



**LIÈGE université**  
**Sciences**

## **MATH1009 *Chimie et Géologie***

*Année académique 2021-2022*

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES II

RÉVISIONS EN VUE DE L'INTERROGATION DU 19 AVRIL 2022 :  
CORRECTION

---

# RÉPÉTITION 8 : CORRECTION DES EXERCICES DE RÉVISION

1. Soient les matrices  $A$  et  $B$  données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

1)  $A + \tilde{B}$       2)  $C = AB$       3)  $C^{-1}$

Les matrices étant carrées et de même dimension, on peut calculer  $A + \tilde{B}$  et  $C = AB$ . On a

$$A + \tilde{B} = \begin{pmatrix} -2i & -i & i \\ 0 & 2i & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det(C) = -2i \neq 0$ , la matrice  $C^{-1}$  existe et on a

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable? Pourquoi?

Si oui, en déterminer une forme diagonale  $\Delta$  ainsi qu'une matrice inversible  $S$  qui y conduit.

La matrice  $M$  possède 3 valeurs propres simples ( $-i$ ,  $i$  et  $1$ );  $M$  est donc diagonalisable.

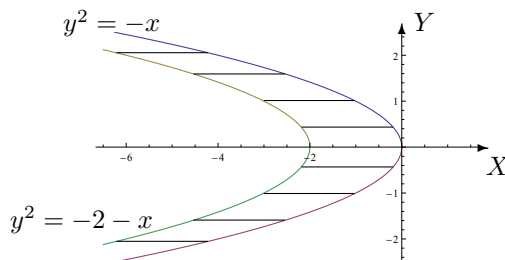
On a, par exemple,  $\Delta = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. On donne la fonction  $f$  par

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcsin(y^2 + x + 1)$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.

La fonction  $f$  est infiniment dérivable sur  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y^2 + x + 1 < 1\}$ . Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points des paraboles étant exclus.



- (b) Calculer la dérivée de  $f$  par rapport à sa deuxième variable.

La dérivée de  $f$  par rapport à sa deuxième variable est donnée par

$$(D_y f)(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (y^2 + x + 1)^2}}.$$

- (c) Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que la forme explicite de  $F(t) = f(5t^2 - 1, 2t)$  et de sa dérivée en tout point de ce domaine.

Le domaine de dérivabilité de  $F$  est l'ensemble  $\left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[$ , la forme explicite de cette fonction est  $t \mapsto F(t) = \arcsin(9t^2)$  et sa dérivée est donnée par  $DF(t) = \frac{18t}{\sqrt{1 - 81t^4}}$ .

- (d) Si  $F$  est dérivable en  $1/6$ , que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.

La dérivée de  $F$  en  $1/6$  vaut  $\frac{4\sqrt{15}}{5}$ .

4. On donne la fonction  $f$  continûment dérivable sur  $]1, 2[ \times ]0, 1[$  et à valeurs strictement positives.

- (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3 - x)))$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $]1, 2[$ .

- (b) Calculer la dérivée de  $g$  en fonction de  $f$  et de ses dérivées partielles.

La dérivée de  $g$  est donnée par

$$Dg(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x}, \ln(3 - x))} \left[ (D_u f)(\sqrt{x}, \ln(3 - x)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + (D_v f)(\sqrt{x}, \ln(3 - x)) \cdot \left( \frac{-1}{3 - x} \right) \right]$$

si  $u$  et  $v$  sont respectivement la première et la deuxième variable de  $f$ .

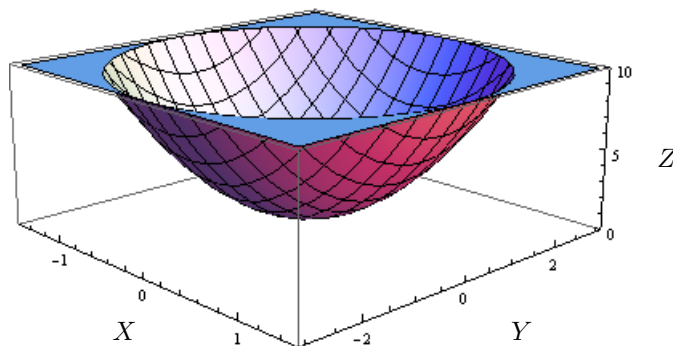
- (c) Si  $g$  est dérivable en  $5/2$ , que vaut sa dérivée en ce point ?

La fonction  $g$  n'est pas dérivable en  $5/2$  car  $5/2 \notin ]1, 2[$ .

5. (a) Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation

$$4x^2 + y^2 - z + 1 = 0.$$

Voici la représentation de cette surface.



(b) Quel est le nom de cette quadrique ?

