LIÈGE université
Sciences

1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2018-2019

Corrigé de l'examen de math B du 28 mai 2019
Chimistes bloc 1 et géologues bloc 2

Version 8 mai 2019

QUESTIONNAIRE

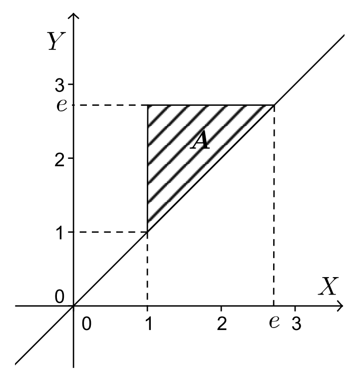
1. On donne la fonction f par
$$f(x) = \cos^2(3x)\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$
(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

2. On donne une fonction f continûment dérivable sur l'ensemble $A =]-1,1[\times]-\infty,\ln(2)[$.

(a) Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\exp(-x), \ln(1-\ln(x)))$?
(b) Quelle est l'expression de la dérivée de F en fonction de celles de f ?

3. On donne
$$I \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)dx.$$
(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

4. Si possible, calculer l'intégrale I suivante
$$I = \iint_A \frac{1}{xy}\,dx\,dy,$$
où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



5. (a) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & i & 0 \\ i & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$
(1) Déterminer les valeurs de α pour que la matrice A soit inversible.
(2) Si $\alpha = 1$, la matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

(b) La compagnie d'assurance ASSURBIEN répartit ses clients en assurance RC en deux groupes :
A : sans accident ou avec un seul accident pendant l'année,
B : avec au moins deux accidents pendant l'année.

Les statistiques internes de la compagnie montrent que, chaque année (et en moyenne), le « statut » des clients obéit aux règles suivantes.
- Un client du groupe A reste toujours chez ASSURBIEN l'année suivante et a neuf chances sur dix de rester dans le groupe A.
- Un client du groupe B a quatre chances sur dix d'y rester l'année suivante ; par contre, il a deux

chances sur dix d'être dans A et donc quatre chances sur dix de quitter la compagnie ASSURBIEN.
- Un client assuré dans une autre compagnie peut décider de changer de compagnie ; il a deux chances sur dix d'intégrer ASSURBIEN dans le groupe A et autant de chances de l'intégrer dans le groupe B.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la proportion de clients de la compagnie ASSURBIEN ?

6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.

$$(a) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{j^2+2j} \qquad\qquad (b) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^m}{e^{2m-1}}$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \cos^2(3x) \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = -6\cos(3x)\sin(3x) = -3\sin(6x), \quad D^2f(x) = -18\cos(6x), \quad D^3f(x) = 108\sin(6x).$$

Comme $f(0) = 1, \ Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -18$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)x = 1, \\ P_2(x) &= P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - 9x^2, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

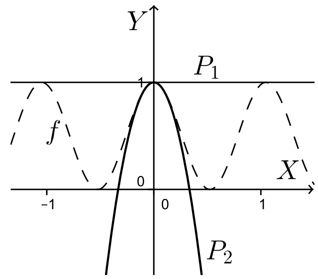
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= -18\cos(6u_1).\frac{x^2}{2!} = -9\cos(6u_1)x^2, \\ R_2(x) &= 108\sin(6u_2).\frac{x^3}{3!} = 18\sin(6u_2)x^3, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution. Comme $R_1(x) \leq 0 \ \forall x$ au voisinage de 0, le graphique de f est situé en dessous de celui de l'approximation P_1. Comme $R_2(x) \geq 0 \ \forall x$ au voisinage de 0, le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_2 .
Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne une fonction f continûment dérivable sur l'ensemble $A =]-1, 1[\times]-\infty, \ln(2)[$.**

   (a) Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par
$$F(x) = f(\exp(-x), \ln(1 - \ln(x)))?$$

   (b) Quelle est l'expression de la dérivée de F en fonction de celles de f ?

