Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2021-2022

Corrigé de l'examen du 13 juin 2022
Chimistes bloc 1 et géologues bloc 2

Version 12 mai 2022

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}\ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction f explicitement par

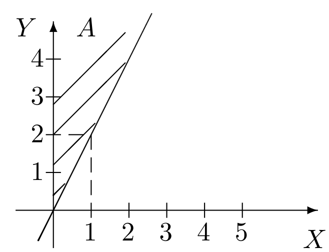
$$f(x,y) = \arccos(1-2xy).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y)$$

3. On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A e^{x-2y}\ dx\ dy.$$



4. On donne l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9, -y \leq x \leq y\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_E \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\ dx\ dy$$

5. (a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\pi+\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M soit inversible.
(2) Déterminer les valeurs propres de M ; pour quelles valeurs de α a-t-on une valeur propre double ?
(3) Si $\alpha = 7\pi/4$ et si, dans ce cas, M est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

(b) Au goûter dans un internat, les enfants peuvent choisir de manger soit une crêpe, soit du riz au lait, soit une gaufre. Un même jour, ils ne peuvent choisir qu'un seul type de goûter mais, le jour suivant, ils peuvent modifier leur choix s'ils le souhaitent. Jamais un enfant ne rate ce repas !

Le cuisinier observe un enfant et constate que s'il a mangé une crêpe un jour il en mangera encore une le lendemain dans 1 cas sur 2 ; sinon il mangera du riz au lait ou une gaufre de façon équiprobable. S'il a mangé du riz au lait un jour, il en mangera à nouveau le lendemain avec une probabilité de 70 % ; sinon il mangera une crêpe 1 fois sur 5 ou une gaufre 1 fois sur 10.

S'il a mangé une gaufre, au goûter suivant il y a 2 chances sur 5 qu'il mange une crêpe, 1 chance sur 5 qu'il mange du riz au lait et 2 chances sur 5 qu'il mange à nouveau une gaufre.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant mange une gaufre ?

6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.

$$(a)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(2m)!}{m^2} \qquad (b)\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j(j+2)} \qquad (c)\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(3\ln(2))^m}{m!}$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}\ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{aligned}
Df(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\\
D^2f(x) &= (1+x^2)^{-1/2}+x\,(-1/2)\,(1+x^2)^{-3/2}\,2x\\
&= (1+x^2)^{-3/2}\,(1+x^2-x^2)\\
&= \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\ ,\\
D^3f(x) &= (-3/2)\,(1+x^2)^{-5/2}\,2x\\
&= \frac{-3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.
\end{aligned}$$

Comme $f(0)=1$, $Df(0)=0$ et $D^2f(0)=1$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= f(0)+Df(0)x \ =\ 1,\\
P_2(x) &= f(0)+Df(0)x+D^2f(0)\frac{x^2}{2}\ =\ 1+\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned}
R_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{(1+u_1^2)^3}}.\ \frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2\sqrt{(1+u_1^2)^3}}\ ,\\
R_2(x) &= \frac{-3u_2}{\sqrt{(1+u_2^2)^5}}.\ \frac{x^3}{3!}=\frac{-u_2\,x^3}{2\sqrt{(1+u_2^2)^5}},\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

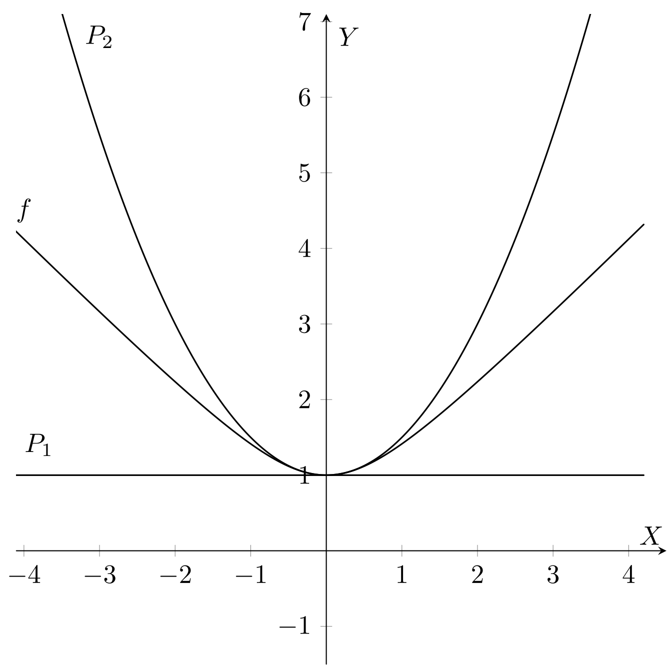
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.