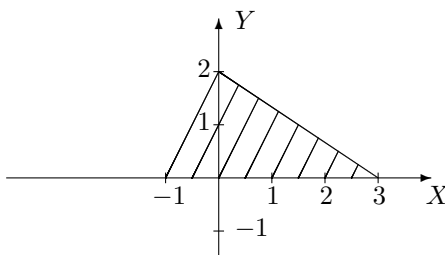
Cette quadrique est un parabolôide elliptique.

(c) Calculer le volume du corps borné par les plans de coordonnées, le plan d'équation  $2x + y = 1$  et la surface donnée ci-dessus.

La fonction  $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + y^2 + 1$  est intégrable sur  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{2}], y \in [0, 1 - 2x]\}$  car elle est continue sur cet ensemble fermé borné et le volume demandé vaut  $\frac{1}{3}$  (de l'unité de volume).

6. On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer

$$\iint_A y e^{y-2x} dx dy.$$



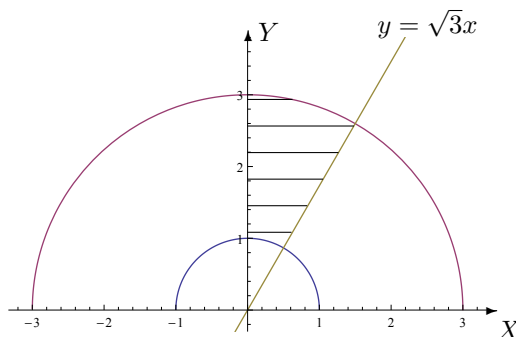
La fonction  $f : (x, y) \mapsto y e^{y-2x}$  est continue sur le fermé borné  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2], x \in [\frac{y-2}{2}, 3 - \frac{3}{2}y]\}$ ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A y e^{y-2x} dx dy = \frac{25e^8 - 1}{32e^6}.$$

7. Calculer, si possible l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{x}{y} dx dy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



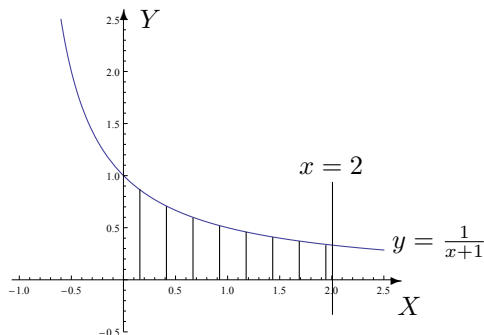
La fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$  est continue sur le fermé borné A; elle est donc intégrable sur cet ensemble et, en passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$\iint_A \frac{x}{y} dx dy = \int_1^3 \left( \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} r \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \right) dr = -4 \ln \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

8. La fonction  $f$  étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si

$$I = \int_0^2 \left( \int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Voici la représentation graphique de l'ensemble d'intégration



En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I = \int_0^{1/3} \left( \int_0^2 f(x, y) dx \right) dy + \int_{1/3}^1 \left( \int_0^{(1/y)-1} f(x, y) dx \right) dy.$$

9. Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 0\}$ . Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.

a)  $\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx \right) dy$     b)  $\int_1^{+\infty} \left( \int_{-x^2}^{-x} \frac{y e^{2x}}{x^2} dy \right) dx$     c)  $\iint_C \sin(x-y) e^x dx dy$

a) La fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2}$  est continue et positive sur l'ensemble d'intégration  $A$  (ensemble hachuré ci-dessous) dont on exclut  $(0, 0)$ . Comme on peut vérifier facilement son intégrabilité après permutation de l'ordre d'intégration, la fonction est donc intégrable sur  $A$  et on a

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} \frac{x^2 y}{(4x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \frac{1 - 2 \operatorname{arctg}(1/2)}{8}.$$

b) La fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{y e^{2x}}{x^2}$  est continue et négative sur l'ensemble d'intégration  $B$  (ensemble hachuré ci-dessous) non borné. En vérifiant son intégrabilité sur  $B$ , on constate qu'elle n'y est pas intégrable.

c) La fonction  $f : (x, y) \mapsto \sin(x-y) e^x$  est continue sur l'ensemble d'intégration  $C$  (ensemble hachuré ci-dessous) non borné fermé. En majorant  $|\sin(x-y)|$  par 1 et en appliquant le critère de comparaison, on prouve que  $f$  est intégrable sur  $C$ . Dès lors, en effectuant l'intégrale, on obtient

$$\iint_C \sin(x-y) e^x dx dy = \int_{-\infty}^0 \left( \int_x^0 \sin(x-y) e^x dy \right) dx = -\frac{1}{2}.$$

