Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2024-2025

Corrigé de l'examen du 10 juin 2025
Chimie bloc 1, Géologie bloc 2

Version 17 mai 2025

QUESTIONNAIRE

Question 1 Soient les matrices

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\pi/2+\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(2\pi-\alpha) \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M_α soit inversible.
(b) Si $\alpha = \pi/4$ et si, dans ce cas, $M_{\pi/4}$ est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Question 2 Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
(a) Déterminer la matrice de transition.
(b) A longue échéance, quelle est la probabilité que le lapin mange des pissenlits ?

Question 3 On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{1}{xy}\right).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant ou en le coloriant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

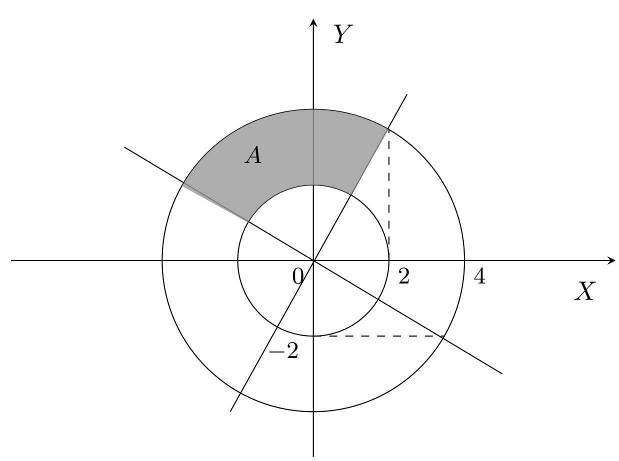
$$xD_x f(x,y)$$

Question 4 (a) On donne l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 1, \ x^2 \leq y^2 \leq 1 + x^2\}$. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_E \frac{y}{x^2}\, dx\, dy.$$

(b) On donne l'ensemble colorié A ci-dessous. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A \frac{x^2+y^2}{y^2}\, dx\, dy.$$



Question 5 On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \exp(-x) - 1.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

CORRIGÉ

Question 1. Soient les matrices

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\pi/2+\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(2\pi-\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M_α soit inversible.
(b) Si $\alpha = \pi/4$ et si, dans ce cas, $M_{\pi/4}$ est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Solution. (a) Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Cherchons donc le déterminant de la matrice donnée. On a

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

donc

$$\det(M_\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha).$$

Cela étant, on a

$$\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Il s'ensuit que la matrice est inversible si et seulement si $\alpha \neq \pi/4 + k\pi/2$ quel que soit l'entier k.

(b) Cherchons les valeurs propres de $M_{\pi/4}$, lesquelles sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(M_{\pi/4} - \lambda \mathbb{1}),\ \lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$M_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \det(M_{\pi/4} - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \lambda & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \lambda\left(\lambda - \sqrt{2}\right); \end{aligned}$$

les valeurs propres de $M_{\pi/4}$ sont donc $\sqrt{2}$ et 0. Comme ces valeurs propres sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Cherchons alors les vecteurs propres relatifs à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $M_{\pi/4}X = 0$. On a

$$M_{\pi/4}X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\sqrt{2}$ sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M_{\pi/4} - \sqrt{2}\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M_{\pi/4} - \sqrt{2}\,\mathbb{1})X = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} X = 0 \;\Leftrightarrow\; x + y = 0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\sqrt{2}$ sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Il s'ensuit que la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1} M_{\pi/4} S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Question 2. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
(a) Déterminer la matrice de transition.
(b) A longue échéance, quelle est la probabilité que le lapin mange des pissenlits ?