Solution. Considérons les expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est toujours positif. Dès lors le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe de $-u_2x$. Comme u_2 est situé entre 0 et x, au voisinage de 0, si $x < 0$ alors $u_2 < 0$ et $-u_2x < 0$; par contre si $x > 0$ alors $u_2 > 0$ et $-u_2x < 0$ Par conséquent, $R_2(x) < 0$, $\forall x$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x, y) = \arccos(1 - 2xy).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

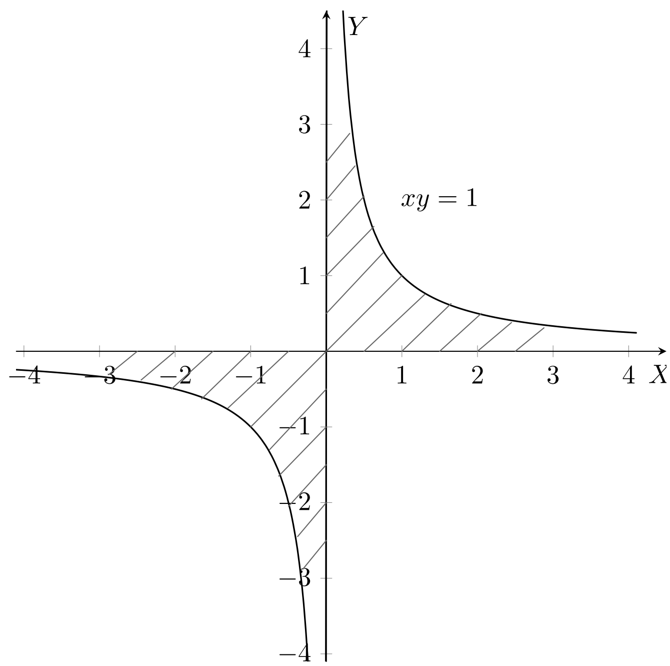
$$xD_xf(x, y) - yD_yf(x, y)$$

Solution.

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < 1-2xy < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < -2xy < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan ci-dessous, les points de la courbe et des axes exclus.

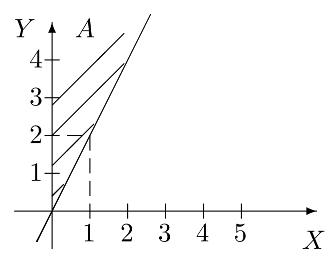


(c) En tout point de A, on a

$$\begin{aligned} xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y) &= x\frac{-1}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}}\ (-2y)\ - y\frac{-1}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}}\ (-2x) \\ &= \frac{2xy}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}} - \frac{2xy}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. **On donne l'ensemble hachuré A ci-contre.**
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A e^{x-2y}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x-2y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [0, y/2]\}$$

puisque la droite représentée (différente des axes) a pour équation cartésienne $y = 2x$.
Puisque A est un ensemble non borné fermé, étudions l'intégrabilité de f sur cet ensemble sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$.
Pour y fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto e^{x-2y} = e^x\ e^{-2y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[0, y/2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\begin{aligned} \int_0^{y/2} e^x\ e^{-2y}\ dx &= e^{-2y}\ \Big[\ e^x\ \Big]_0^{y/2} \\ &= e^{-2y}\ (e^{y/2} - 1) \\ &= e^{-3y/2}\ -\ e^{-2y}. \end{aligned}$$

La fonction $h : y \mapsto e^{-3y/2}\ -\ e^{-2y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives lorsque y est positif. Elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ si

