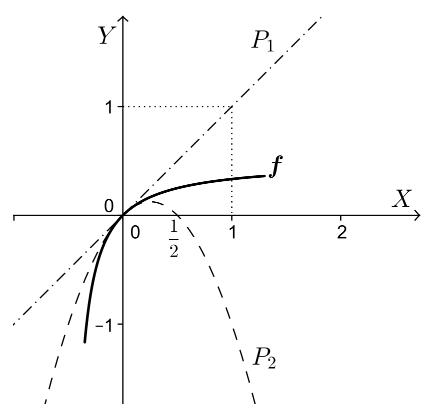
D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0 et $R_2(x) < 0$, $\forall x < 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Si on utilise la définition des restes pour les exprimer, on aura le raisonnement suivant.

D'une part, $R_1(x)$ est du signe contraire de $1 + 2x$. Comme $1 + 2x > 0$ au voisinage de 0, on a $R_1(x) < 0$, $\forall x$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, comme $1 + 2x > 0$ au voisinage de 0, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0 et $R_2(x) < 0$, $\forall x < 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) - \ln(y).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

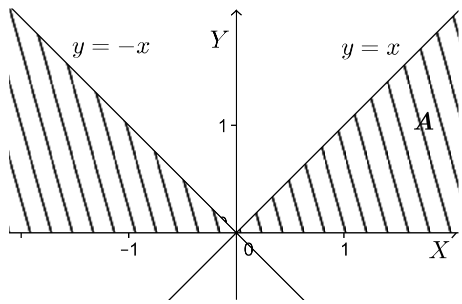
$$xD_x f(x, y) + yD_y f(x, y)$$

Solution.

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0,\ y > 0\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan, bords exclus.

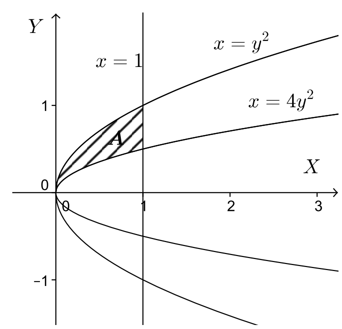


(c) En tout point de A, on a

$$\begin{aligned} xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y) &= x\frac{2x}{x^2-y^2} + y\left(\frac{-2y}{x^2-y^2} - \frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{2x^2-2y^2}{x^2-y^2} - 1 \\ &= \frac{2(x^2-y^2)}{x^2-y^2} - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$I = \iint_A \frac{2y}{\sqrt{x}(y^2+x)}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{2y}{\sqrt{x}(y^2+x)}$ est continue sur

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \text{ et } y^2 + x \neq 0\ \right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\ \right\}$$

donc sur

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1] \text{ et } y \in \left[\sqrt{x}/2, \sqrt{x}\ \right]\right\},$$

borné non fermé . Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y),\ \forall (x, y) \in A$.

Pour x fixé dans $]0, 1]$, la fonction $h : y \mapsto \left|\dfrac{2y}{\sqrt{x}(y^2+x)}\right| = \dfrac{2y}{\sqrt{x}(y^2+x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[\sqrt{x}/2, \sqrt{x}\ ]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\ \frac{2y}{y^2+x}\ dy &= \frac{1}{\sqrt{x}}\ \left[\ln\left(|y^2+x|\right)\right]_{\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\ \left(\ln(2x) - \ln\left(\frac{x}{4}+x\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\ \left(\ln(2x) - \ln\left(\frac{5x}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\ \ln\left(\frac{8x}{5x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\ \ln\left(\frac{8}{5}\right)
\end{aligned}$$

puisque $\ln(x) - \ln(y) = \ln(x/y), \forall x, y > 0$.
La fonction $g : x \mapsto \ln\left(\frac{8}{5}\right)\ \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc sur $]0, 1]$. Elle est intégrable en 0 puisque la fonction $x \mapsto 1/x^s$ est intégrable en 0 ssi $s < 1$ et ici $s = 1/2$.
Dès lors, f est intégrable sur A. Comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}} \frac{2y}{\sqrt{x}(y^2+x)}\ dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \ln\left(\frac{8}{5}\right) dx \\
&= \ln\left(\frac{8}{5}\right) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \ dx \\
&= \ln\left(\frac{8}{5}\right) \left[2\sqrt{x}\ \right]_0^1 \\
&= 2\ln\left(\frac{8}{5}\right).
\end{aligned}$$