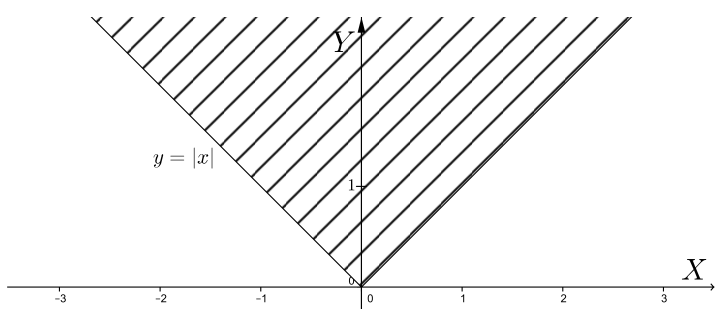
   Solution.

   a) Les fonctions $f_1 : x \mapsto \exp(-x)$ et $f_2 : x \mapsto \ln(1 - \ln(x))$ sont dérivables dans
$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ 1 - \ln(x) > 0\} =]0, e[.$$
   Dès lors, le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble
$$\begin{aligned} E &= \{x \in]0, e[: -1 < \exp(-x) < 1,\ \ln(1 - \ln(x)) < \ln(2)\} \\ &= \{x \in]0, e[: -x < 0,\ -1 < \ln(x)\} \\ &= \{x \in]0, e[: \ \frac{1}{e} < x\} = \left] \frac{1}{e}, e \right[. \end{aligned}$$

   b) Comme F est dérivable sur E, par application du théorème de dérivation des fonctions composées, la dérivée de F en fonction de celles de f est donnée par
$$(DF)(x) = (D_1 f)_{(\exp(-x), \ln(1-\ln(x)))} \cdot (-\exp(-x)) + (D_2 f)_{(\exp(-x), \ln(1-\ln(x)))} \cdot \frac{1}{x(\ln(x) - 1)},$$
   si $D_1 f$ et $D_2 f$ sont respectivement les dérivées par rapport à la première et la deuxième variable de f.

3. **On donne**
$$I \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx.$$

   (a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
   (b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.
   Solution. (a) La représentation graphique de l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



(b) Cet ensemble d'intégration peut s'écrire

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in [\,|x|, +\infty[\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[\text{ et } x \in [-y,y]\}.$$

Etudions l'intégrabilité de $f : (x,y) \mapsto e^{-y^2}$ sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$ et que f est continu sur A .

Pour y fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $h : x \mapsto e^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[-y,y]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et, puisque la fonction est paire, on a

$$\begin{aligned}\int_{-y}^{y} e^{-y^2}\, dx &= 2e^{-y^2} \int_0^y 1\, dx \\ &= 2e^{-y^2}\ [x]_0^y \\ &= 2y\ e^{-y^2}.\end{aligned}$$

La fonction $g : y \mapsto 2y\ e^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$. Comme g est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t 2y\ e^{-y^2}\, dy &= -\ \left[e^{-y^2}\right]_0^t \\ &= -\ \left(e^{-t^2} - e^0\right) \\ &= 1 -\ e^{-t^2}.\end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t 2y\ e^{-y^2}\, dy = \lim_{t\to+\infty} \left(1 -\ e^{-t^2}\right) = 1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} = 1$$

(par application du théorème de la limite des fonctions composées puisque $\lim_{t\to+\infty}(-t^2) = -\infty$ et $\lim_{z\to-\infty} e^z = 0$). Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ et donc sur $[0,+\infty[$.

