



Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2025-2026

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 8 JUIN 2026
CHIMIE BLOC 1, GÉOLOGIE BLOC 2

QUESTIONNAIRE

Question 1 Soient les matrices

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M_α soit inversible.
(b) Si $\alpha = \pi/3$ et si, dans ce cas, $M_{\pi/3}$ est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Question 2

Pendant les congés de printemps, une personne peut soit rester chez elle (R), soit voyager en Belgique (B) soit voyager en France (F). D'une année à l'autre, elle peut changer de projet de vacances de la façon suivante :

- ayant voyagé en Belgique, elle a 2 chances sur 5 de voyager encore en Belgique l'année suivante, 2 chances sur 5 de voyager en France et une chance sur 5 de rester chez elle.
- ayant voyagé en France, elle a une chance sur 4 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 2 de rester chez elle.
- étant restée chez elle, elle a une chance sur 2 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 4 de rester chez elle.

Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme la personne voyage en Belgique.

Question 3 (a) Soit $R = [0, \pi/4] \times [-\pi, 0]$. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

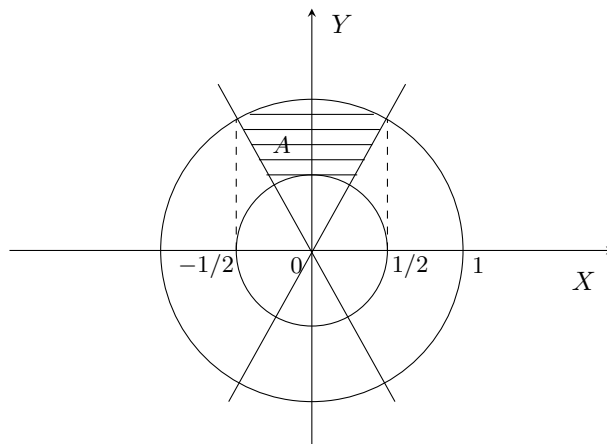
$$\iint_R \sin(2x + y) \, dx \, dy.$$

- (b) On donne l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \pi/8], -y \leq x \leq y\}$.
(b.1) Dans un repère orthonormé, représenter E en le hachurant ou en le coloriant.
(b.2) Si elle existe, en simplifiant au maximum, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_E \frac{1}{\cos^2(x + y)} \, dx \, dy.$$

(c) On donne l'ensemble fermé borné hachuré A ci-dessous. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A e^{x^2+y^2} \, dx \, dy.$$



Question 4 On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \cos^2(x).$$

- (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
- (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
- (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

CORRIGÉ

Question 1. Soient les matrices

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M_α soit inversible.
(b) Si $\alpha = \pi/3$ et si, dans ce cas, $M_{\pi/3}$ est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Solution. (a) Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Cherchons donc le déterminant de la matrice donnée. On a

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

donc

$$\det(M_\alpha) = \cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) = \cos(3\alpha).$$

Cela étant, on a

$$\cos(3\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

Il s'ensuit que la matrice est inversible si et seulement si $\alpha \neq \pi/6 + k\pi/3$ quel que soit l'entier k .

(b) Cherchons les valeurs propres de $M_{\pi/3}$, lesquelles sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(M_{\pi/3} - \lambda\mathbb{1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$M_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \det(M_{\pi/3} - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \left(\frac{-1}{2} - \lambda\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1); \end{aligned}$$

les valeurs propres de $M_{\pi/3}$ sont donc -1 et 1 . Comme ces valeurs propres sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Cherchons alors les vecteurs propres relatifs à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M_{\pi/3} - (-1)\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M_{\pi/3} + \mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y = 0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M_{\pi/3} - 1\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M_{\pi/3} - 1\mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -3/2 \end{pmatrix} X = 0 \Leftrightarrow -x + \sqrt{3}y = 0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Il s'ensuit que la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}M_{\pi/3}S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 2. Pendant les congés de printemps, une personne peut soit rester chez elle (**R**), soit voyager en Belgique (**B**) soit voyager en France (**F**). D'une année à l'autre, elle peut changer de projet de vacances de la façon suivante :

- ayant voyagé en Belgique, elle a 2 chances sur 5 de voyager encore en Belgique l'année suivante, 2 chances sur 5 de voyager en France et une chance sur 5 de rester chez elle.
- ayant voyagé en France, elle a une chance sur 4 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 2 de rester chez elle.
- étant restée chez elle, elle a une chance sur 2 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 4 de rester chez elle.

Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme la personne voyage en Belgique.

Solution. Soient B_0, F_0 et R_0 les situations initiales respectives (voyager en Belgique, voyager en France et rester chez soi) et B_1, F_1 et R_1 les situations l'année suivante. Vu les observations, on a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ F_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ F_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est donc

$$T = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T - 1\mathbb{1})X = 0.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
 (T - \mathbb{1})X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3/5 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & -3/4 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 5y + 10z = 0 \\ 8x - 15y + 5z = 0 \\ 4x + 10y - 15z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 15y + 5z = 0 \\ -4x - 10y + 15z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 15y + 5z = 0 \\ -8x - 20y + 30z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -35y + 35z = 0 \\ 8x - 15y + 5z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 5z/4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Comme $c(5/4 + 1 + 1) = 1 \Leftrightarrow 13c/4 = 1 \Leftrightarrow c = 4/13$, la probabilité qu'une personne voyage en Belgique à long terme est de $5/13$.

Question 3. (a) Soit $R = [0, \pi/4] \times [-\pi, 0]$. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\iint_R \sin(2x + y) \, dx \, dy.$$

(b) On donne l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \pi/8], -y \leq x \leq y\}$.

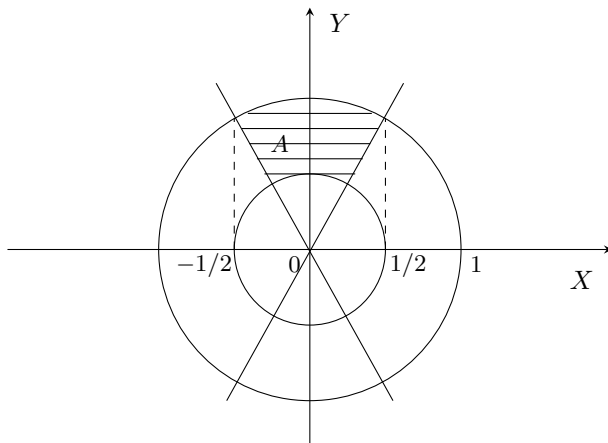
(b.1) Dans un repère orthonormé, représenter E en le hachurant ou en le coloriant.

(b.2) Si elle existe, en simplifiant au maximum, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_E \frac{1}{\cos^2(x + y)} \, dx \, dy.$$

(c) On donne l'ensemble fermé borné hachuré A ci-dessous. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A e^{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$



Solution. (a) La fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(2x + y)$ est continue sur \mathbb{R}^2 donc sur R , ensemble fermé borné; elle y est donc intégrable. Calculons donc

$$I = \iint_R \sin(2x + y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/4} \left(\int_{-\pi}^0 \sin(2x + y) \, dy \right) dx.$$

Comme

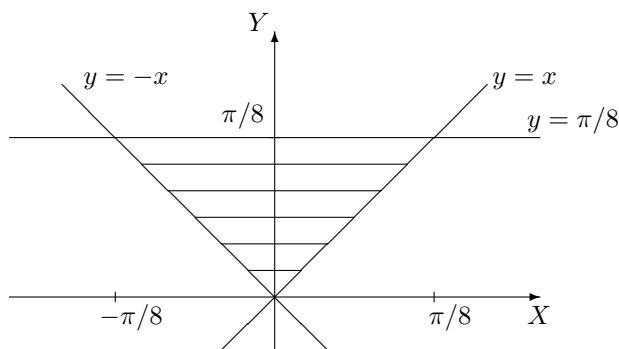
$$\int_{-\pi}^0 \sin(2x + y) \, dy = [-\cos(2x + y)]_{-\pi}^0 = -\cos(2x) + \cos(2x - \pi) = -2\cos(2x),$$