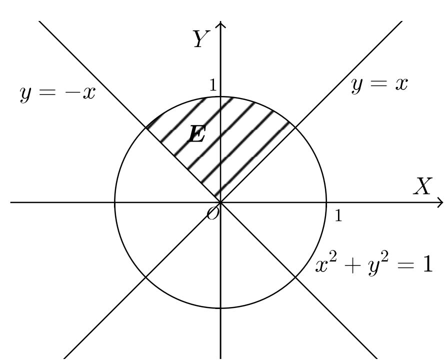
4. **On donne l'ensemble**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.

$$I = \iint_E \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\ dx\ dy.$$

Solution. (a) Voici la représentation graphique (partie hachurée du plan, bords compris) de l'ensemble E.



(b) La fonction $f : (x,y) \mapsto 1/\left(1+(x^2+y^2)^2\ \right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble E fermé borné ; elle est donc intégrable sur E.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration E', en bijection avec l'ensemble $E \setminus \{(0,0)\}$, s'écrit $E' = \{(r,\theta) : r \in]0,1], \theta \in [\pi/4, 3\pi/4]\}$ et la fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{1+(r^2)^2}$$

multipliée par le jacobien r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{r}{1+(r^2)^2}\, d\theta \right) dr \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{2r}{1+(r^2)^2}\, dr \right) \cdot \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2}\, \left[\arctan(r^2)\right]_0^1 \cdot [\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\
&= \frac{1}{2} \left(\arctan(1) - \arctan(0)\right) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{16}.
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cos(\pi+\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \tan(\alpha) & \cos(\pi-\alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in]\pi/2, 3\pi/2[.$$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer uniquement l'élément $(M^{-1})_{3,2}$. Simplifier au maximum l'expression.

Solution. La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie et en appliquant la première loi des mineurs à la première colonne, on a

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cos(\pi+\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \tan(\alpha) & \cos(\pi-\alpha) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\cos(\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \tan(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= -\sin(\alpha) \begin{vmatrix} 1 & -\cos(\alpha) \\ \tan(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= -\sin(\alpha)\left(2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right) \\
&= -\sin^2(\alpha)\left(2\cos(\alpha)+1\right).
\end{aligned}$$

Donc $\det M \neq 0$ si et seulement si

$$\sin(\alpha) \neq 0 \ \text{ et } \ \cos(\alpha) \neq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha \neq k\pi) \ \text{ et } \ \left(\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ et } \ \alpha \neq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right) \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\alpha \in]\pi/2, 3\pi/2[$, la matrice M est donc inversible si et seulement si

$$\alpha \neq \frac{2\pi}{3} \ , \ \alpha \neq \pi \ \text{ et } \ \alpha \neq \frac{4\pi}{3}.$$

Dans ce cas, l'élément $(M^{-1})_{3,2}$ peut être calculé et, si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs, cet élément vaut

$$\begin{aligned}
(M^{-1})_{3,2} &= \frac{1}{\det M}\ (\widetilde{\mathcal{M}})_{3,2} \\
&= \frac{1}{-\sin^2(\alpha)\,(2\cos(\alpha)+1)}\ (\mathcal{M})_{2,3} \\
&= \frac{1}{\sin^2(\alpha)\,(2\cos(\alpha)+1)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(\alpha) & \tan(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\,(2\cos(\alpha)+1)} \\
&= \frac{1}{\sin(\alpha)\,(2\cos(\alpha)+1)}.
\end{aligned}$$

(b) Dans un jeu vidéo, un archer qui n'apprend pas de ses erreurs doit lancer une flèche dans une cible. Trois situations sont possibles : soit la cible est atteinte au centre, soit la cible est atteinte sur les bords, soit la cible n'est pas atteinte.

S'il a lancé une flèche au centre, la suivante le sera encore avec une probabilité de 60% ; elle ratera la cible avec une probabilité de 10%.

