1, 2, 3... Sciences

Année académique 2017-2018

Questionnaire et Corrigé
Examen de mathématiques générales B du 22 mai 2018
Chimistes et physiciens (bloc1) - geologues (bloc2)

Version 17 mai 2018

QUESTIONNAIRE

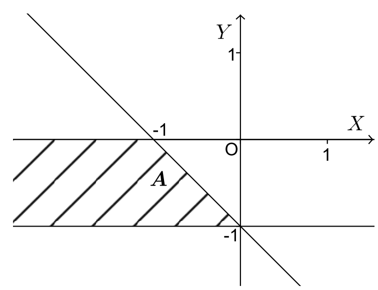
1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln(1-xy)$.
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est infiniment dérivable.
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.
   (c) Calculer l'expression $D_x^2 f(x,y)$.
   (d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(1+t, 1-t)$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \cos(x)\ e^{-x}.$$
   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1 et 2 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de l'approximation à l'ordre 1.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

3. On donne
$$I \ = \ \int_0^2 \left(\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy \right)\ dx.$$
   (a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

   (b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant les démarche et réponse.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1-y^2}{x^2}$. Si c'est possible, calculer
$$I = \iint_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



5. (a) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} b & -a & 1 \\ -a & b & -1 \\ b & b & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}.$$
   Pour quelle(s) valeurs de a et b est-elle inversible ? Justifier. Calculer alors $(A^{-1})_{32}$.

   (b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) La série suivante est-elle convergente ? Justifier.
$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m+2}{m^2-1}$$

(b) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme.

$$\sum_{j=2}^{+\infty} 3^{\frac{1-j}{2}}$$

7. Dans une région agricole, on classe les récoltes de pommes de terre en bonnes, satisfaisantes ou mauvaises. Après une bonne année, les probabilités que l'année suivante soit bonne, satisfaisante ou mauvaise sont respectivement 2/5, 2/5 et 1/5. Après une année satisfaisante, les probabilités d'avoir des récoltes bonnes ou mauvaises sont égales et celle de conserver une récolte satisfaisante est de 0,6. Enfin, après une mauvaise année, les probabilités que l'année suivante soit bonne, satisfaisante ou mauvaise sont respectivement 1/5, 2/5 et 2/5.

   Quelles sont les prévisions à long terme pour avoir une bonne récolte ? Justifier !

8. Pour les physiciens uniquement
   (a) Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1.$$

   On note $\mathcal{C}$ la partie de cette ellipse située dans le premier quadrant et $\mathcal{S}$ la surface délimitée par $\mathcal{C}$ et les axes de coordonnées.

   1. Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la surface $\mathcal{S}$ dans un repère orthonormé.
   2. Calculer les intégrales suivantes.

$$(1) \int_{\mathcal{C}} xy \; ds \qquad\qquad (2) \int_{\mathcal{C}} xy \; dx \qquad\qquad (3) \iint_{\mathcal{S}} d\sigma$$

   3. Pour chacune des intégrales (1) et (2), obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de $\mathcal{C}$?
   4. Que représente l'intégrale (3) ?

   (b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$xDf(x) - f(x) - x\cos(\ln(x)) = 0$$

   satisfaisant la condition $f(1) = 0$. Préciser le plus grand intervalle sur lequel elle est valable.

CORRIGÉ

Exercices

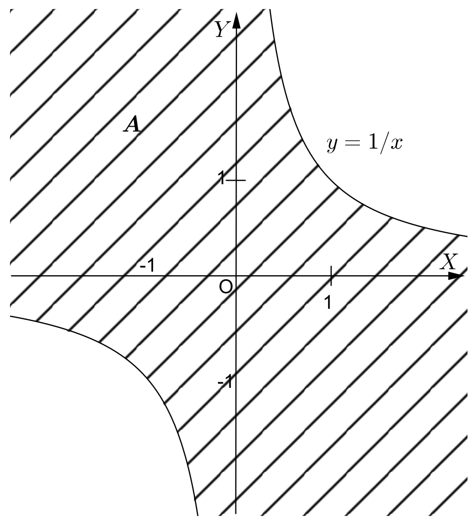
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln(1-xy)$.**
(a) Déterminer le domaine où la fonction est infiniment dérivable.

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur l'ensemble A décrit par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - xy > 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\right\}.$$

(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble A (partie hachurée) : les points de l'hyperbole d'équation cartésienne $xy = 1$ sont exclus de l'ensemble.