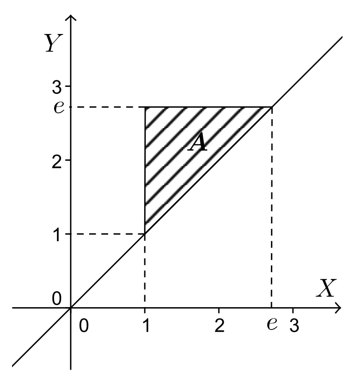
Ainsi, f est intégrable sur A et donc la permutation de l'ordre d'intégration ne modifie pas la valeur de l'intégrale. Comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-y}^{y} e^{-y^2} dx\right) dy = 1.$$

4. **Si possible, calculer l'intégrale I suivante**

$$I = \iint_A \frac{1}{xy}\, dx\, dy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$ donc sur l'ensemble A fermé borné ; elle est donc intégrable sur A. Cet ensemble d'intégration peut, par exemple, s'écrire

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,e] \text{ et } y \in [x,e]\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^e \frac{1}{x}\left(\int_x^e \frac{1}{y}dy\right)dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{x}\,[\ \ln(|y|)\ ]_x^e\,dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{x}\,(\ \ln(e)-\ln(x)\ )\,dx \\
&= \int_1^e \left(\ \frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\ \right)dx \\
&= \left[\ \ln(|x|)-\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e \\
&= \ln(e)-\frac{\ln^2(e)}{2}-\ln(1)+\frac{\ln^2(1)}{2} \\
&= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & i & 0\\ i & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\ \alpha\in\mathbb{C}.$$

(1) Déterminer les valeurs de α pour que la matrice A soit inversible.

(2) Si $\alpha=1$, la matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

Solution. (1) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A\neq 0$. En appliquant la première loi des mineurs à la troisième colonne par exemple, on a

$$\det A=\begin{vmatrix}\alpha & i & 0\\ i & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\alpha^2-i^2.$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $\alpha\neq -i$ et $\alpha\neq i$.

(2) Si $\alpha=1$, la matrice A s'écrit

$$A=\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I)=0$. On a

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & i & 0\\ i & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)((1-\lambda)^2-i^2)=(1-\lambda)(1-\lambda-i)(1-\lambda+i),$$

si on applique la première loi des mineurs à la troisième colonne. Ainsi,

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow(1-\lambda)(1-i-\lambda)(1+i-\lambda)=0$$

et les valeurs propres de A sont $1,\ 1-i$ et $1+i$. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

(b) La compagnie d'assurance ASSURBIEN répartit ses clients en assurance RC en deux groupes :
A : sans accident ou avec un seul accident pendant l'année,

B : avec au moins deux accidents pendant l'année.

Les statistiques internes de la compagnie montrent que, chaque année (et en moyenne), le « statut » des clients obéit aux règles suivantes.
- Un client du groupe A reste toujours chez ASSURBIEN l'année suivante et a neuf chances sur dix de rester dans le groupe A.
- Un client du groupe B a quatre chances sur dix d'y rester l'année suivante ; par contre, il a deux chances sur dix d'être dans A et donc quatre chances sur dix de quitter la compagnie ASSURBIEN.
- Un client assuré dans une autre compagnie peut décider de changer de compagnie ; il a deux chances sur dix d'intégrer ASSURBIEN dans le groupe A et autant de chances de l'intégrer dans le groupe B.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la proportion de clients de la compagnie ASSURBIEN ?

Solution. (1) Considérons le groupe C constitué des personnes qui ne sont pas dans cette compagnie d'assurance. Soient A_0, B_0 et C_0 respectivement le « statut » des personnes (sans accident ou avec un seul accident pendant l'année, avec au moins deux accidents pendant l'année, pas dans cette compagnie) dans chacun des groupes au départ et A_1, B_1 et C_1 leur « statut » respectif l'année suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/10 & 4/10 & 2/10 \\ 0 & 4/10 & 6/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/10 & 4/10 & 2/10 \\ 0 & 4/10 & 6/10 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/10 & -6/10 & 2/10 \\ 0 & 4/10 & -4/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x+2y+2z=0 \\ x-6y+2z=0 \\ 4y-4z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=z \\ x=4y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(4+1+1) = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{6}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la proportion de clients de la compagnie ASSURBIEN vaudra $\dfrac{5}{6}$.

