



Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2025-2026

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 26 AOÛT 2026
CHIMIE BLOC 1, GÉOLOGIE BLOC 2

QUESTIONNAIRE

Question 1 (1.1) Soient des réels a, b, c . Factoriser le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

(1.2) On donne la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de celle-ci.

- La matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, déterminer une matrice S qui la diagonalise et donner la forme diagonale obtenue.

Question 2 Dans un élevage, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.

L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.

S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.

Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes, 2 chances sur 5 de la salade et 2 chances sur 5 qu'il mange encore des pissenlits.

(2.1) Déterminer la matrice de transition.

(2.2) A longue échéance, quelle est la probabilité que le lapin mange des pissenlits ?

Question 3 On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}.$$

(3.1) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

(3.2) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

(3.3) Dans un même repère orthonormé, représenter l'approximation à l'ordre 1 ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport au graphique de l'approximation **en utilisant la notion de reste**.

Question 4 On donne la fonction f explicitement par

$$f(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + i \arctan \left(\frac{y}{x} \right).$$

(4.1) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.

(4.2) En tout point du domaine de dérivabilité, calculer explicitement l'expression suivante, en simplifiant au maximum

$$D_1 f(x, y) + i D_2 f(x, y).$$

Question 5 (5.1) Soit $R = [0, \pi/4] \times [0, \pi/2]$. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_R \cos(x - 2y) \, dx \, dy.$$

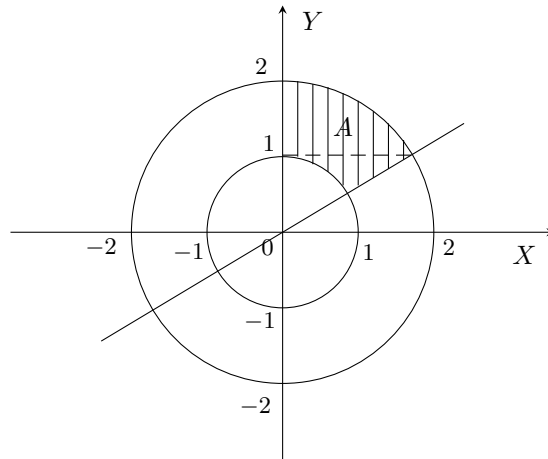
(5.2) On donne

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \right) dx.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
- Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

(5.3) On donne la partie fermée du plan hachurée ci-dessous, notée A , et la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$.
Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_A f(x, y) \, dx \, dy$$



CORRIGÉ

Question 1. (1.1) Soient des réels a, b, c . Factoriser le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

(1.2) On donne la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de celle-ci.

- La matrice est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, déterminer une matrice S qui la diagonalise et donner la forme diagonale obtenue.

Solution. (1.1) En soustrayant la ligne 1 des lignes 2 et 3 puis en factorisant la colonne 3, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On applique alors la première loi des mineurs à la colonne 1 et on met en évidence, ce qui donne

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

(1.2) Cherchons les valeurs propres de B , lesquelles sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(B - \lambda \mathbb{1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^2(1-\lambda); \end{aligned}$$

les valeurs propres de B sont donc -1 (valeur propre double) et 1 (valeur propre simple).

Cherchons les vecteurs propres relatifs à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tels que $(B - (-1)\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(B + \mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tels que $(B - 1\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(B - 1\mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2z = 0. \end{cases}$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

La matrice S dont les 2 premières colonnes sont les vecteurs propres de valeur propre -1 et dont la troisième est un vecteur propre de valeur propre 1

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et on a

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est donc diagonalisable.

Question 2. Dans un élevage, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.

L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.

S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.

Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes, 2 chances sur 5 de la salade et 2 chances sur 5 qu'il mange encore des pissenlits.

(2.1) Déterminer la matrice de transition.

(2.2) A longue échéance, quelle est la probabilité que le lapin mange des pissenlits ?

