Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2022-2023

Corrigé de l'examen du 22 août 2023

Chimistes bloc 1 et géologues bloc 2

Version 6 septembre 2023

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \exp(-x) - 1.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction f explicitement par

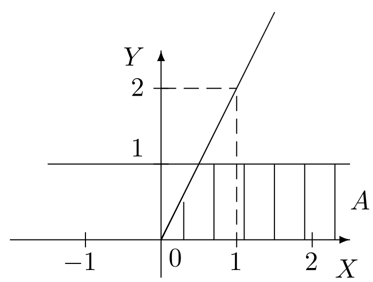
$$f(x, y) = \arccos(x + y^2 + 1).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$yD_x f(x, y) - D_y f(x, y)$$

3. On donne l'ensemble fermé non borné hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A ye^{-(x-y)}\ dx\ dy.$$



4. On donne l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9, -\sqrt{3}\,x/3 \le y \le x\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_E \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\ dx\ dy$$

5. (a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)/2 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a1) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M soit inversible.
(a2) Si $\alpha = \pi/3$, déterminer les valeurs propres de M
(a3) Si $\alpha = \pi/3$ et si, dans ce cas, M est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

(b) En colonie de vacances, chaque enfant doit manger au petit-déjeûner mais ne peut se servir, chaque jour, que d'un seul type d'aliment confiture (C), fromage (F) ou miel (M). D'un jour à

l'autre, il peut changer de choix.
Après avoir observé Grossebouffe, on peut constater que :
- s'il mange du fromage un jour, il a 2 chances sur 3 de manger de la confiture et 1 chance sur 3 d'étaler du miel sur sa tartine le lendemain.
- s'il a choisi du miel, le jour suivant il a 1 chance sur 3 d'en manger à nouveau, 1 chance sur 3 de prendre de la confiture et 1 chance sur 3 de manger du fromage.
- enfin, s'il a pris de la confiture un jour, il a 1 chance sur 4 de prendre du fromage et 3 chances sur 4 de manger une tartine de miel le lendemain.

(b1) Déterminer la matrice de transition.
(b2) Sachant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la probabilité que Grossebouffe mange du fromage ?

6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.

$$(a) \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\pi}\right)^{2m} \qquad (b) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)} \qquad (c) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x) = \exp(-x) - 1.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0**.**
Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = -\exp(-x), \qquad D^2f(x) = \exp(-x), \qquad D^3f(x) = -\exp(-x).$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = -1$ et $D^2f(0) = 1$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & f(0) + Df(0)x \ = \ -x, \\ P_2(x) & = & f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\dfrac{x^2}{2} \ = \ -x + \dfrac{x^2}{2}, \ x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

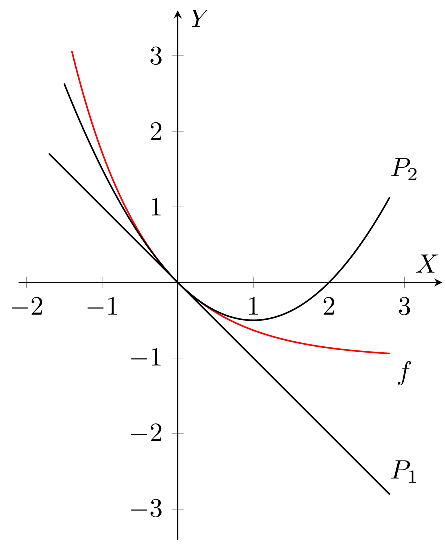
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \exp(-u_1) \ . \ \frac{x^2}{2} \ , \qquad R_2(x) = -\exp(-u_2) \ . \ \frac{x^3}{6}, \ x \in \mathbb{R}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.
Solution. Considérons les expressions des restes.
D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est toujours positif. Dès lors le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe opposé à celui de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x < 0$ et $R_2(x) < 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé au-dessus de celui de l'approximation P_2 si $x < 0$ et en dessous de celui de P_2 si $x > 0$.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x, y) = \arccos(x + y^2 + 1).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