6. **Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.**

$$(a) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{j^2+2j} \qquad\qquad (b) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^m}{e^{2m-1}}$$

Solution.
(a) Comme

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{2}{j^2+2j} = \sum_{j=1}^{J} \frac{2}{j(j+2)} = \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2}\right),$$

par décomposition en fractions simples, cette somme s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2}\right) &= \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{j+2} \\ &= \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{j} - \sum_{j=3}^{J+2} \frac{1}{j} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{J+1} - \frac{1}{J+2}. \end{aligned}$$

Par définition des séries, on a donc

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{j^2+2j} = \lim_{J\to+\infty} \sum_{j=1}^{J} \frac{2}{j^2+2j} = \lim_{J\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{J+1} - \frac{1}{J+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

La série est donc convergente et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

(b) D'une part, on a

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^m}{e^{2m-1}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{-1}} \frac{e^m}{e^{2m}} = e \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^m.$$

D'autre part, la série $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^m$ est une série géométrique convergente puisque la raison $\frac{1}{e} \in]-1,1[$.
La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{e} \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}.$$

Par conséquent, la somme de la série donnée vaut $\frac{e}{e-1}$.

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2018-2019

Corrigé de l'examen de math B du 28 mai 2019
Biologistes bloc 2

Version 8 mai 2019

QUESTIONNAIRE

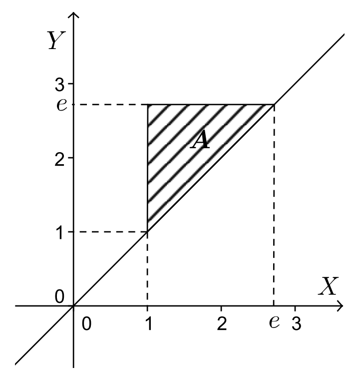
1. On donne la fonction f par
$$f(x) = \cos^2(3x)\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$
(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

2. On donne une fonction f continûment dérivable sur l'ensemble $A =]-1,1[\times]-\infty, \ln(2)[$.

(a) Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\exp(-x), \ln(1-\ln(x)))$?
(b) Quelle est l'expression de la dérivée de F en fonction de celles de f ?

3. On donne
$$I \ = \ \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx.$$
(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

4. Si possible, calculer l'intégrale I suivante
$$I = \iint_A \frac{1}{xy}\, dx\, dy,$$
où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



5. (a) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(1) La matrice A est-elle inversible ? Pourquoi ?

(2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

(b) La compagnie d'assurance ASSURBIEN répartit ses clients en assurance RC en deux groupes :
A : sans accident ou avec un seul accident pendant l'année,
B : avec au moins deux accidents pendant l'année.

Les statistiques internes de la compagnie montrent que, chaque année (et en moyenne), le « statut » des clients obéit aux règles suivantes.
- Un client du groupe A reste toujours chez ASSURBIEN l'année suivante et a neuf chances sur dix de rester dans le groupe A.

- Un client du groupe B a quatre chances sur dix d'y rester l'année suivante ; par contre, il a deux chances sur dix d'être dans A et donc quatre chances sur dix de quitter la compagnie ASSURBIEN.
- Un client assuré dans une autre compagnie peut décider de changer de compagnie ; il a deux chances sur dix d'intégrer ASSURBIEN dans le groupe A et autant de chances de l'intégrer dans le groupe B.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la proportion de clients de la compagnie ASSURBIEN ?

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f par**

$$f(x) = \cos^2(3x)\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = -6\cos(3x)\sin(3x) = -3\sin(6x), \quad D^2f(x) = -18\cos(6x), \quad D^3f(x) = 108\sin(6x).$$

Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -18$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)x = 1, \\ P_2(x) &= P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 - 9x^2,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

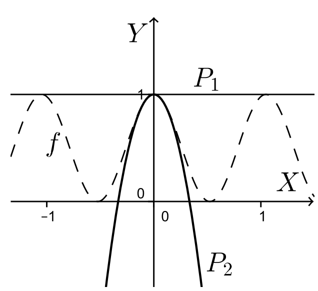
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= -18\cos(6u_1).\frac{x^2}{2!} = -9\cos(6u_1)x^2, \\ R_2(x) &= 108\sin(6u_2).\frac{x^3}{3!} = 18\sin(6u_2)x^3,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution. Comme $R_1(x) \le 0\ \forall x$ au voisinage de 0, le graphique de f est situé en dessous de celui de l'approximation P_1. Comme $R_2(x) \ge 0\ \forall x$ au voisinage de 0, le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_2 .