(c) Calculer l'expression $D_x^2 f(x,y)$.

Solution. En un point de A, on a

$$D_x f(x,y) = D_x\left(\ln(1-xy)\right) = \frac{-y}{1-xy}$$

et

$$D_x^2 f(x,y) = D_x\left(\frac{-y}{1-xy}\right) = \frac{-y^2}{(1-xy)^2}\ .$$

(d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(1+t, 1-t)$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

Solution. L'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(1+t, 1-t)$ est donnée par

$$F(t) = \ln(1 - (1+t)(1-t)) = \ln(t^2).$$

La fonction F est dérivable sur $\{t \in \mathbb{R} : t^2 > 0\} = \mathbb{R}_0$ et on y a

$$DF(t) = \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t}.$$

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \cos(x)\ e^{-x}.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Dès lors, les approximations demandées sont envisageables. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} = -e^{-x}\left(\sin(x) + \cos(x)\right),$$

$$D^2f(x) = e^{-x}\left(\sin(x) + \cos(x)\right) - e^{-x}\left(\cos(x) - \sin(x)\right) = 2e^{-x}\sin(x).$$

Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = -1$ et $D^2f(0) = 0$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_0(x) = f(0) = 1 \quad , \quad P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1 - x \quad \text{et} \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}.$$

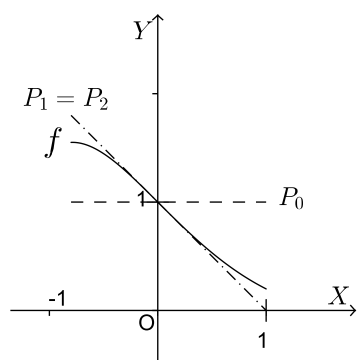
(b) Donner une expression explicite du reste de l'approximation à l'ordre 1.

Solution. Si on note R_1 le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre 1 en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u strictement compris entre 0 et x tel que

$$R_1(x) = 2e^{-u}\sin(u)\ \frac{x^2}{2!} = e^{-u}\sin(u)\ x^2.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution. Comme $R_1(x) \leq 0\ \forall x \in]-\pi/2, 0[$ et $R_1(x) \geq 0\ \forall x \in]0, \pi/2[$, le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1 à gauche de 0 et au-dessus de celui de P_1 à droite de 0.
Voici la représentation graphique de $P_0, P_1,\ P_2$ et f au voisinage de 0.

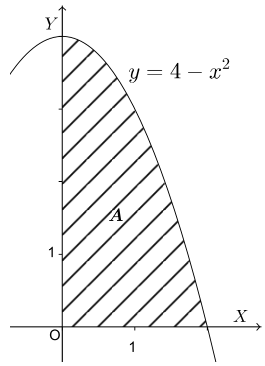


3. **On donne**

$$I \ = \ \int_0^2 \left(\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy \right)\ dx.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A.



(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant les démarche et réponse.

Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xe^{2y}}{4-y}$ est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 4\}$ donc sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 4[\ ,\ x \in [0, \sqrt{4-y}\ ]\}$, ensemble borné mais non fermé.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que f est positif sur A.
Pour y fixé dans $[0, 4[$, la fonction $g : x \mapsto \left|\dfrac{xe^{2y}}{4-y}\right| = \dfrac{xe^{2y}}{4-y}$ est continue sur le fermé borné $[0, \sqrt{4-y}\ ]$. Elle y est donc intégrable et on a

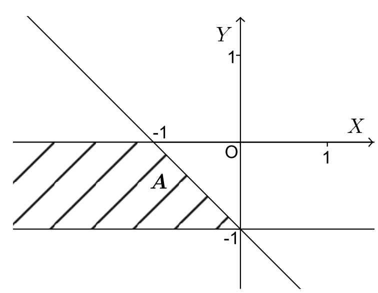
$$\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dx = \frac{e^{2y}}{4-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y}} = \frac{e^{2y}}{4-y}\ \frac{4-y}{2} = \frac{e^{2y}}{2}.$$

Considérons $h : y \mapsto \dfrac{e^{2y}}{2}$, fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 4]$; cette fonction est donc intégrable sur $[0, 4]$ et dès lors f est intégrable sur A.
Ainsi, puisque la fonction f est positive sur A, on a

$$I \ = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dx\right)\ dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2}\ dy = \frac{1}{4}\left[e^{2y}\right]_0^4 = \frac{e^8-1}{4}.$$

