LIÈGE université
Sciences

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2019-2020

Mathématique (partim B) LISTE 5

Version 16 mars 2020

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

I. Dérivation des fonctions composées

Théorie

Pour faire les exercices, il est indispensable de bien connaître les résultats donnant la dérivabilité d'une fonction composée ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en termes des dérivées partielles des fonctions qui interviennent dans sa définition.

Rappels de théorie (on ne travaille qu'avec des variables réelles)

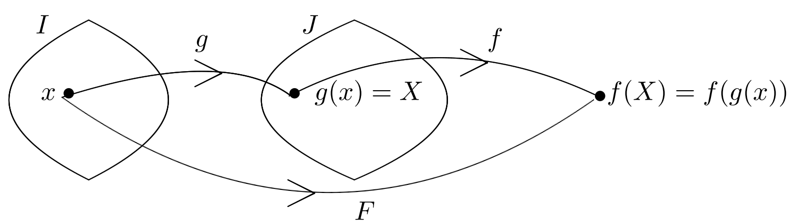
Comparons le théorème de dérivation des fonctions composées lorsqu'on ne travaille qu'avec une seule variable ou plusieurs et observons les similitudes.

(a) Fonction d'**une** variable. Soient
- f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$
- g une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ tel que $g(x) \in J$ quel que soit $x \in I$

Alors la fonction $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),\ x \in I$ est dérivable sur I et on a

$$(DF)(x) = D(f \circ g)(x) \ = \ (Df)(g(x))\ .\ Dg(x).$$

Le dessin ci-dessous explique comment est construite la fonction $F = f \circ g$.



La formule de dérivation est obtenue en effectuant le produit de la dérivée de la fonction f (la plus à droite sur le dessin) et de la dérivée de la fonction g.

(b) Fonctions de plusieurs variables (plusieurs cas possibles). Soient
- f une fonction de 2 variables continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$
- $f_1,\ f_2$ deux fonctions de 2 variables dérivables sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$(f_1(x,y), f_2(x,y)) \in U \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in \Omega.$$

Alors, la fonction $F : (x,y) \mapsto f(f_1(x,y), f_2(x,y))$ est dérivable sur Ω et on a

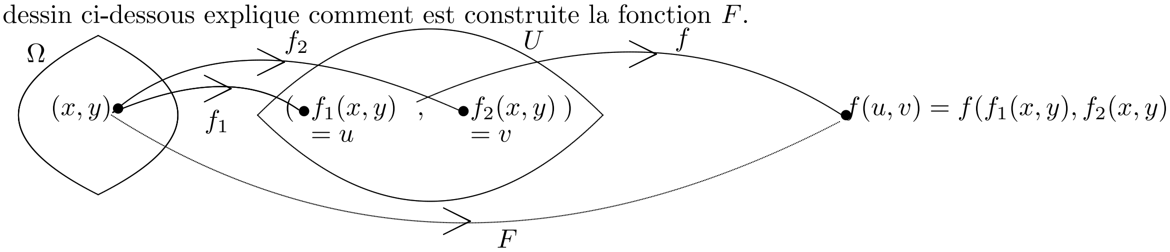
$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(f_1(x,y), f_2(x,y))\ (D_xf_1)(x,y) + (D_vf)(f_1(x,y), f_2(x,y))\ (D_xf_2)(x,y)$$

et

$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(f_1(x,y), f_2(x,y))\ (D_yf_1)(x,y) + (D_vf)(f_1(x,y), f_2(x,y))\ (D_yf_2)(x,y)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

Le dessin ci-dessous explique comment est construite la fonction F.



L'expression de chaque dérivée partielle de F s'obtient en effectuant une somme de deux termes. Par exemple, la dérivée de F par rapport à *sa première variable* est la somme du produit de la dérivée de f

par rapport à sa première variable par la dérivée de f_1 par rapport à *sa première variable* et du produit de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable par la dérivée de f_2 par rapport à *sa première variable*.
Remarque : si f est une fonction d'une seule variable, il suffit qu'elle soit dérivable (et non continûment dérivable).

Exercices

2 **On donne une fonction g, continûment dérivable sur**

$$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right[\times]0,+\infty[\times\left]0,\frac{10}{9}\right[$$

a) Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction

$$f : t \mapsto g\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right)$$

b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $1/3$?