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne une fonction f continûment dérivable sur l'ensemble $A =]-1,1[\times]-\infty, \ln(2)[$.**

(a) Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par

$$F(x) = f(\exp(-x), \ln(1-\ln(x)))?$$

(b) Quelle est l'expression de la dérivée de F en fonction de celles de f ?

Solution.

a) Les fonctions $f_1 : x \mapsto \exp(-x)$ et $f_2 : x \mapsto \ln(1-\ln(x))$ sont dérivables dans

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ 1-\ln(x) > 0\} =]0, e[.$$

Dès lors, le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

$$\begin{aligned} E &= \{x \in]0,e[: -1 < \exp(-x) < 1,\ \ln(1-\ln(x)) < \ln(2)\} \\ &= \{x \in]0,e[: -x < 0,\ -1 < \ln(x)\} \\ &= \{x \in]0,e[: \frac{1}{e} < x\} = \left]\frac{1}{e}, e\right[. \end{aligned}$$

b) Comme F est dérivable sur E, par application du théorème de dérivation des fonctions composées, la dérivée de F en fonction de celles de f est donnée par

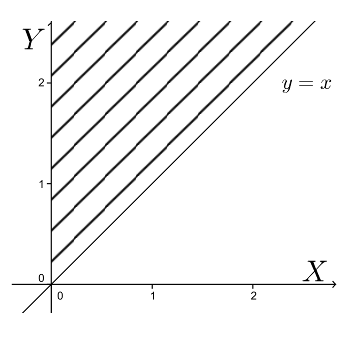
$$(DF)(x) = (D_1 f)_{(\exp(-x),\ln(1-\ln(x)))} \cdot (-\exp(-x)) + (D_2 f)_{(\exp(-x),\ln(1-\ln(x)))} \cdot \frac{1}{x(\ln(x)-1)},$$

si $D_1 f$ et $D_2 f$ sont respectivement les dérivées par rapport à la première et la deuxième variable de f.

3. **On donne**

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \right) dx.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.
(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.
Solution. (a) La représentation graphique de l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



(b) Cet ensemble d'intégration peut s'écrire

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[\text{ et } y \in [\ x, +\infty[\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[\text{ et } x \in [0,y]\}.$$

Etudions l'intégrabilité de $f : (x,y) \mapsto e^{-y^2}$ sur A sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$ et que f est continu sur A .

Pour y fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $h : x \mapsto e^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[0,y]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\begin{aligned}\int_0^y e^{-y^2}\, dx &= e^{-y^2} \int_0^y 1\, dx \\ &= e^{-y^2}\ [x]_0^y \\ &= y\ e^{-y^2}.\end{aligned}$$

La fonction $g : y \mapsto y\ e^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$. Comme g est continu sur $[0,t]$ $\forall t > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t y\ e^{-y^2}\, dy &= -\frac{1}{2}\int_0^t -2y\ e^{-y^2}\, dy \\ &= -\frac{1}{2}\left[e^{-y^2}\right]_0^t \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-t^2}-e^0\right) \\ &= \frac{1-\ e^{-t^2}}{2}.\end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t y\ e^{-y^2}\, dy = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1-\ e^{-t^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\ e^{-t^2} = \frac{1}{2}$$

(par application du théorème des fonctions composées puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}(-t^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{z\to-\infty}\ e^z = 0$). Vu que cette limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ et donc sur $[0,+\infty[$.