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1-y^2}{x^2}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \iint_A f(x, y)\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1-y^2}{x^2}$ est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ donc sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-1, 0]\ ,\ x \in]-\infty, -y-1]\}$, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour y fixé dans $]-1, 0]$, la fonction $g : x \mapsto \left|\dfrac{1-y^2}{x^2}\right| = \dfrac{1-y^2}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$, donc sur $]-\infty, -y-1]$ fermé non borné. Vérifions son intégrabilité en $-\infty$. Soit $t < -1$, on a

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^{-y-1}(1-y^2)\frac{1}{x^2}\ dx = (1-y^2)\lim_{t\to-\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_t^{-y-1} = (1-y^2)\left(\frac{1}{y+1} + \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t}\right) = 1-y.$$

Comme cette limite est finie, g est intégrable en $-\infty$ donc sur $]-\infty, -y-1]$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $1-y$.

Considérons $h : y \mapsto 1-y$, fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle fermé borné $[-1,0]$; cette fonction est donc intégrable sur $[-1,0]$; dès lors f est intégrable sur A.

Ainsi, puisque la fonction f est positive sur A, on a

$$I = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-\infty}^{-y-1} \frac{1-y^2}{x^2}\, dx \right) dy = \int_{-1}^{0} (1-y)\, dy = \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{0} = -\left(-1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} b & -a & 1 \\ -a & b & -1 \\ b & b & 2 \end{pmatrix} \textbf{ avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

Pour quelle(s) valeurs de a et b est-elle inversible ? Justifier. Calculer alors $(A^{-1})_{32}$.

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. En remplaçant la première ligne par la somme des trois lignes en appliquant la propriété de linéarité, puis en retirant de la première colonne la deuxième, l'application de la première loi des mineurs à la première colonne donne finalement la valeur du déterminant. On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} b & -a & 1 \\ -a & b & -1 \\ b & b & 2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2b-a & 2b-a & 2 \\ -a & b & -1 \\ b & b & 2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2b-a & 2 \\ -a-b & b & -1 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix} \\ &= (a+b)(4b-2a-2b) \\ &= (a+b)(2b-2a) \\ &= 2(a+b)(b-a). \end{aligned}$$

Dès lors, la matrice A est inversible si et seulement si $a \neq -b$ et $a \neq b$.

Dans ce cas, l'élément $(A^{-1})_{32}$ peut être calculé et vaut

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{32} &= \frac{1}{2(a+b)(b-a)} \, (\mathcal{A})_{23} \\ &= \frac{-1}{2(a+b)(b-a)} \begin{vmatrix} b & -a \\ b & b \end{vmatrix} \\ &= \frac{-(b^2+ab)}{2(a+b)(b-a)} \\ &= \frac{b}{2(a-b)} \end{aligned}$$

(b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de B sont les solutions de

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda & -3 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
Par définition des déterminants, on a

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda & -3 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2(2-\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme caractéristique admet une valeur propre double (0) et une simple (2).
Pour savoir si la matrice B est diagonalisable, recherchons les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double. S'il en existe deux linéairement indépendants, elle le sera !

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$BX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme il est impossible de trouver deux vecteurs propres de la valeur propre 0 linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.

6. **(a) La série suivante est-elle convergente ? Justifier.**

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m+2}{m^2-1}$$

Solution. On a

$$\frac{m+2}{m^2-1} \geq \frac{m}{m^2} \geq \frac{1}{m}$$

quel que soit le naturel $m \geq 2$.
Comme la série harmonique de terme général $\frac{1}{m}$ ne converge pas, vu le critère de comparaison, on en déduit que la série donnée ne converge pas non plus.

(b) La série suivante est-elle convergente ? Si la réponse est oui, en déterminer la somme.

$$\sum_{j=2}^{+\infty} 3^{\frac{1-j}{2}}$$

Solution. La série $\sum_{j=2}^{+\infty} 3^{\frac{1-j}{2}} = \sqrt{3} \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^j$ est une série géométrique dont la raison est $\frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$.
Cette série est donc convergente et sa somme vaut

$$\sqrt{3} \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^j = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

7. **Dans une région agricole, on classe les récoltes de pommes de terre en bonnes, satisfaisantes ou mauvaises. Après une bonne année, les probabilités que l'année suivante soit bonne, satisfaisante ou mauvaise sont respectivement $2/5$, $2/5$ et $1/5$. Après une année satisfaisante, les probabilités d'avoir des récoltes bonnes ou mauvaises sont égales et celle de conserver une récolte satisfaisante est de 0,6. Enfin, après une mauvaise année, les probabilités que l'année suivante soit bonne, satisfaisante ou mauvaise sont respectivement $1/5$, $2/5$ et $2/5$.**

   Quelles sont les prévisions à long terme pour avoir une bonne récolte ? Justifier !