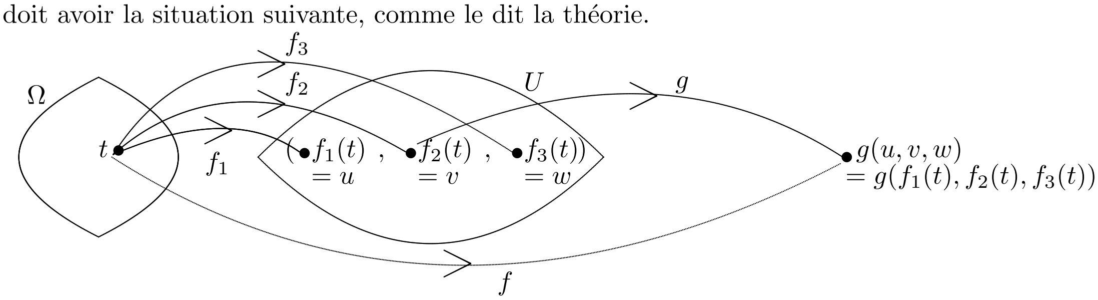
Solution Notons Ω le domaine de dérivabilité de f et recherchons-le !
En définissant

$$f_1 : t \mapsto \arcsin(2t), \quad f_2 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+1}}, \quad f_3 : t \mapsto t^2+1$$

et en notant U le domaine donné au départ c'est-à-dire

$$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right[\times]0,+\infty[\times\left]0,\frac{10}{9}\right[$$

on doit avoir la situation suivante, comme le dit la théorie.



a) Voyons ainsi tout d'abord sur quel intervalle ouvert I les fonctions $f_1,\ f_2,\ f_3$ sont simultanément dérivables. Vu leurs expressions explicites, on a

$$I = \{t \in \mathbb{R} : -1 < 2t < 1,\ t+1 > 0\} = \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$$

Ensuite, réduisons éventuellement cet intervalle pour que le triplet $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ appartiennent à l'ensemble U. On obtiendra alors Ω.
On doit ainsi avoir à la fois

$$(1)\ -\pi/2 < \arcsin(2t) < \pi/6, \quad (2)\ 1/\sqrt{t+1} > 0 \quad \text{et} \quad (3)\ 0 < t^2+1 < 10/9.$$

Cherchons donc pour quelles valeurs de $t \in I$ ces conditions sont réalisées. On a successivement

$$-\pi/2 < \arcsin(2t) < \pi/6 \Leftrightarrow -1 < 2t < 1/2 \Leftrightarrow -1/2 < t < 1/4$$

pour(1), puis

$$1/\sqrt{t+1} > 0 \quad \text{condition toujours réalisée lorsque } t \in I$$

pour (2) et enfin

$$0 < t^2+1 < 10/9 \Leftrightarrow t^2 - 1/9 < 0 \Leftrightarrow -1/3 < t < 1/3$$

pour (3). Les 3 conditions sont donc réalisées si et seulement si

$$t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right[\bigcap \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\; = \; \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right[;$$

comme cet intervalle est inclus dans $I =]-1/2, 1/2[$, on a

$$\Omega = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right[$$

et f est donc dérivable sur Ω.
b) Sur Ω, la dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned}
Df(t) = (D_u g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, Df_1(t) & \\
+(D_v g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, Df_2(t) + (D_w g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, Df_3(t) & \\
= \quad (D_u g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, D\arcsin(2t) & \\
+(D_v g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, D\frac{1}{\sqrt{t+1}} + (D_w g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, D(t^2+1) & \\
= \quad (D_u g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, \frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} + (D_v g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, \frac{-1}{2\sqrt{(t+1)^3}} & \\
+(D_w g)\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big) \,.\, 2t &
\end{aligned}$$

avec

$$f_1(t) = \arcsin(2t), \quad f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}, \quad f_3(t) = t^2+1$$

où u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.
c) Comme 0 appartient bien au domaine de dérivabilité de f, la dérivée de f en 0 est donnée par

$$(Df)(0) = (D_u g)(0,1,1).2 + (D_v g)(0,1,1).(-1/2);$$

enfin f n'est pas dérivable en $1/3$ puisque ce réel n'appartient pas à Ω.