S'il a lancé une flèche sur les bords, la suivante a 1 chance sur 5 d'arriver au centre et autant de chances d'atteindre les bords que de rater la cible.

S'il a lancé une flèche hors cible, il a 1 chance sur 10 de placer la suivante au centre, 3 chances sur 10 d'atteindre les bords et 6 chances sur 10 de rater à nouveau.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'archer rate la cible (flèche en dehors) ?

Solution.

(1) Soient C_0, B_0 et P_0 les situations initiales respectives « cible atteinte au centre », « cible atteinte au bord » et « cible pas atteinte » ; soient C_1, B_1 et P_1 , ces mêmes situations à la fin du premier lancer. On a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ B_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ B_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Si $\mathbb{1}$ est la matrice identité, les vecteurs propres relatifs à

la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & -0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x+2y+z=0 \\ 3x-6y+3z=0 \\ x+4y-4z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+4y-4z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x=2z \\ 6y=5z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{2}{3}z \\ y=\frac{5}{6}z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ \frac{5}{6}z \\ z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(4+5+6)=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{15}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{5}{15} \\ \frac{6}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que l'archer rate la cible (flèche en dehors) est de $2/5$.

6. **Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.**

$$(a) \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{m-1}\right) - \cos\left(\frac{1}{m+1}\right) \right) \qquad\qquad (b) \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{j^2}{1-j^2}$$

Solution.

(a) Comme

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{M} \left(\cos\left(\frac{1}{m-1}\right) - \cos\left(\frac{1}{m+1}\right) \right) &= \sum_{m=2}^{M} \cos\left(\frac{1}{m-1}\right) - \sum_{m=2}^{M} \cos\left(\frac{1}{m+1}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{M-1} \cos\left(\frac{1}{m}\right) - \sum_{m=3}^{M+1} \cos\left(\frac{1}{m}\right) \\
&= \cos(1) + \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(\frac{1}{M}\right) - \cos\left(\frac{1}{M+1}\right),
\end{aligned}$$

par définition des séries, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{m-1}\right)-\cos\left(\frac{1}{m+1}\right)\ \right)\\
&= \lim_{M\to+\infty}\sum_{m=2}^{M}\left(\cos\left(\frac{1}{m-1}\right)-\cos\left(\frac{1}{m+1}\right)\ \right)\\
&= \lim_{M\to+\infty}\left(\cos(1)+\cos\left(\frac{1}{2}\right)-\cos\left(\frac{1}{M}\right)-\cos\left(\frac{1}{M+1}\right)\right)\\
&= \cos(1)+\cos\left(\frac{1}{2}\right)-\lim_{M\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{M}\right)-\lim_{M\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{M+1}\right)\\
&= \cos(1)+\cos\left(\frac{1}{2}\right)-2.
\end{aligned}$$

En effet, vu le théorème des limites de fonction de fonction,

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M+r}=0\ (r\in\mathbb{R})\ \text{ et }\ \lim_{t\to 0}\cos(t)=1$$

donc

$$\lim_{M\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{M+r}\right)=1.$$

La série est donc convergente et sa somme vaut

$$\cos(1)+\cos\left(\frac{1}{2}\right)-2$$

(b) Puisque

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{j^2}{1-j^2}=-1,$$

le terme général de la série

$$\sum_{j=2}^{+\infty}\frac{j^2}{1-j^2}$$

ne tend pas vers 0 ; cette série n'est donc pas convergente.

Mathématique (MATH0009)

Année académique 2020-2021

Corrigé de l'examen du 14 juin 2021
Biologistes et géographes bloc 2

Version 2 juin 2021

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \frac{x}{1+2x} \ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction f explicitement par

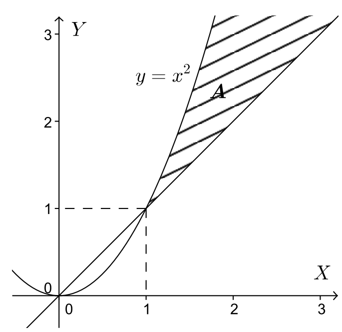
$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2) - \ln(y).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x, y) + yD_y f(x, y)$$

3. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A \frac{x}{y^4} \ dx \ dy.$$



4. On donne l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.

$$I = \iint_E \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \ dx \ dy.$$

5. (a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cos(-\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \tan(\alpha) & \cos(\pi - \alpha) \end{pmatrix} \ , \ \alpha \in]\pi/2, 3\pi/2[.$$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer **uniquement** l'élément $(M^{-1})_{3,2}$. Simplifier au maximum l'expression.