Solution. Soient B_0, S_0 et M_0 respectivement les récoltes (bonnes, satisfaisantes, mauvaises) obtenues au départ et B_1, S_1 et M_1 respectivement l'année suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ S_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ S_0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$\begin{aligned}
(T-I)X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = -z \\ x + y = 3z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(1+2+1)=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

et la probabilité d'avoir une bonne récolte à long terme est de 1/4.

8. **Pour les physiciens uniquement**
(a) Dans un repère orthonormé du plan, on donne l'ellipse d'équation cartésienne

$$x^2+\frac{y^2}{2}=1.$$

On note $\mathcal{C}$ la partie de cette ellipse située dans le premier quadrant et $\mathcal{S}$ la surface délimitée par $\mathcal{C}$ et les axes de coordonnées.

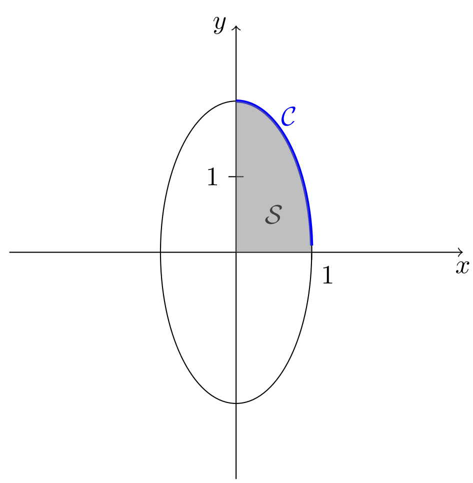
1. **Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la surface $\mathcal{S}$ dans un repère orthonormé.**
2. **Calculer les intégrales suivantes**

$$(1)\int_{\mathcal{C}} xy\ ds \qquad\qquad (2)\int_{\mathcal{C}} xy\ dx \qquad\qquad (3)\iint_{\mathcal{S}} d\sigma$$

3. **Pour chacune des intégrales (1) et (2), obtient-on la même valeur quelle que soit l'orientation de $\mathcal{C}$?**
4. **Que représente l'intégrale (3) ?**

Solution.

1. Une représentation de la courbe $\mathcal{C}$ et de la surface $\mathcal{S}$ dans un repère orthonormé est



2. Un paramétrage (injectif) de la courbe $\mathcal{C}$ est donné par

$$\vec{\gamma}\ :\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\mapsto\left(\cos(t),\ \sqrt{2}\sin(t)\right).$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D\vec{\gamma}(t)=\left(-\sin(t),\ \sqrt{2}\cos(t)\right)\neq\vec{0}\quad\forall t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,$$

ce qui montre qu'il est régulier, et

$$\|D\vec{\gamma}(t)\|=\sqrt{\sin^2(t)+2\cos^2(t)}=\sqrt{1+\cos^2(t)}.$$

Comme l'intégrant $f : (x,y) \mapsto xy$ est continu sur la courbe $\mathcal{C}$ (qui est bornée fermée), les deux intégrale sur la courbe ont un sens et on a

$$\begin{aligned}(1)\quad \int_{\mathcal{C}} xy\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\sqrt{2}\sin(t)\,\sqrt{1+\cos^2(t)}\,dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} D\left(1+\cos^2(t)\right)\,\sqrt{1+\cos^2(t)}\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{3}\left[\left(1+\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

et

$$(2)\quad \int_{\mathcal{C}} y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin(t)\cos(t)(-\sin(t))dt = -\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(t)\cos(t)dt = -\sqrt{2}\left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

De plus, comme l'intégrant $f : (x,y,z) \mapsto xy$ est continu sur la surface $\mathcal{S}$ (bornée fermée), l'intégrale (3) a un sens. Un paramétrage (injectif) de $\mathcal{S}$ est donné par

$$\vec{\phi}\ :\ (t,u) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [0,1] \mapsto \left(\cos(t),\ \sqrt{2}u\sin(t),\ 0\right).$$