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t (e^{-3y/2}\ -\ e^{-2y})\ dy$$

est finie. Dans ce cas, la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x-2y}$ sera intégrable sur A et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de f sur I.
Cela étant, quel que soit $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t (e^{-3y/2} - e^{-2y})\ dy &= \left[-\frac{2}{3}\ e^{-3y/2} + \frac{1}{2}\ e^{-2y} \right]_0^t \\
&= \left(-\frac{2}{3}\ e^{-3t/2} + \frac{1}{2}\ e^{-2t} \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
&= -\frac{2}{3}\ e^{-3t/2} + \frac{1}{2}\ e^{-2t} + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0$, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t (e^{-3y/2} - e^{-2y})\ dy = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\ e^{-3t/2} + \frac{1}{2}\ e^{-2t} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

et l'intégrale de la fonction f sur A vaut donc $1/6$.

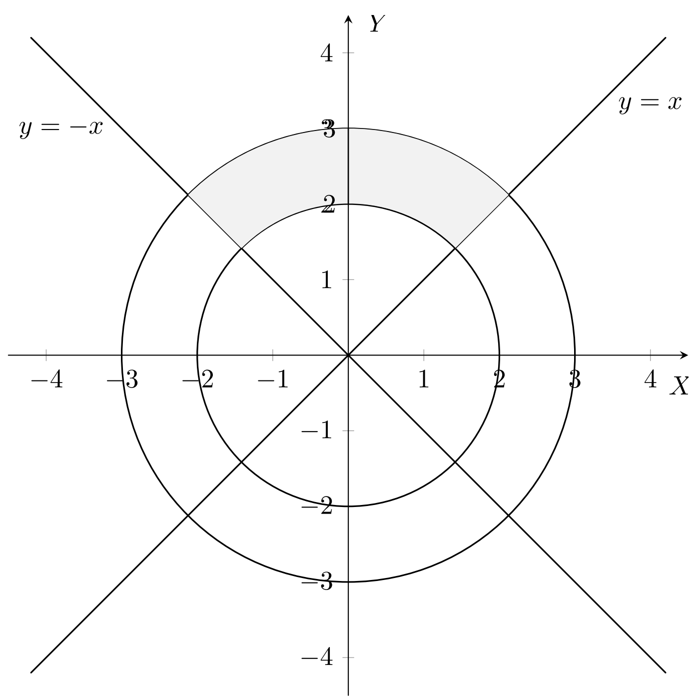
4. **On donne l'ensemble**

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ -y \le x \le y\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_E \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\ dx\ dy$$

Solution. (a) Voici la représentation graphique (partie coloriée du plan, bords compris) de l'ensemble E.



(b) La fonction $f : (x,y) \mapsto 2/\sqrt{x^2+y^2-1}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1 > 0\}$ donc sur l'ensemble E fermé borné ; elle est donc intégrable sur E.

En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration E', en bijection avec l'ensemble E, s'écrit $E' = \{(r,\theta) : r \in [2,3], \theta \in [\pi/4, 3\pi/4]\}$ et la fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{2}{\sqrt{r^2-1}}$$

multipliée par le jacobien r. L'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{2r}{\sqrt{r^2-1}}\, d\theta \right) dr \\
&= \left(\int_2^3 \frac{2r}{\sqrt{r^2-1}}\, dr \right) \times \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \right) \\
&= \left[2\sqrt{r^2-1} \right]_2^3 \times \left[\theta \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\
&= 2\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right) \times \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= 2\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) \times \frac{\pi}{2} \\
&= \pi\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\pi+\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M soit inversible.
(2) Déterminer les valeurs propres de M ; pour quelles valeurs de α a-t-on une valeur propre double ?
(3) Si $\alpha = 7\pi/4$ et si, dans ce cas, M est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Solution. (1) La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie, on a

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\
&= \cos(2\alpha).
\end{aligned}$$

Donc $\det M \neq 0$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(2) Les valeurs propres de M sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\lambda \mapsto \det(M - \lambda \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha)-\lambda & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\cos(\alpha)-\lambda)^2 - \sin^2(\alpha) \\
&= (\cos(\alpha)-\lambda-\sin(\alpha))\,(\cos(\alpha)-\lambda+\sin(\alpha))
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc $\cos(\alpha)-\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)+\sin(\alpha)$.