(b) Dans un jeu vidéo, un archer qui n'apprend pas de ses erreurs doit lancer une flèche dans une cible. Trois situations sont possibles : soit la cible est atteinte au centre, soit la cible est atteinte sur les bords, soit la cible n'est pas atteinte.

S'il a lancé une flèche au centre, la suivante le sera encore avec une probabilité de 60% ; elle ratera la cible avec une probabilité de 10%.
S'il a lancé une flèche sur les bords, la suivante a 1 chance sur 5 d'arriver au centre et autant de chances d'atteindre les bords que de rater la cible.
S'il a lancé une flèche hors cible, il a 1 chance sur 10 de placer la suivante au centre, 3 chances sur 10 d'atteindre les bords et 6 chances sur 10 de rater à nouveau.

(1) Déterminer la matrice de transition.
(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'archer rate la cible (flèche en dehors) ?

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x) = \frac{x}{1+2x} \ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0**.**
Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{1+2x-2x}{(1+2x)^2} = \frac{1}{(1+2x)^2} \ , \\ D^2f(x) &= \frac{(-2)2}{(1+2x)^3} = \frac{-4}{(1+2x)^3} \ , \\ D^3f(x) &= \frac{(-4)(-3)2}{(1+2x)^4} = \frac{24}{(1+2x)^4} \ . \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = 1$ et $D^2f(0) = -4$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)x \ = \ x, \\ P_2(x) &= f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\frac{x^2}{2} \ = \ x - 2x^2, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{-4}{(1+2u_1)^3}.\frac{x^2}{2} = \frac{-2x^2}{(1+2u_1)^3} \ , \\ R_2(x) &= \frac{24}{(1+2u_2)^4}.\frac{x^3}{3!} = \frac{4x^3}{(1+2u_2)^4}, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notons qu'il est possible d'exprimer ces restes à l'aide de la définition :

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - P_1(x) = \frac{x}{1+2x} - x = \frac{-2x^2}{1+2x} \ , \\ R_2(x) &= f(x) - P_2(x) = \frac{x}{1+2x} - (x-2x^2) = \frac{4x^3}{1+2x} \ , \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.

Solution. Considérons les premières expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est du signe contraire de $1+2u_1$. Cela étant, on a $1+2t>0$ si et seulement si $t > -1/2$. Dès lors si x est voisin de 0, alors $x > -1/2$ et $u_1 > -1/2$ aussi puisque u_1 est compris entre 0 et x ; il s'ensuit que $1+2u_1>0$ donc $R_1(x)<0$, $\forall x$ voisin de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

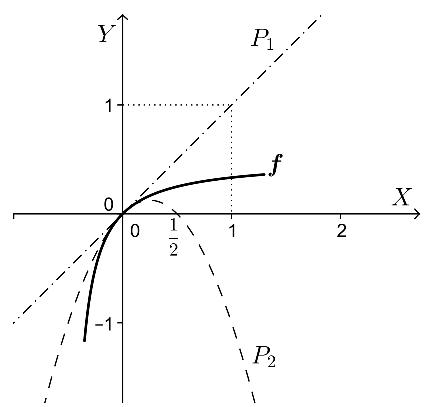
D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x)>0$, $\forall x>0$ au voisinage de 0 et $R_2(x)<0$, $\forall x<0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Si on utilise la définition des restes pour les exprimer, on aura le raisonnement suivant.