Ce paramétrage est (infiniment) continûment dérivable : il vient que

$$D_t\vec{\phi}(t,u) = \left(-\sin(t),\ \sqrt{2}u\cos(t),\ 0\right) \qquad \text{et} \qquad D_u\vec{\phi}(t,u) = \left(0,\ \sqrt{2}\sin(t),\ 0\right)$$

de sorte que

$$D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u) = \left(0,\ 0, -\sqrt{2}\sin^2(t)\right) \neq \vec{0} \quad \forall (t,u) \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times]0,1[$$

ce qui montre qu'il est régulier, et on a alors

$$\begin{aligned}(3)\quad \iint_{\mathcal{S}} d\sigma &= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|D_t\vec{\phi}(t,u) \wedge D_u\vec{\phi}(t,u)\|\ dtdu = \sqrt{2}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ dtdu\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2t))\ dtdu = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

3. L'intégrale (1) est indépendante de l'orientation choisie, alors que l'intégrale (2) en dépend : elle aurait la valeur opposée à celle trouvée ci-dessus si on considérait l'autre orientation.
4. L'intégrale (3) représente l'aire de la surface $\mathcal{S}$.

(b) Déterminer explicitement la solution f de l'équation différentielle

$$xDf(x) - f(x) - x\cos(\ln(x)) = 0$$

satisfaisant la condition $f(1) = 0$. Préciser le plus grand intervalle sur lequel elle est valable.

Solution. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1, à second membre linéaire : elle se réécrit

$$Df(x) = a(x)\,f(x) + b(x)$$

où $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $b : x \mapsto \cos(\ln(x))$ sont des fonctions continues sur $I =]0,+\infty[$.
Dès lors, l'équation admet (au moins) une solution sur I et, comme nous disposons d'une condition initiale en $1 \in I$, nous pouvons en déterminer la solution unique sur l'intervalle I vérifiant cette condition.
Nous avons

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \simeq \ln x, \qquad x \in I$$

et

$$P(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,dx = \int \cos(\ln(x))e^{-\ln x}\,dx = \int \cos(\ln(x))\frac{1}{x}\,dx$$
$$\simeq \int D\left(\sin(\ln(x))\right)\,dx \simeq \sin(\ln(x)), \qquad x \in I.$$

Les solutions sur I sont donc les fonctions de la forme

$$f(x) = (C + P(x))\,e^{A(x)} = (C + \sin(\ln(x)))\,x, \qquad x \in I,$$

où C est une constante arbitraire. Comme $f(1) = 0$, on en déduit que $C = 0$ et que, par conséquent, la solution cherchée est

$$f(x) = x\sin(\ln(x)), \qquad x \in I =]0, +\infty[.$$

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2017-2018

QUESTIONNAIRE ET CORRIGÉ
EXAMEN DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B DU 22 MAI 2018
BIOLOGISTES (BLOC2)

Version 17 mai 2018

QUESTIONNAIRE

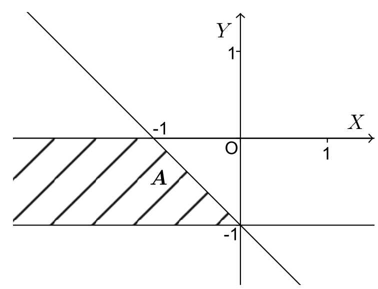
1. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln(1-xy)$.
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est infiniment dérivable.
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.
   (c) Calculer l'expression $D_x^2 f(x,y)$.
   (d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(1+t, 1-t)$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

2. On donne la fonction f par
$$f(x) = \cos(x)\ e^{-x}.$$
   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1 et 2 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de l'approximation à l'ordre 1.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

3. On donne
$$I \ = \ \int_0^2 \left(\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy \right)\ dx.$$
   (a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

   (b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant les démarche et réponse.

4. On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1-y^2}{x^2}$. Si c'est possible, calculer
$$I = \iint_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



5. (a) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 \\ i & i & 2 \end{pmatrix}.$$
   La matrice est-elle inversible ? Justifier. Si oui, calculer $(A^{-1})_{32}$.