4 **Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(1,0)$ si**

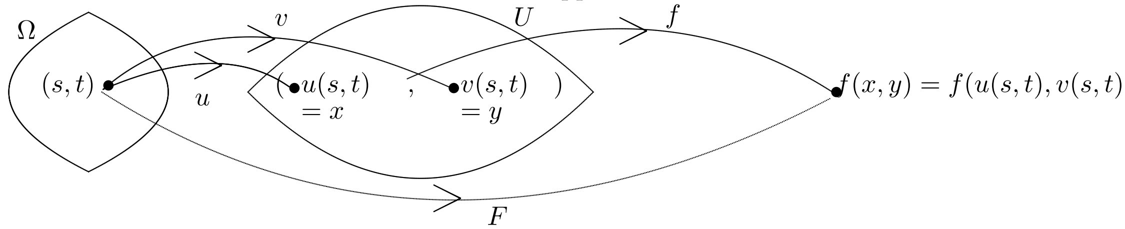
$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$

$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

et $(D_u f)(2,3) = -1$ et $(D_v f)(2,3) = 10$, calculer $(D_s F)(1,0)$ et $(D_t F)(1,0)$.

Solution

La fonction F est construite comme ci-dessous et supposée dérivable sur Ω.



Puisque les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées sont satisfaites, on a

$$(D_sF)(s,t) = (D_xf)(u(s,t),v(s,t))\ .\ (D_su)(s,t) + (D_yf)(u(s,t),v(s,t))\ .\ (D_sv)(s,t)$$

et

$$(D_tF)(s,t) = (D_xf)(u(s,t),v(s,t))\ .\ (D_tu)(s,t) + (D_yf)(u(s,t),v(s,t))\ .\ (D_tv)(s,t)$$

si x et y sont respectivement les première et deuxième variables de f.
Dès lors,

$$\begin{aligned}(D_sF)(1,0) &= (D_xf)(u(1,0),v(1,0))\ .\ (D_su)(1,0) + (D_yf)(u(1,0),v(1,0))\ .\ (D_sv)(1,0)\\ &= (D_xf)(2,3)\ .\ (-2) + (D_yf)(2,3)\ .\ 5\\ &= (-1)\ .(-2) + 10\ .\ 5 = 52\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(D_tF)(1,0) &= (D_xf)(2,3).(D_tu)(1,0) + (D_yf)(2,3).(D_tv)(1,0)\\ &= (-1)\ .\ 6 + 10\ .\ 4\\ &= = 34.\end{aligned}$$

II. Permutation de l'ordre d'intégration

Rappelons et insistons fortement sur les trois points suivants

(a) Ce n'est pas parce qu'on peut permuter l'ordre d'intégration qu'on trouve toujours la même valeur pour l'intégrale **MAIS** si la fonction est intégrable alors on obtient la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration.
(b) Permuter l'ordre d'intégration **NE CONSISTE PAS** à permuter les signes d'intégrale sans modifier les bornes d'intégration ; très généralement les bornes changent.
(c) Dans le cas d'une intégrale double, les bornes de l'intégrale qui se trouve ≪ à l'intérieur ≫ ou entre les parenthèses sont soit des constantes, soit dépendent de la variable de l'autre intégrale mais **JAMAIS** de la variable sur laquelle on intègre ≪ à l'intérieur ≫.

Exercice

1. **Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans le cas suivant**

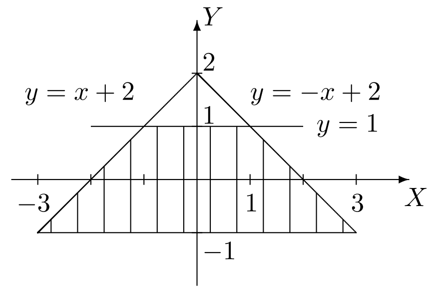
$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx \right)\ dy \qquad .$$

Solution

a) L'ensemble d'intégration est

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1],\ x \in [y-2, 2-y]\}$$

et sa représentation graphique est la suivante (partie hachurée, bords compris)



On peut aussi décrire cet ensemble sous la forme

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3,-1],\ y \in [-1, x+2]\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y \in [-1,1]\} \\ &\quad \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,3],\ y \in [-1, 2-x]\}. \end{aligned}$$

Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit donc

$$\int_{-3}^{-1} \left(\int_{-1}^{x+2} f(x,y)\ dy \right) dx + \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy \right) dx + \int_{1}^{3} \left(\int_{-1}^{-x+2} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Processus de calcul

(1) Vérifier l'intégrabilité de la fonction donnée et pour cela, déterminer sur quel ensemble la fonction est continue.
- Si l'ensemble d'intégration est un ensemble fermé borné inclus dans le domaine de continuité, alors la fonction est intégrable.
- Si l'ensemble d'intégration n'est pas fermé et/ou borné, on doit étudier l'intégrabilité de la fonction (voir liste 6).