Solution. (a) Soient C_0, S_0 et P_0 les situations initiales respectives (manger des carottes, manger de la salade et manger des pissenlits) et C_1, S_1 et P_1 les situations au repas suivant. Vu les observations, on a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ S_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est donc

$$T = \begin{pmatrix} 7/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

(b) Puisque la matrice de transition est régulière, vu le système précédent, la probabilité qu'un lapin mange des pissenlits à long terme est donnée par la troisième composante du vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T - \mathbb{1})X = 0.$$

On a successivement

$$
\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x+2y+2z=0 \\ x-2y+2z=0 \\ x+2y-6z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x+4y=0 \\ x-2y+2z=0 \\ 4y-8z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=y \\ x-2y+2z=0 \\ z=y/2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=y \\ z=y/2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$
c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.
$$

Comme $c(1+1+1/2)=1 \Leftrightarrow c=2/5$, la probabilité qu'un lapin mange des pissenlits à long terme est de $1/5$, soit 20%.

Question 3. On donne la fonction f explicitement par

$$
f(x,y)=\arcsin\left(\frac{1}{xy}\right).
$$

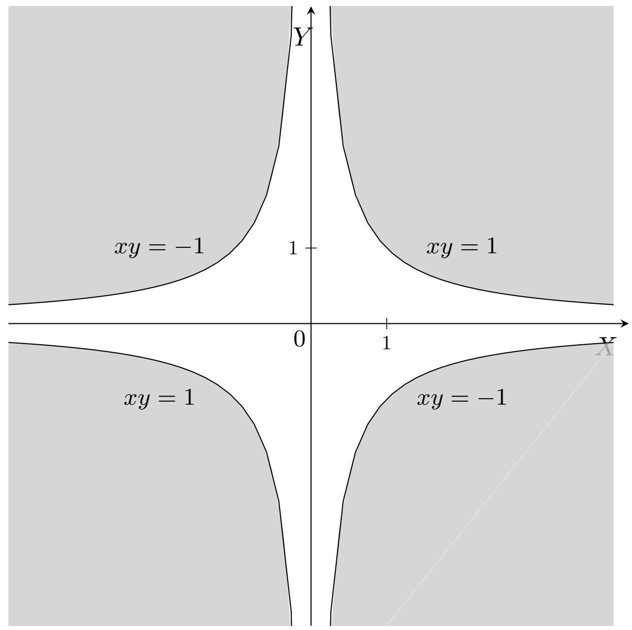
(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant ou en le coloriant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$
xD_x f(x,y)
$$

Solution. (a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$
\begin{aligned}
E \quad &= \quad \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy \neq 0 \text{ et } -1 < \frac{1}{xy} < 1\right\} \\
&= \quad \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy \neq 0 \text{ et } \frac{1}{|xy|} < 1\right\} \\
&= \quad \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 < |xy|\right\}.
\end{aligned}
$$

(b) La représentation de cet ensemble est la suivante (bords non compris).



(c) En tout point de E, on a

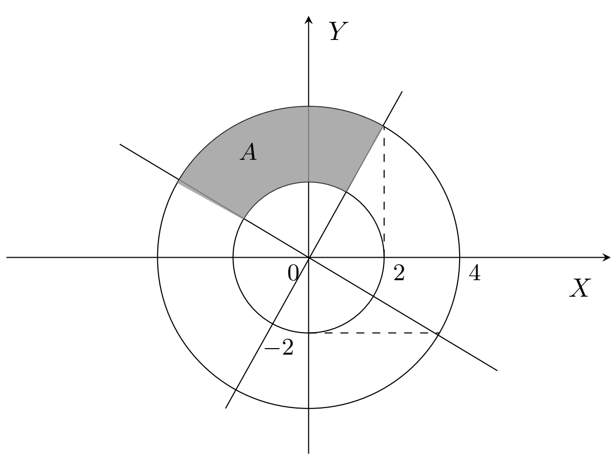
$$\begin{aligned} x\,D_x f(x,y) &= x\,(D\arcsin)(Z)\times D_x\frac{1}{xy}, \quad \text{avec} \quad Z=\frac{1}{xy} \\ &= x\,\frac{1}{\sqrt{1-Z^2}}\times\left(-\frac{1}{x^2y}\right), \quad \text{avec} \quad Z=\frac{1}{xy} \\ &= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2y^2-1}}\times\left(-\frac{1}{xy}\right) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2-1}} & \text{si } xy>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2-1}} & \text{si } xy<0. \end{cases} \end{aligned}$$

Question 4 (a) On donne l'ensemble $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 1,\ x^2\leq y^2\leq 1+x^2\}$. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I=\iint_E \frac{y}{x^2}\;dx\;dy.$$

(b) On donne l'ensemble colorié A ci-dessous. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I=\iint_A \frac{x^2+y^2}{y^2}\;dx\;dy.$$



Solution. (a) La fonction $f : (x, y) \mapsto y/x^2$ est continue sur E, ensemble fermé non borné et elle y est à valeurs positives. Examinons si elle y est intégrable.

