MATH1009 *Chimie et Géologie*

Année académique 2024-2025

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 8 avril 2025 : corrigé

Version 11 mars 2025

Répétition 10 : correction des exercices de révision

1. **Soient les matrices A et B données par**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -i^3 & 0 \\ 1/i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} -i & 2i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

(a) $A + \widetilde{B}$ **(b)** $C = AB$ **(c)** C^{-1}

Les matrices étant carrées et de même dimension, on peut calculer $A + \widetilde{B}$ et $C = AB$. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} i & -2i & i \\ 0 & 1-i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -2i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(C) = -1 \neq 0$, la matrice C^{-1} existe et on a

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & -2 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle inversible ? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse.**

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\pi - \alpha) & \sin(\pi + \alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie, on a $\det(A) = -\cos(2\alpha)$. Donc $\det A \neq 0$ si et seulement si

$$\cos(2\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{-1}{\cos(2\alpha)} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(2\alpha)} \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

3. **La matrice**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

La matrice M possède 3 valeurs propres simples ($-2i$, i et $2i$) ; M est donc diagonalisable. On a, par exemple,

$$\Delta = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2i & -2i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Dans une région agricole, on classe les récoltes de pommes de terre en bonnes, satisfaisantes ou mauvaises. Après une bonne année, les probabilités que l'année suivante soit bonne, satisfaisante ou mauvaise sont respectivement $2/5$, $2/5$ et $1/5$. Après une année satisfaisante, les probabilités d'avoir des récoltes bonnes ou mauvaises sont égales et celle de conserver une récolte satisfaisante est de 0,6. Enfin, après une mauvaise année, les probabilités que l'année suivante soit bonne, satisfaisante ou mauvaise sont respectivement $1/5$, $2/5$ et $2/5$.**

   Quelles sont les prévisions à long terme d'avoir une bonne récolte ? Justifier !

   Soient B_0, M_0 et S_0 respectivement une récolte bonne, mauvaise, satisfaisante au départ et B_1, M_1 et S_1 respectivement le même type de récolte l'année suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ M_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ M_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

   et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

   Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

   Comme $c(1+1+2) = 1 \Leftrightarrow c = 1/4$, le vecteur de probabilité est

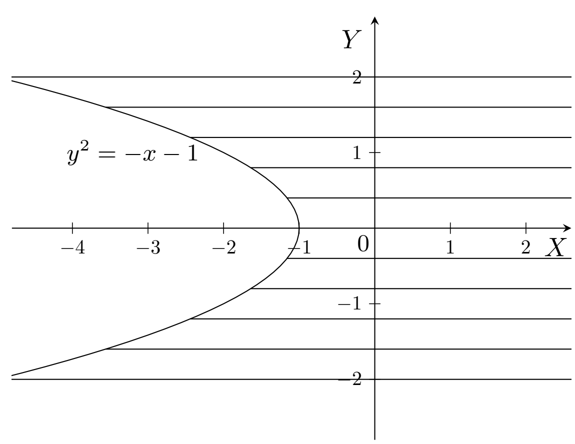
$$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

   et, à long terme, on a une chance sur 4 d'avoir une bonne récolte.

5. **On donne la fonction f par $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(y^2 + x + 1)$.**

   (a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter en le hachurant dans un repère orthonormé.**

   La fonction f est indéfiniment continûment dérivable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x + 1 > 0\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée ci-dessous, les points de la parabole étant exclus.



(b) **Calculer la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable.**
La dérivée de f par rapport à sa deuxième variable est donnée par

$$(D_y f)(x, y) = \frac{2y}{y^2 + x + 1}.$$

(c) **Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que la forme explicite de $F(t) = f(5t^2 - 1, 2t)$ et de sa dérivée en tout point de ce domaine.**
Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\mathbb{R}_0$, la forme explicite de cette fonction est $t \mapsto F(t) = \ln(9t^2)$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = 2/t$.

(d) **Si F est dérivable en 1/6, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.**
La dérivée de F en 1/6 vaut 12.

6. **On donne la fonction f continûment dérivable sur $]0, 2[\times]0, \sqrt{3}[$.**

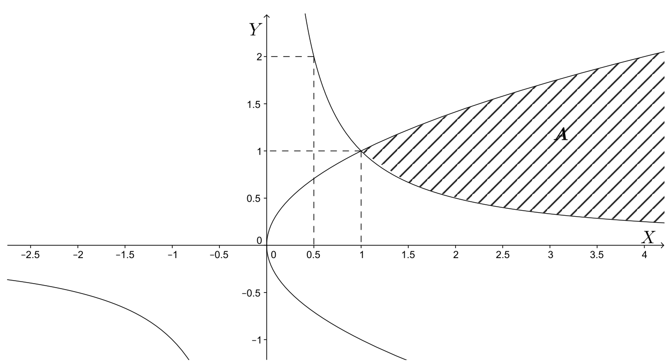
(a) **Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto f(\sqrt{x}, \arctan(2x))$.**
La fonction g est dérivable sur $]0, \pi/6[$.

(b) **Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.**
La dérivée de g est donnée par

$$Dg(x) = (D_1 f)(\sqrt{x}, \arctan(2x)) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + (D_2 f)(\sqrt{x}, \arctan(2x)) \times \left(\frac{2}{1 + 4x^2}\right).$$

(c) **Si g est dérivable en 1, que vaut sa dérivée en ce point ?**
La fonction g n'est pas dérivable en 1 car $1 \notin\ ]0, \pi/6[$.

7. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre est une hyperbole équilatère.**



La parabole a pour équation $y^2 = x$ et l'hyperbole a pour équation $xy = 1$. Leur point d'intersection a pour coordonnées $(1, 1)$.
On a donc la description suivante

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [1/y, +\infty[\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [y^2, +\infty[\right\}.$$