l'intégrale demandée vaut

$$I = -2 \int_0^{\pi/4} \cos(2x) \, dx = [-\sin(2x)]_0^{\pi/4} = -\sin(\pi/2) + \sin(0) = -1$$

puisque $\sin(0) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$.

(b.1) Dans un repère orthonormé, la représentation de E est la suivante, les points des bords étant compris dans l'ensemble.



(b.2) Comme on a $0 \leq x + y \leq 2y \leq \pi/4$ pour tout $(x, y) \in E$, comme la fonction cosinus est continue sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur $[0, \pi/4]$, la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{\cos^2(x + y)}$$

est continue sur E borné fermé donc intégrable sur cet ensemble.

Dès lors, on a successivement

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{1}{\cos^2(x + y)} \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/8} \left(\int_{-y}^y \frac{1}{\cos^2(x + y)} \, dx \right) dy \\ &= \int_0^{\pi/8} \left[\tan(x + y) \right]_{x=-y}^{x=y} dy \\ &= \int_0^{\pi/8} \tan(2y) \, dy \\ &= \int_0^{\pi/8} \frac{\sin(2y)}{\cos(2y)} \, dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} D \ln(\cos(2y)) \, dy \\ &= -\frac{1}{2} \left[\ln(\cos(2y)) \right]_0^{\pi/8} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(1) - \ln(\sqrt{2}/2) \right) \\ &= \frac{1}{4} \ln(2). \end{aligned}$$

(c) La fonction $f : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ est continue sur l'ensemble fermé borné A , donc y est intégrable. Vu l'expression de cette fonction et la forme de A , une intégration par changement de variables polaires est naturelle.

Déterminons la description de A en fonction des coordonnées polaires. D'une part, les cercles intervenant dans la description de A ayant respectivement pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1/4$ et $x^2 + y^2 = 1$, il est immédiat que $r \in [1/2, 1]$. D'autre part, les deux droites intervenant dans la description de A passent par l'origine ; l'une passe aussi par le point de coordonnées

$$(1/2, \sqrt{1-1/4}) = (1/2, \sqrt{3}/2) = \left(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3) \right)$$

et l'autre par le point de coordonnées

$$(-1/2, \sqrt{1-1/4}) = (-1/2, \sqrt{3}/2) = \left(\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3) \right).$$

On obtient donc finalement que les coordonnées polaires des points de A sont celles de l'ensemble

$$\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right].$$

Cela étant on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \iint_A e^{x^2+y^2} dx dy &= \iint_{[1/2,1] \times [\pi/3,2\pi/3]} e^{r^2} \times r d\theta dr \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_{1/2}^1 2r e^{r^2} dr \right) \times \left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\theta \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left[e^{r^2} \right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{\pi}{6} (e - \sqrt[4]{e}). \end{aligned}$$

Question 4. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \cos^2(x).$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur \mathbb{R} . En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = -2 \sin(x) \cos(x) = -\sin(2x), \quad D^2f(x) = -2 \cos(2x), \quad D^3f(x) = 4 \sin(2x).$$

Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -2$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)x = 1, \\ P_2(x) &= f(0) + Df(0)x + D^2f(0) \frac{x^2}{2} = 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = -\cos(2u_1) x^2, \quad R_2(x) = \frac{2}{3} \sin(2u_2) x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.

Solution. Considérons les expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est toujours négatif. Dès lors le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est toujours positif. Dès lors le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_2 au voisinage de 0.

Voici la représentation graphique de P_1 , P_2 et f au voisinage de 0.