   (b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

CORRIGÉ

Exercices

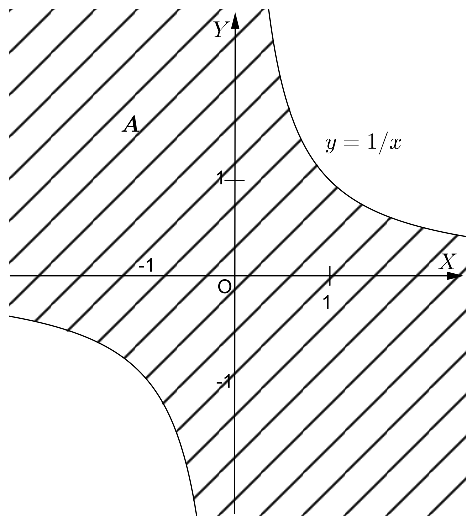
1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln(1-xy)$.**
(a) Déterminer le domaine où la fonction est infiniment dérivable.

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur l'ensemble A décrit par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - xy > 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\right\}.$$

(b) Dans un repère orthonormé, représenter celui-ci en le hachurant.

Solution. Voici la représentation graphique de cet ensemble A (partie hachurée) : les points de l'hyperbole d'équation cartésienne $xy = 1$ sont exclus de l'ensemble.



(c) Calculer l'expression $D_x^2 f(x,y)$.

Solution. En un point de A, on a

$$D_x f(x,y) = D_x\left(\ln(1-xy)\right) = \frac{-y}{1-xy}$$

et

$$D_x^2 f(x,y) = D_x\left(\frac{-y}{1-xy}\right) = \frac{-y^2}{(1-xy)^2}.$$

(d) Déterminer l'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(1+t, 1-t)$, son domaine de dérivabilité et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

Solution. L'expression explicite de la fonction $F : t \mapsto F(t) = f(1+t, 1-t)$ est donnée par

$$F(t) = \ln(1 - (1+t)(1-t)) = \ln(t^2).$$

La fonction F est dérivable sur $\{t \in \mathbb{R} : t^2 > 0\} = \mathbb{R}_0$ et on y a

$$DF(t) = \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t}.$$

2. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \cos(x)\ e^{-x}.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 0, 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Dès lors, les approximations demandées sont envisageables. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} = -e^{-x}\left(\sin(x) + \cos(x)\right),$$

$$D^2f(x) = e^{-x}\left(\sin(x) + \cos(x)\right) - e^{-x}\left(\cos(x) - \sin(x)\right) = 2e^{-x}\sin(x).$$

Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = -1$ et $D^2f(0) = 0$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$P_0(x) = f(0) = 1 \quad , \quad P_1(x) = f(0)+Df(0)x = 1-x \quad \text{et} \quad P_2(x) = P_1(x)+\frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1-x,\ x \in \mathbb{R}.$$

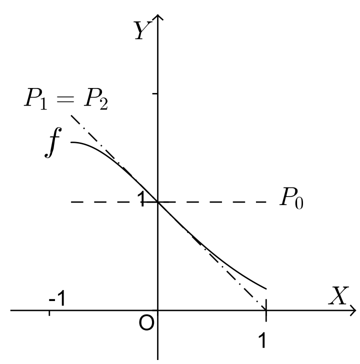
(b) Donner une expression explicite du reste de l'approximation à l'ordre 1.

Solution. Si on note R_1 le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre 1 en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u strictement compris entre 0 et x tel que

$$R_1(x) = 2e^{-u}\sin(u)\ \frac{x^2}{2!} = e^{-u}\sin(u)\ x^2.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution. Comme $R_1(x) \leq 0\ \forall x \in]-\pi/2, 0[$ et $R_1(x) \geq 0\ \forall x \in]0, \pi/2[$, le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1 à gauche de 0 et au-dessus de celui de P_1 à droite de 0.
Voici la représentation graphique de $P_0, P_1,\ P_2$ et f au voisinage de 0.

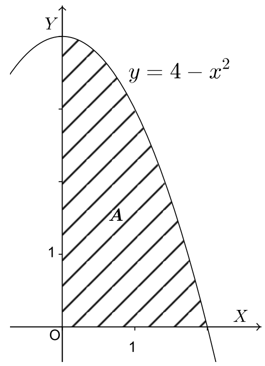


3. **On donne**

$$I \ = \ \int_0^2 \left(\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\ dy \right)\ dx.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

Solution. Voici la représentation graphique (partie hachurée) de l'ensemble d'intégration A.



(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant les démarche et réponse.

Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xe^{2y}}{4-y}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 4\}$ donc sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,4[\ ,\ x \in [0, \sqrt{4-y}\ ]\}$, ensemble borné mais non fermé.