D'une part, $R_1(x)$ est du signe contraire de $1+2x$. Comme $1+2x>0$ au voisinage de 0, on a $R_1(x)<0$, $\forall x$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, comme $1+2x>0$ au voisinage de 0, $R_2(x)$ est du signe de x. Par conséquent, $R_2(x)>0$, $\forall x>0$ au voisinage de 0 et $R_2(x)<0$, $\forall x<0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 pour les points d'abscisse négative et au-dessus de celui de P_2 pour les points d'abscisse positive.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y) = \ln(x^2-y^2) - \ln(y).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

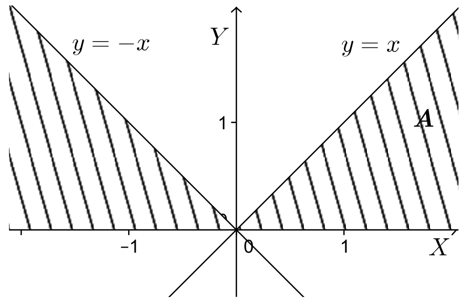
$$xD_xf(x,y) + yD_yf(x,y)$$

Solution.

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2>0,\ y>0\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan, bords exclus.

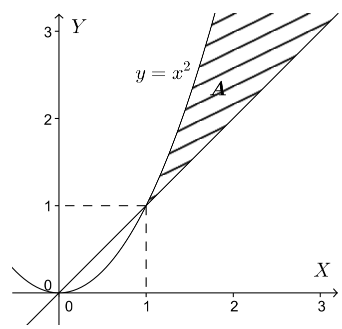


(c) En tout point de A, on a

$$\begin{aligned} xD_xf(x,y)+yD_yf(x,y) &= x\frac{2x}{x^2-y^2} + y\left(\frac{-2y}{x^2-y^2}-\frac{1}{y}\right)\\ &= \frac{2x^2-2y^2}{x^2-y^2}-1\\ &= \frac{2(x^2-y^2)}{x^2-y^2}-1\\ &= 1. \end{aligned}$$

3. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$I=\iint_A \frac{x}{y^4}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto \dfrac{x}{y^4}$ est continue sur $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq 0\ \right\}$ donc sur

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,+\infty[\text{ et } y\in\left[x,x^2\ \right]\right\},$$

non fermé borné. Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que $|f(x,y)|=f(x,y),\ \forall (x,y)\in A$. Pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $h:y\mapsto \left|\dfrac{x}{y^4}\right|=\dfrac{x}{y^4}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur le fermé borné $[x,x^2\ ]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble. On a

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{x}{y^4}\ dy &= x\ .\ \left[\frac{-1}{3y^3}\right]_x^{x^2}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}\right). \end{aligned}$$

La fonction $g:x\mapsto \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^5}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_0$ donc sur $[1,+\infty[$. Vérifions son intégrabilité en $+\infty$. Comme g est continu sur $[1,t]\ \forall t>1$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}\right)\ dx &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^4}\right]_1^t\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t}+\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

et comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1,+\infty[$.

Dès lors, f est intégrable sur A. Comme cette fonction est positive sur A, on obtient

$$I=\int_1^{+\infty}\left(\int_x^{x^2}\frac{x}{y^4}\,dy\right)\,dx=\frac{1}{4}.$$

Remarquons que la justification de l'intégrabilité de la fonction g se ramène immédiatement aux exemples fondamentaux (fonction $1/x^s$).

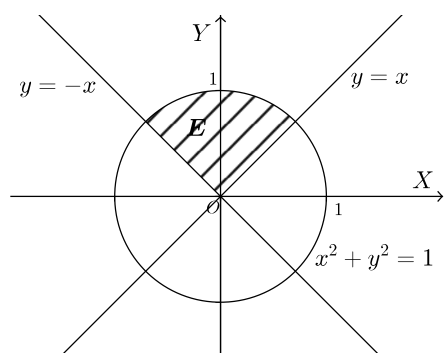
4. **On donne l'ensemble**

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, -y\le x\le y\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante en justifiant vos démarche et réponse.

$$I=\iint_E \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dx\ dy.$$

Solution. (a) Voici la représentation graphique (partie hachurée du plan, bords compris) de l'ensemble E.