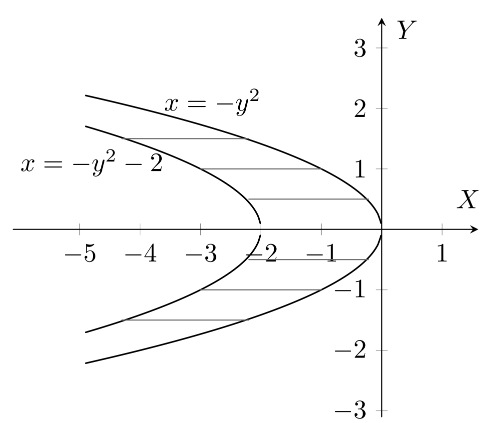
$$yD_xf(x, y) - D_yf(x, y)$$

Solution.

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x + y^2 + 1 < 1 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x + y^2 < 0 \right\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan ci-dessous, les points des paraboles exclus.



(c) En tout point de A, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x+y^2+1)^2}}$$

et

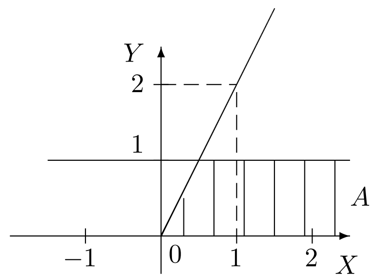
$$D_y f(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x+y^2+1)^2}} \times 2y.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} yD_x f(x,y) - D_y f(x,y) &= \frac{-y}{\sqrt{1-(x+y^2+1)^2}} - \frac{-2y}{\sqrt{1-(x+y^2+1)^2}} \\ &= \frac{y}{\sqrt{1-(x+y^2+1)^2}},\ (x,y) \in A \end{aligned}$$

3. **On donne l'ensemble fermé non borné hachuré A ci-contre. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$I = \iint_A ye^{-(x-y)}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto ye^{-(x-y)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [y/2, +\infty[\right\}$$

puisque la droite horizontale représentée (différente de l'axe des abscisses) a pour équation cartésienne $y = 1$ et la droite oblique représentée a pour équation cartésienne $y = 2x$.
Puisque A est un ensemble non borné fermé, étudions l'intégrabilité de f sur cet ensemble sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$.
• Pour y fixé dans $[0,1]$, la fonction $f(.,y) : x \mapsto y\,e^{-(x-y)} = y\,e^{-x}\ e^y$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé non borné $[y/2, +\infty[$. On doit donc étudier son intégrabilité en $+\infty$. Puisque la fonction est à valeurs positives, utilisons la définition et pour cela calculons la limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{y/2}^{t} ye^y e^{-x}\ dx = ye^y \lim_{t\to+\infty} \int_{y/2}^{t} e^{-x}\ dx.$$

Si cette limite est finie alors la fonction $f(.,y)$ sera intégrable sur $[y/2, +\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale. Cela étant, puisque $De^{-x} = -e^{-x}$, une intégration directe par variation de primitive donne

$$\int_{y/2}^{t} e^{-x}\ dx = -e^{-t} + e^{-y/2};$$

on obtient donc

$$\int_{y/2}^{+\infty} f(x,y)\ dx = ye^y \lim_{t\to+\infty} \left(-e^{-t} + e^{-y/2} \right) = ye^y\, e^{-y/2} = ye^{y/2}.$$

• La fonction $h : y \mapsto\ y\,e^{y/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc intégrable sur le fermé borné $[0,1]$.