Etudions l'intégrabilité de f sur A sachant que f est positif sur A.
Pour y fixé dans $[0,4[$, la fonction $g : x \mapsto \left|\dfrac{xe^{2y}}{4-y}\right| = \dfrac{xe^{2y}}{4-y}$ est continue sur le fermé borné $[0, \sqrt{4-y}\ ]$. Elle y est donc intégrable et on a

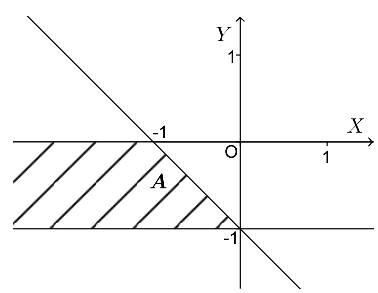
$$\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dx = \frac{e^{2y}}{4-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y}} = \frac{e^{2y}}{4-y}\,\frac{4-y}{2} = \frac{e^{2y}}{2}.$$

Considérons $h : y \mapsto \dfrac{e^{2y}}{2}$, fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[0,4]$; cette fonction est donc intégrable sur $[0,4]$ et dès lors f est intégrable sur A.
Ainsi, puisque la fonction f est positive sur A, on a

$$I \;=\; \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dx\right) dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2}\, dy = \frac{1}{4}\left[e^{2y}\right]_0^4 = \frac{e^8-1}{4}.$$

4. **On donne la partie du plan hachurée ci-contre, notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1-y^2}{x^2}$. Si c'est possible, calculer**

$$I = \iint_A f(x,y)\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1-y^2}{x^2}$ est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ donc sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-1,0]\ ,\ x \in]-\infty, -y-1]\}$, ensemble non fermé borné.

Etudions l'intégrabilité de f sur A.
Pour y fixé dans $]-1,0]$, la fonction $g : x \mapsto \left|\dfrac{1-y^2}{x^2}\right| = \dfrac{1-y^2}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_0$, donc sur $]-\infty,-y-1]$ fermé non borné. Vérifions son intégrabilité en $-\infty$. Soit $t < -1$, on a

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^{-y-1} (1-y^2)\frac{1}{x}\ dx = (1-y^2) \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_t^{-y-1} = (1-y^2)\left(\frac{1}{y+1} + \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t}\right) = 1-y.$$

Comme cette limite est finie, g est intégrable en $-\infty$ donc sur $]-\infty, -y-1]$ et son intégrale sur cet ensemble vaut $1-y$.

Considérons $h : y \mapsto 1-y$, fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle fermé borné $[-1,0]$; cette fonction est donc intégrable sur $[-1,0]$; dès lors f est intégrable sur A.

Ainsi, puisque la fonction f est positive sur A, on a

$$I \;=\; \int_{-1}^{0} \left(\int_{-\infty}^{-y-1} \frac{1-y^2}{x^2}\, dx \right) dy = \int_{-1}^{0} (1-y)\, dy = \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{0} = -\left(-1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 \\ i & i & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est-elle inversible ? Justifier. Si oui, calculer $(A^{-1})_{32}$.

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. En remplaçant la première ligne par la somme des trois lignes en appliquant la propriété de linéarité puis en retirant de la première colonne la deuxième, l'application de la première loi des mineurs à la première colonne donne finalement la valeur du déterminant. On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 \\ i & i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2i & 2i & 2 \\ 0 & i & -1 \\ i & i & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} i & i & 1 \\ 0 & i & -1 \\ i & i & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & i & -1 \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2i(2i - i) = -2. \end{aligned}$$

Dès lors, la matrice A est inversible.

L'élément $(A^{-1})_{32}$ peut être calculé et vaut

$$(A^{-1})_{32} = \frac{-1}{2}\, (\mathcal{A})_{23} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & 0 \\ i & i \end{vmatrix} = \frac{i^2}{2} = \frac{-1}{2}.$$

(b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de B sont les solutions de

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda & -3 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ.
Par définition des déterminants, on a

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda & -3 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(2-\lambda).$$

Ainsi, le polynôme caractéristique admet une valeur propre double (0) et une simple (2).
Pour savoir si la matrice B est diagonalisable, recherchons les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double. S'il en existe deux linéairement indépendants, elle le sera !

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que

$$BX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Dès lors, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme il est impossible de trouver deux vecteurs propres de la valeur propre 0 linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.