(b) La fonction $f:(x,y)\mapsto 1/\left(1+x^2+y^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble E fermé borné ; elle est donc intégrable sur E.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration E', en bijection avec l'ensemble $E\setminus\{(0,0)\}$, s'écrit $E'=\{(r,\theta): r\in]0,1],\theta\in[\pi/4,3\pi/4]\}$ et la fonction à intégrer est la fonction

$$g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\frac{1}{1+r^2}$$

multipliée par le jacobien r. Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{r}{1+r^2}\, d\theta \right) dr \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{2r}{1+r^2}\, dr \right) \cdot \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln(|1+r^2|) \right]_0^1 \cdot [\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\
&= \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \ln(2),
\end{aligned}$$

puisque $\ln(1) = 0$.

5. **(a) Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cos(-\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \tan(\alpha) & \cos(\pi - \alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in]\pi/2, 3\pi/2[.$$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit inversible. Dans ces conditions, calculer uniquement l'élément $(M^{-1})_{3,2}$. Simplifier au maximum l'expression.

Solution. La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie et en appliquant la première loi des mineurs à la première colonne, on a

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cos(-\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \tan(\alpha) & \cos(\pi - \alpha) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cos(\alpha) \\ 0 & \tan(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \tan(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= -\sin(\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \tan(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= -\sin(\alpha)\,(2\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \\
&= -\sin^2(\alpha)\,(2\cos(\alpha) - 1)\,.
\end{aligned}$$

Donc $\det M \neq 0$ si et seulement si

$$\sin(\alpha) \neq 0 \ \text{ et } \ \cos(\alpha) \neq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha \neq k\pi) \quad \text{et} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \text{ et } \ \alpha \neq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\alpha \in]\pi/2, 3\pi/2[$, la matrice M est donc inversible si et seulement si

$$\alpha \neq \pi.$$

Dans ce cas, l'élément $(M^{-1})_{3,2}$ peut être calculé et, si $\mathcal{M}$ est la matrice des cofacteurs, cet élément vaut

$$\begin{aligned}
(M^{-1})_{3,2} &= \frac{1}{\det M}\ (\widetilde{\mathcal{M}})_{3,2} \\
&= \frac{1}{-\sin^2(\alpha)\,(2\cos(\alpha)-1)}\ (\mathcal{M})_{2,3} \\
&= \frac{1}{\sin^2(\alpha)\,(2\cos(\alpha)-1)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(\alpha) & \tan(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\,(2\cos(\alpha)-1)} \\
&= \frac{1}{\sin(\alpha)\,(2\cos(\alpha)-1)}.
\end{aligned}$$

(b) Dans un jeu vidéo, un archer qui n'apprend pas de ses erreurs doit lancer une flèche dans une cible. Trois situations sont possibles : soit la cible est atteinte au centre, soit la cible est atteinte sur les bords, soit la cible n'est pas atteinte.

S'il a lancé une flèche au centre, la suivante le sera encore avec une probabilité de 60% ; elle ratera la cible avec une probabilité de 10%.

S'il a lancé une flèche sur les bords, la suivante a 1 chance sur 5 d'arriver au centre et autant de chances d'atteindre les bords que de rater la cible.

S'il a lancé une flèche hors cible, il a 1 chance sur 10 de placer la suivante au centre, 3 chances sur 10 d'atteindre les bords et 6 chances sur 10 de rater à nouveau.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'archer rate la cible (flèche en dehors) ?

Solution.
(1) Soient C_0, B_0 et P_0 les situations initiales respectives ≪ cible atteinte au centre ≫, ≪ cible atteinte au bord ≫ et ≪ cible pas atteinte ≫ ; soient C_1, B_1 et P_1 , ces mêmes situations à la fin du premier lancer. On a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ B_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ B_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Si $\mathbb{1}$ est la matrice identité, les vecteurs propres relatifs à

la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & -0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & -0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -4x+2y+z=0 \\ 3x-6y+3z=0 \\ x+4y-4z=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ x+4y-4z=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 3x=2z \\ 6y=5z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}z \\ y=\frac{5}{6}z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ \frac{5}{6}z \\ z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(4+5+6)=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{15}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{5}{15} \\ \frac{6}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que l'archer rate la cible (flèche en dehors) est de $2/5$.