• Dès lors, la fonction $f : (x, y) \mapsto ye^{-(x-y)}$ est intégrable sur A et la valeur de l'intégrale de f sur A est égale à

$$\begin{aligned}\int_0^1 y\, e^{y/2}\, dy &= 2\int_0^1 y\, De^{y/2}\, dy \\ &= 2\, e^{1/2} - 2\int_0^1 e^{y/2}\, dy \\ &= 2e^{1/2} - 4\,(e^{1/2} - 1) \\ &= 4 - 2e^{1/2}.\end{aligned}$$

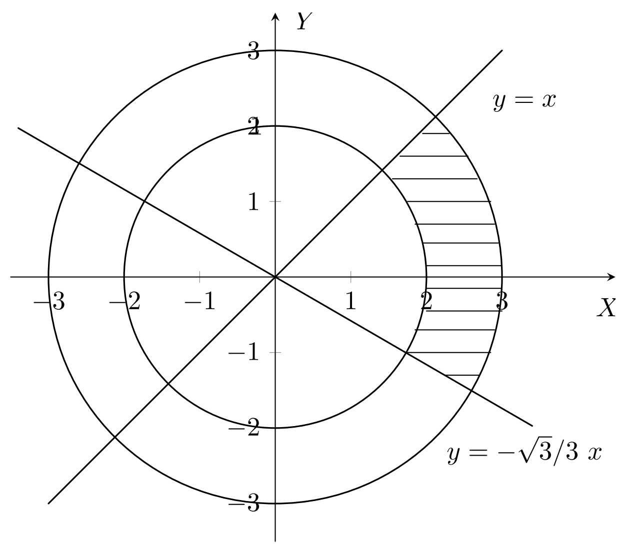
4. **On donne l'ensemble**

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9, -\sqrt{3}\, x/3 \le y \le x\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_E \frac{x}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy$$

Solution. (a) Voici la représentation graphique (partie hachurée du plan, bords compris) de l'ensemble E.



(b) La fonction $f : (x, y) \mapsto x/(x^2 + y^2)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donc sur l'ensemble E fermé borné ; elle est donc intégrable sur E.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration E', en bijection avec l'ensemble E, s'écrit

$$E' = \Big\{(r, \theta) : r \in [2, 3], \theta \in [-\pi/6, \pi/4]\Big\}$$

et la fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{r\cos(\theta)}{(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta))^2} = \frac{r\cos(\theta)}{r^4(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))^2} = \frac{\cos(\theta)}{r^3}$$

multipliée par le jacobien r. L'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 \left(\int_{-\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos(\theta)}{r^2}\, d\theta \right) dr \\
&= \left(\int_2^3 \frac{1}{r^2}\, dr \right) \times \left(\int_{-\pi/6}^{\pi/4} \cos(\theta)\, d\theta \right) \\
&= \left[-\frac{1}{r} \right]_2^3 \times \Big[\sin(\theta) \Big]_{-\pi/6}^{\pi/4} \\
&= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \times (\sin(\pi/4) - \sin(-\pi/6)) \\
&= \frac{1}{6} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{12}.
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)/2 & 3/4 \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a1) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M soit inversible.
(a2) Si $\alpha = \pi/3$, déterminer les valeurs propres de M
(a3) Si $\alpha = \pi/3$ et si, dans ce cas, M est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Solution. (a1) La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie, on a

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)/2 & 3/4 \end{vmatrix} \\
&= \frac{3}{4}\cos(\alpha) - \frac{\sin(\alpha)}{2} \times 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= \cos(\alpha)\left(\frac{3}{4} - \sin^2(\alpha) \right) \\
&= \cos(\alpha)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(\alpha) \right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(\alpha) \right).
\end{aligned}$$

Donc $\det(M) \neq 0$ si et seulement si

$$\cos(\alpha) \neq 0,\ \sin(\alpha) \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\alpha) \neq -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ , \alpha \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ et } \alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(a2) Si $\alpha = \pi/3$ alors $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(2\alpha) = \sin(2\pi/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ et les valeurs propres de M sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\lambda \mapsto \det(M-\lambda \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \Big(1/2-\lambda\Big)\Big(3/4-\lambda\Big) - \ 3/8 \\
&= \lambda^2 - (3/4+1/2)\lambda \\
&= \lambda^2 - 5/4\lambda.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc 0 et $5/4$.