Solution. (2.1) Soient C_0 , S_0 et P_0 les situations initiales respectives (manger des carottes, manger de la salade et manger des pissenlits) et C_1 , S_1 et P_1 les situations au repas suivant. Vu les observations, on a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ S_0 \\ P_0 \end{pmatrix} (*)$$

et la matrice de transition T est donc

$$T = \begin{pmatrix} 7/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

(2.2) Puisque la matrice de transition est régulière, vu (*), la probabilité qu'un lapin mange des pissenlits à long terme est donnée par la troisième composante du vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T - \mathbb{1})X = 0.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} (T - \mathbb{1})X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - 2y + 2z = 0 \\ z = y/2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(1 + 1 + 1/2) = 1 \Leftrightarrow c = 2/5$, le vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité est donc le vecteur

$$\begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que la probabilité qu'un lapin mange des pissenlits à long terme est de $1/5$, soit 20%.

Question 3. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}.$$

(3.1) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

(3.2) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

(3.3) Dans un même repère orthonormé, représenter l'approximation à l'ordre 1 ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport au graphique de l'approximation en utilisant la notion de reste.

Solution. (3.1) La fonction f est indéfiniment continûment dérivable sur $] - \infty, 1/2[$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - 2x}}, \quad D^2f(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1 - 2x)^3}}.$$

Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = -1$ et $D^2f(0) = -1$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on obtient

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)x = 1 - x, \\ P_2(x) &= f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\frac{x^2}{2} = 1 - x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(3.2) On a

$$D^2 f(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-2x)^3}} \quad \text{et} \quad D^3 f(x) = \frac{-3}{\sqrt{(1-2x)^5}}.$$

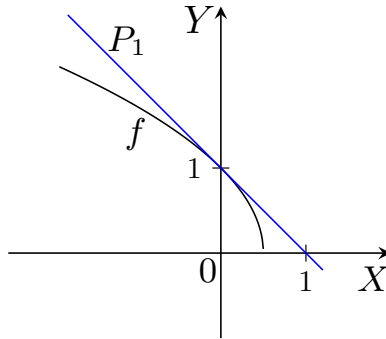
Dès lors, si on désigne par R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = D^2 f(u_1) \times \frac{x^2}{2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-2u_1)^3}} \times \frac{x^2}{2},$$

$$R_2(x) = D^3 f(u_2) \times \frac{x^3}{3!} = \frac{-3}{\sqrt{(1-2u_2)^5}} \times \frac{x^3}{3!} = \frac{-1}{\sqrt{(1-2u_2)^5}} \times \frac{x^3}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(3.3) Vu l'expression du reste R_1 , on voit que $R_1(x)$ est toujours négatif pour x voisin de 0. Dès lors le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

Voici la représentation graphique de P_1 et f au voisinage de 0.



Question 4. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(4.1) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.

(4.2) En tout point du domaine de dérivabilité, calculer explicitement l'expression suivante, en simplifiant au maximum

$$D_1 f(x, y) + i D_2 f(x, y).$$

Solution. (4.1) La fonction f est dérivable sur

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0, x \neq 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

(4.2) Comme $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = (1/2) \ln(x^2 + y^2)$, en tout point de A on a

$$D_1 f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + (y/x)^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

et

$$D_2 f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + (y/x)^2} \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{ix}{x^2 + y^2}.$$

Dès lors

$$D_1 f(x, y) + i D_2 f(x, y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + \frac{iy - x}{x^2 + y^2} = 0.$$

Question 5. (5.1) Soit $R = [0, \pi/4] \times [0, \pi/2]$. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_R \cos(x - 2y) \, dx \, dy.$$

(5.2) On donne

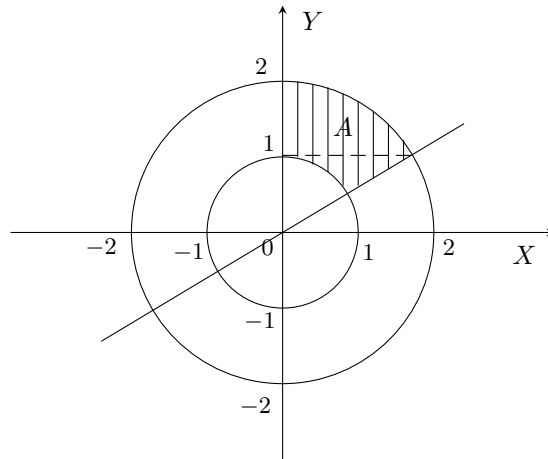
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx.$$

- Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.

- Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

(5.3) On donne la partie fermée du plan hachurée ci-dessous, notée A , et la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$. Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_A f(x, y) dx dy$$



Solution. (5.1) La fonction $f : (x, y) \mapsto \cos(x - 2y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur R , ensemble fermé borné ; elle y est donc intégrable. Calculons donc

$$I = \iint_R \cos(x - 2y) dx dy = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x - 2y) dy \right) dx.$$

Comme

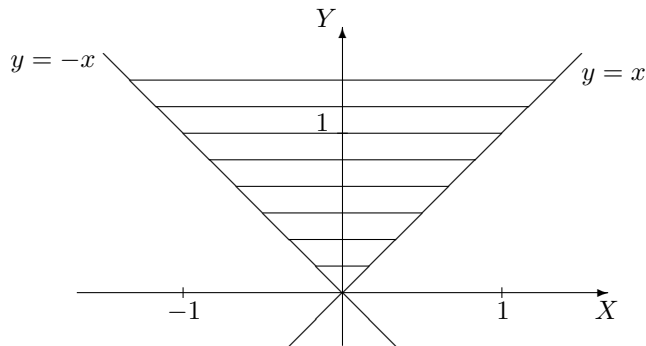
$$\int_0^{\pi/2} \cos(x - 2y) dy = \left[-\frac{1}{2} \sin(x - 2y) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \sin(x - \pi) + \frac{1}{2} \sin(x) = \sin(x),$$

l'intégrale demandée vaut

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin(x) dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{\pi/4} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(0) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

(5.2) Dans un repère orthonormé, la représentation de l'ensemble d'intégration est la suivante.



On peut décrire cet ensemble par

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in [|x|, +\infty[\right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[, x \in [-y, y] \right\}.$$

Etudions l'intégrabilité de $f : (x, y) \mapsto e^{-y^2}$, fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc sur E , ensemble non borné.

Pour y fixé dans $[0, +\infty[$, la fonction $g : x \mapsto e^{-y^2}$ est continue sur le fermé borné $[-y, y]$ donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{-y}^y e^{-y^2} dx = \left[x e^{-y^2} \right]_{-y}^y = 2y e^{-y^2}.$$

Etudions ensuite l'intégrabilité de la fonction $h : y \mapsto 2y e^{-y^2}$ continue et positive sur $[0, +\infty[$. Sur $[0, t]$, $\forall t > 0$, on a

$$\int_0^t 2y e^{-y^2} dy = \left[-e^{-y^2} \right]_0^t = -e^{-t^2} + 1.$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2} = 0$ par application du théorème de la limite des fonctions composées, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t^2} + 1) = 0 + 1 = 1.$$

Comme cette limite est finie, la fonction h est intégrable sur $[0, +\infty[$ et f est donc intégrable sur E . Dès lors, quel que soit l'ordre d'intégration, on obtient le même résultat pour l'intégrale I et on a $I = 1$.

(5.3) La fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ est continue sur l'ensemble fermé borné A , donc y est intégrable. Vu l'expression de cette fonction et la forme de A , une intégration par changement de variables polaires est naturelle.

Déterminons la description de A en fonction des coordonnées polaires. D'une part, les cercles intervenant dans la description de A ayant respectivement pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$, il est immédiat que $r \in [1, 2]$. D'autre part, les deux droites intervenant dans la description de A passent par l'origine ; l'une passe aussi par le point de coordonnées $(\sqrt{3}, 1)$ et a pour équation cartésienne $y = \sqrt{3}x/3$ et l'autre est l'axe des ordonnées. Finalement, les coordonnées polaires des points de A sont celles de l'ensemble

$$[1, 2] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Cela étant on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \iint_A \sin(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{[1, 2] \times [\pi/6, \pi/2]} \left(\sin(r^2) \times r \right) d\theta dr \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_1^2 2r \sin(r^2) dr \right) \times \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \left[-\frac{1}{2} \cos(r^2) \right]_1^2 \\ &= -\frac{\pi}{6} \left(\cos(4) - \cos(1) \right). \end{aligned}$$