(2) Choisir l'ordre d'intégration (permuter éventuellement l'ordre d'intégration donné ; on obtiendra le même résultat puisque la fontion est intégrable vu (1)).
Le choix dépend
- de la fonction à intégrer : l'intégration est parfois plus simple dans un ordre que dans l'autre
- de l'ensemble d'intégration : mieux vaut une seule intégrale double que plusieurs . . . mais mieux vaut plusieurs intégrales simples à calculer qu'une seule particulièrement difficile.

Exercices

2 **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$

Solution

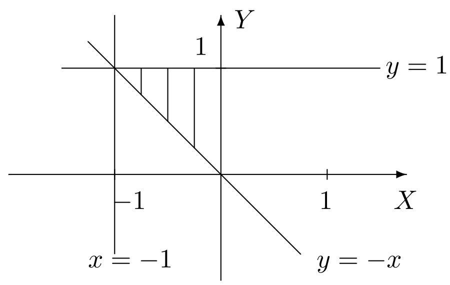
La fonction $f : (x,y) \mapsto \cos(y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble fermé borné. La fonction f est donc intégrable sur A. Vu l'expression donnée pour A, on pourrait vouloir calculer

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{-x}^{1} \cos(y^2)\ dy \right)\ dx.$$

L'intégrale

$$\int_{-x}^{1} \cos(y^2)\ dy$$

n'étant pas calculable directement, voyons si le calcul ne serait pas plus facile après permutation de l'ordre d'intégration ; la fonction étant intégrable, on obtiendra le même résultat.
La représentation graphique de A est la suivante (partie hachurée, bords compris)



On a donc aussi

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [-y,0]\}$$

et on peut écrire l'intégrale comme suit

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{-y}^{0} \cos(y^2)\ dx \right)\ dy,$$

ce qui est simple à calculer. En effet, on a

$$\int_{-y}^{0} \cos(y^2)\ dx \ = \ \cos(y^2)[x]_{-y}^{0} = y\cos(y^2)$$

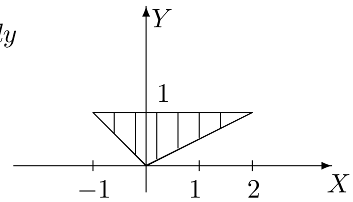
donc

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \left(\int_{-y}^{0} \cos(y^2)\ dx \right)\ dy &= \int_{0}^{1} y\cos(y^2)\ dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} Dy^2\cos(y^2)\ dy \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin(y^2)\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\sin(1).
\end{aligned}$$

3 **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans le cas suivant**

b)

$$\int\int_A xy\ dx\, dy$$



Solution

La fonction $f:(x,y)\mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble A fermé borné ; elle est donc intégrable sur cet ensemble.
Intégrer d'abord par rapport à x puis par rapport à y ou le contraire semble sans importance si on regarde l'expression de la fonction $f:(x,y)\mapsto xy$. La description de l'ensemble pourrait alors guider notre choix.
Voyons comment décrire analytiquement l'ensemble A d'intégration. Cet ensemble est limité par les droites d'équation cartésienne $y=-x,\ y=1$ et $y=x/2$. Ainsi, on a

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-1,0],\ y\in[-x,1]\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2],\ y\in[x/2,1]\}$$

et aussi

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1],\ x\in[-y,2y]\}.$$

D'une part, on aurait à calculer

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{1} xy\ dy\right)\ dx+\int_{0}^{2}\left(\int_{x/2}^{1} xy\ dy\right)\ dx$$

et d'autre part,

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{-y}^{2y} xy\ dx\right)\ dy.$$

Il est clair qu'il est plus rapide de calculer l'intégrale sous la forme

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{-y}^{2y} xy\ dx\right)\ dy.$$

Comme

$$I\int_{-y}^{2y} xy\ dx=\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{-y}^{2y}=2y^3-\frac{y^3}{2}=\frac{3y^3}{2},$$

on obtient

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{-y}^{2y} xy\ dx\right)\ dy\ =\ \frac{3}{2}\int_{0}^{1} y^3\ dy=\frac{3}{2}\ \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{8}.$$