On a une valeur propre double si et seulement si $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$ ce qui est équivalent à $\sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(3) Si $\alpha = 7\pi/4$ alors les valeurs propres $\cos(7\pi/4) - \sin(7\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$ et $\cos(7\pi/4) + \sin(7\pi/4) = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 = 0$ sont des valeurs propres simples. Dès lors, la matrice M est diagonalisable.
Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M - \sqrt{2}\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M - \sqrt{2}\,\mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}$ sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $MX = 0$. On a

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ est telle que } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Au goûter dans un internat, les enfants peuvent choisir de manger soit une crêpe, soit du riz au lait, soit une gaufre. Un même jour, ils ne peuvent choisir qu'un seul type de goûter mais, le jour suivant, ils peuvent modifier leur choix s'ils le souhaitent. Jamais un enfant ne rate ce repas !
Le cuisinier observe un enfant et constate que s'il a mangé une crêpe un jour il en mangera encore une le lendemain dans 1 cas sur 2 ; sinon il mangera du riz au lait ou une gaufre de façon équiprobable.
S'il a mangé du riz au lait un jour, il en mangera à nouveau le lendemain avec une probabilité de 70 % ; sinon il mangera une crêpe 1 fois sur 5 ou une gaufre 1 fois sur 10.
S'il a mangé une gaufre, au goûter suivant il y a 2 chances sur 5 qu'il mange une crêpe, 1 chance sur 5 qu'il mange du riz au lait et 2 chances sur 5 qu'il mange à nouveau une gaufre.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant mange une gaufre ?

Solution.
(1) Soient C_0, G_0 et R_0 les situations initiales respectives « manger une crêpe », « manger une

gaufre ≫ et ≪ manger du riz au lait ≫; soient C_1, G_1 et R_1 , ces mêmes situations au goûter du lendemain. On a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ G_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,25 & 0,4 & 0,1 \\ 0,25 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ G_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,25 & 0,4 & 0,1 \\ 0,25 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que $(T - \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$\begin{aligned}
(T - \mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,25 & -0,6 & 0,1 \\ 0,25 & 0,2 & -0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5x + 4y + 2z = 0 \\ 25x - 60y + 10z = 0 \\ 25x + 20y - 30z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = 4y + 2z \\ -2y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = 8y \\ z = 2y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = (8/5)\ y \\ z = 2y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (8/5)\ y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c\ (8 + 5 + 10) = 1 \Leftrightarrow c = 1/23$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} 8/23 \\ 5/23 \\ 10/23 \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que l'enfant mange une gaufre est de 5/23.

6. **Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.**

$$(a) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2m)!}{m^2} \qquad (b) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+2)} \qquad (c) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(3\ln(2))^m}{m!}$$

Solution.

(a) Comme le terme général

$$\frac{(2m)!}{m^2} = \frac{1\ .\ 2 \ldots (m-1)m(m+1) \ldots (2m-1)2m}{m^2} = 1\ .\ 2 \ldots (m-1)(m+1) \ldots (2m-1)2$$

ne tend pas vers 0 quand m tend vers $+\infty$, la série diverge.

NB : on pourrait aussi remarquer que le terme général de la série donnée est tel que

$$\frac{(2m)!}{m^2} \geq \frac{1}{m}.$$

Comme $1/m$ est le terme général de la série harmonique qui est une série divergente, la série donnée diverge aussi par le critère de comparaison.

(b) Considérons les sommes partielles

$$S_M = \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{j(j+2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2}\right), \; M \in \mathbb{N}_0.$$

Comme

$$S_M = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{j+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{j} - \sum_{j=3}^{M+2} \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{M+1} - \frac{1}{M+2}\right),$$

par définition des séries on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+2)} &= \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{j(j+2)} \\
&= \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{M+1} - \frac{1}{M+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{M+1}\right) - \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{M++2}\right)\right) \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

La série est donc convergente et sa somme vaut $3/4$.

(c) Vu la définition de l'exponentielle, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(3\ln(2))^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln(2^3))^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln(8))^m}{m!} = \exp(\ln(8)) = 8$$

puisque les fonctions exponentielle et logarithme sont inverses l'une de l'autre.