L'ensemble E s'écrit aussi

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{1 + x^2}\right\}.$$

Cela étant,

• pour tout $x \geq 1$, la fonction $y \mapsto y/x^2$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[x, \sqrt{1 + x^2}]$ donc y est intégrable et on a

$$\int_x^{\sqrt{1+x^2}} \frac{y}{x^2}\, dy \;=\; \frac{1}{x^2} \int_x^{\sqrt{1+x^2}} y\, dy \;=\; \frac{1}{2x^2} \times \left(1 + x^2 - x^2\right) \;=\; \frac{1}{2x^2};$$

• la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (cf cas fondamentaux) et on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{2x^2}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que f est intégrable sur E et que l'on a

$$\iint_E \frac{y}{x^2}\, dx\, dy \;=\; \frac{1}{2}.$$

(b) La fonction $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)/y^2$ est continue sur l'ensemble fermé borné A, donc y est intégrable. Vu l'expression de cette fonction et la forme de A, une intégration par changement de variables polaires est naturelle.

Déterminons la description de A en fonction des coordonnées polaires. D'une part, les cercles intervenant dans la description de A ayant respectivement pour équation cartésienne $x^2+y^2 = 4$ et $x^2+y^2 = 16$, il est immédiat que $r \in [2, 4]$. D'autre part, les deux droites intervenant dans la description de A passent par l'origine ; l'une passe aussi par le point de coordonnées

$$(2, \sqrt{16 - 4}) = (2, 2\sqrt{3}) = 4 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 \left(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3)\right)$$

et l'autre par le point de coordonnées

$$(\sqrt{16 - 4}, -2) = (2\sqrt{3}, -2) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 4 \left(\cos(-\pi/6), \sin(-\pi/6)\right).$$

On obtient donc finalement les coordonnées polaires des points de A sont celles de l'ensemble

$$[2, 4] \times \left[\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6} + \pi\right] = [2, 4] \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

Cela étant on obtient alors successivement

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{x^2 + y^2}{y^2}\, dx\, dy &= \iint_{[2,4]\times[\pi/3,5\pi/6]} \frac{r^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \times r\, d\theta\, dr \\
&= \left(\int_2^4 r\, dr\right) \times \left(\int_{\pi/3}^{5\pi/6} \frac{1}{\sin^2(\theta)}\, d\theta\right) \\
&= \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) \times \left(\operatorname{cotan}(\pi/3) - \operatorname{cotan}(5\pi/6)\right) \\
&= 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) \\
&= 8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Question 5. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \exp(-x) - 1.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = -\exp(-x), \qquad D^2f(x) = \exp(-x), \qquad D^3f(x) = -\exp(-x).$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = -1$ et $D^2f(0) = 1$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & f(0) + Df(0)x \ = \ -x, \\ P_2(x) & = & f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\dfrac{x^2}{2} \ = \ -x + \dfrac{x^2}{2}, \ x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = \exp(-u_1) \ . \ \frac{x^2}{2} \ , \qquad R_2(x) = -\exp(-u_2) \ . \ \frac{x^3}{6}, \ x \in \mathbb{R}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.
Solution. Considérons les expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est toujours positif. Dès lors le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe opposé à celui de x. Par conséquent, $R_2(x) > 0$, $\forall x < 0$ et $R_2(x) < 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé au-dessus de celui de l'approximation P_2 si $x < 0$ et en dessous de celui de P_2 si $x > 0$.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.