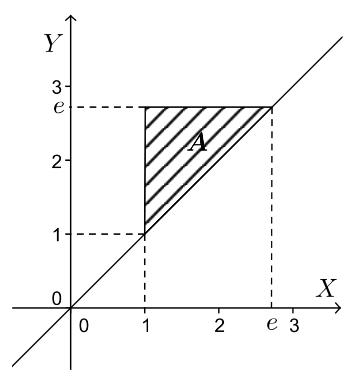
Ainsi, f est intégrable sur A et donc la permutation de l'ordre d'intégration ne modifie pas la valeur de l'intégrale. Comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$I\ =\ \int_0^{+\infty}\left(\int_0^y e^{-y^2} dx\right) dy = \frac{1}{2}.$$

4. **Si possible, calculer l'intégrale I suivante**

$$I = \iint_A \frac{1}{xy}\, dx\, dy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy}$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$ donc sur l'ensemble A fermé borné ; elle est donc intégrable sur A. Cet ensemble d'intégration peut, par exemple, s'écrire

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,e] \text{ et } y \in [x,e]\right\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^e \frac{1}{x}\left(\int_x^e \frac{1}{y}dy\right)dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{x}\,[\ \ln(|y|)\ ]_x^e\,dx \\
&= \int_1^e \frac{1}{x}\,(\ \ln(e) - \ln(x)\ )\,dx \\
&= \int_1^e \left(\ \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\ \right)dx \\
&= \left[\ \ln(|x|) - \frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e \\
&= \ln(e) - \frac{\ln^2(e)}{2} - \ln(1) + \frac{\ln^2(1)}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice A est-elle inversible ? Pourquoi ?

(2) La matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

Solution. (1) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. En appliquant la première loi des mineurs à la troisième colonne par exemple, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - i^2 = 2 \neq 0.$$

La matrice A est donc inversible.

(2) Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$. On a

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i & 0 \\ i & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - i^2) = (1-\lambda)(1-\lambda-i)(1-\lambda+i),$$

si on applique la première loi des mineurs à la troisième colonne. Ainsi,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-i-\lambda)(1+i-\lambda) = 0$$

et les valeurs propres de A sont $1,\ 1-i$ et $1+i$. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

(b) La compagnie d'assurance ASSURBIEN répartit ses clients en assurance RC en deux groupes :
A **: sans accident ou avec un seul accident pendant l'année,**
B **: avec au moins deux accidents pendant l'année.**

Les statistiques internes de la compagnie montrent que, chaque année (et en moyenne), le « statut » des clients obéit aux règles suivantes.

- Un client du groupe A reste toujours chez ASSURBIEN l'année suivante et a neuf chances sur dix de rester dans le groupe A.
- Un client du groupe B a quatre chances sur dix d'y rester l'année suivante ; par contre, il a deux chances sur dix d'être dans A et donc quatre chances sur dix de quitter la compagnie ASSURBIEN.
- Un client assuré dans une autre compagnie peut décider de changer de compagnie ; il a deux chances sur dix d'intégrer ASSURBIEN dans le groupe A et autant de chances de l'intégrer dans le groupe B.

(1) Déterminer la matrice de transition.

(2) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la proportion de clients de la compagnie ASSURBIEN ?

Solution. (1) Considérons le groupe C constitué des personnes qui ne sont pas dans cette compagnie d'assurance. Soient A_0, B_0 et C_0 respectivement le « statut » des personnes (sans accident ou avec un seul accident pendant l'année, avec au moins deux accidents pendant l'année, pas dans cette compagnie) dans chacun des groupes au départ et A_1, B_1 et C_1 leur « statut » respectif l'année suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/10 & 4/10 & 2/10 \\ 0 & 4/10 & 6/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/10 & 4/10 & 2/10 \\ 0 & 4/10 & 6/10 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/10 & 2/10 & 2/10 \\ 1/10 & -6/10 & 2/10 \\ 0 & 4/10 & -4/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x+2y+2z=0 \\ x-6y+2z=0 \\ 4y-4z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=z \\ x=4y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ y \\ y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(4+1+1) = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{6}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la proportion de clients de la compagnie ASSURBIEN vaudra $\dfrac{5}{6}$.