(a3) Si $\alpha = \pi/3$ alors les valeurs propres sont simples ; dès lors, la matrice M est diagonalisable. Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $\Big(M - 0\ \mathbb{1}\Big)\, X = 0$. On a

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + \sqrt{3}\, y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $5/4$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $\Big(M - (5/4)\mathbb{1}\Big)\, X = 0$. On a

$$\big(M - (5/4)\ \mathbb{1}\big)\, X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2-5/4 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4-5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{3}\, x - 2y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $5/4$ sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ est telle que } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

(b) En colonie de vacances, chaque enfant doit manger au petit-déjeûner mais ne peut se servir, chaque jour, que d'un seul type d'aliment confiture (C), fromage (F) ou miel (M). D'un jour à l'autre, il peut changer de choix.
Après avoir observé Grossebouffe, on peut constater que :
- s'il mange du fromage un jour, il a 2 chances sur 3 de manger de la confiture et 1 chance sur 3 d'étaler du miel sur sa tartine le lendemain.
- s'il a choisi du miel, le jour suivant il a 1 chance sur 3 d'en manger à nouveau, 1 chance sur 3 de prendre de la confiture et 1 chance sur 3 de manger du fromage.
- enfin, s'il a pris de la confiture un jour, il a 1 chance sur 4 de prendre du fromage et 3 chances sur 4 de manger une tartine de miel le lendemain.

(b1) Déterminer la matrice de transition.
(b2) Sachant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la probabilité que Grossebouffe mange du fromage ?

Solution.
(b1) Soient C_0, F_0 et M_0 les situations initiales respectives « manger de la confiture », « manger du fromage » et « manger du miel » ; soient C_1, F_1 et M_1 , ces mêmes situations le jour suivant. On a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ F_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ F_0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(b2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que $(T - \mathbb{1})X = 0$.
On a successivement

$$\begin{aligned} (T - \mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & -1 & 1/3 \\ 3/4 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -3x + 2y + z = 0 \\ 3x - 12y + 4z = 0 \\ 9x + 4y - 8z = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 3x - 2y \\ 3x - 12y + 12x - 8y = 0 \\ 9x + 4y - 24x + 16y = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 3x - 2y \\ 15x - 20y = 0 \\ -15x + 20y = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le système se réduit donc à

$$\begin{aligned} (T - \mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 3x - 2y \\ 3x - 4y = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 4y - 2y \\ 3x - 4y = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 2y \\ x = 4y/3 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y/3 \\ y \\ 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c\ (4 + 3 + 6) = 1 \Leftrightarrow c = 1/13$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} 4/13 \\ 3/13 \\ 6/13 \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que Grossebouffe mange du fromage est de 3/13.

6. **Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.**

$$(a) \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\pi}\right)^{2m} \qquad (b) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)} \qquad (c) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}$$

Solution.

(a) Comme le terme général

$$\left(\frac{-1}{\pi}\right)^{2m} = \left(\frac{1}{\pi^2}\right)^m$$

avec $1/\pi^2 \in]-1,1[$, la série donnée est une série géométrique convergente.
Sa somme vaut

$$\left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{\pi^2}} = \frac{1}{\pi^4-\pi^2}.$$

(b) Considérons la somme partielle $\displaystyle\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)}$. Par une décomposition en somme de fractions simples, on a

$$\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m} - \sum_{m=2}^{M+1} \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{M+1}.$$

Dès lors, la série converge puisque la limite

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m(m+1)} = \lim_{M\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{M+1}\right) = 1$$

est finie et la somme de la série vaut 1.

(c) La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}$ diverge. En effet, on a

$$\frac{m!}{m^2} = \frac{(m-1)!}{m} \geq \frac{m-1}{m} \geq \frac{1}{2}$$

quel que soit le naturel $m \geq 2$. La suite $\dfrac{m!}{m^2}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ ne converge donc pas vers 0. Dès lors, la série de terme général $\dfrac{m!}{m^2}$ ne converge pas.