Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2023-2024

Corrigé de l'examen du 2 septembre 2024

Chimie bloc 1, géologie bloc 2

Version 22 juillet 2024

QUESTIONNAIRE

1. (18 points) Soient les matrices

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\pi/2+\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(2\pi-\alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M_α soit inversible.
(b) Si $\alpha = \pi/4$ et si, dans ce cas, $M_{\pi/4}$ est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

2. (18 points) Au goûter dans un internat, les enfants peuvent choisir de manger soit une crêpe, soit du riz au lait, soit une gaufre. Un même jour, ils ne peuvent choisir qu'un seul type de goûter mais, le jour suivant, ils peuvent modifier leur choix s'ils le souhaitent. Jamais un enfant ne rate ce repas !
Le cuisinier observe un enfant et constate que s'il a mangé une crêpe un jour il en mangera encore une le lendemain dans 1 cas sur 2 ; sinon il mangera du riz au lait ou une gaufre de façon équiprobable.
S'il a mangé du riz au lait un jour, il en mangera à nouveau le lendemain avec une probabilité de 70 % ; sinon il mangera une crêpe 1 fois sur 5 ou une gaufre 1 fois sur 10.
S'il a mangé une gaufre, au goûter suivant il y a 2 chances sur 5 qu'il mange une crêpe, 1 chance sur 5 qu'il mange du riz au lait et 2 chances sur 5 qu'il mange à nouveau une gaufre.

(a) Déterminer la matrice de transition.
(b) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant mange une crêpe ?

3. (14 points) On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{1}{xy}\right).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant ou en le coloriant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_xf(x,y)$$

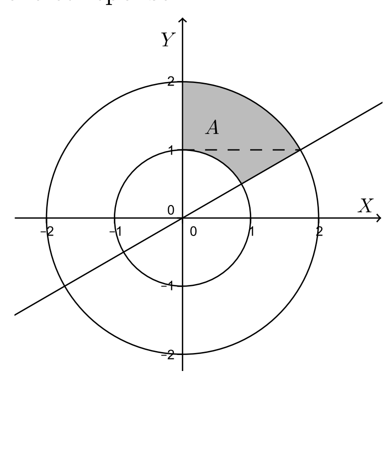
4. (20 points) (a) On donne

$$I \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)dx.$$

(a1) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(a2) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

(b) On donne la partie fermée du plan coloriée ci-contre notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$.
Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_A f(x,y)\ dx\ dy$$



5. (10 points) On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \ln(1-2x).$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

CORRIGÉ

Question 1. Soient les matrices

$$M_\alpha = \left(\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & \cos(\pi/2+\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(2\pi-\alpha) \end{array} \right), \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M_α soit inversible.
(b) Si $\alpha = \pi/4$ et si, dans ce cas, $M_{\pi/4}$ est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Solution. (a) Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Cherchons donc le déterminant de la matrice donnée. On a

$$M_\alpha = \left(\begin{array}{cc} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{array} \right)$$

donc

$$\det(M_\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha).$$

Cela étant, on a

$$\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Il s'ensuit que la matrice est inversible si et seulement si $\alpha \neq \pi/4 + k\pi/2$ quel que soit l'entier k.

(b) Cherchons les valeurs propres de $M_{\pi/4}$, lesquelles sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(M_{\pi/4} - \lambda \mathbb{1}),\ \lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$M_{\pi/4} = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array} \right)$$

donc

$$\begin{array}{rcl} det(M_{\pi/4} - \lambda\mathbb{1}) & = & \det \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2-\lambda & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2-\lambda \end{array} \right) \\ & = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\ & = & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ & = & \lambda \left(\lambda - \sqrt{2} \right); \end{array}$$

les valeurs propres de $M_{\pi/4}$ sont donc $\sqrt{2}$ et 0. Comme ces valeurs propres sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Cherchons alors les vecteurs propres relatifs à ces valeurs propres.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs non nuls

$$X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$$

tels que $M_{\pi/4}X = 0$. On a

$$M_{\pi/4}X = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array} \right) X = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$c \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\sqrt{2}$ sont les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M_{\pi/4} - \sqrt{2}\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M_{\pi/4} - \sqrt{2}\,\mathbb{1})X = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} X = 0 \;\Leftrightarrow\; x + y = 0.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\sqrt{2}$ sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Il s'ensuit que la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1} M_{\pi/4} S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Question 2. Au goûter dans un internat, les enfants peuvent choisir de manger soit une crêpe, soit du riz au lait, soit une gaufre. Un même jour, ils ne peuvent choisir qu'un seul type de goûter mais, le jour suivant, ils peuvent modifier leur choix s'ils le souhaitent. Jamais un enfant ne rate ce repas !

Le cuisinier observe un enfant et constate que s'il a mangé une crêpe un jour il en mangera encore une le lendemain dans 1 cas sur 2 ; sinon il mangera du riz au lait ou une gaufre de façon équiprobable.

S'il a mangé du riz au lait un jour, il en mangera à nouveau le lendemain avec une probabilité de 70 % ; sinon il mangera une crêpe 1 fois sur 5 ou une gaufre 1 fois sur 10.

S'il a mangé une gaufre, au goûter suivant il y a 2 chances sur 5 qu'il mange une crêpe, 1 chance sur 5 qu'il mange du riz au lait et 2 chances sur 5 qu'il mange à nouveau une gaufre.

(a) Déterminer la matrice de transition.
(b) Quelle est, à long terme, la probabilité que l'enfant mange une crêpe ?

Solution. (a) Soient C_0, R_0 et G_0 les situations initiales respectives (manger une crêpe, du riz, une gaufre) et C_1, R_1 et G_1 les situations au goéter suivant. Vu les observations, on a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ R_1 \\ G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 2/5 \\ 1/4 & 7/10 & 1/5 \\ 1/4 & 1/10 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ R_0 \\ G_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est ainsi

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 2/5 \\ 1/4 & 7/10 & 1/5 \\ 1/4 & 1/10 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

(b) Puisque la matrice de transition est régulière, vu le système précédent, la probabilité que l'enfant mange une crêpe à long terme est donnée par la première composante du vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que $(T - \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(T - \mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/5 & 2/5 \\ 1/4 & -3/10 & 1/5 \\ 1/4 & 1/10 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x/2 + y/5 + 2z/5 = 0 \\ x/4 - 3y/10 + z/5 = 0 \\ x/4 + y/10 - 3z/5 = 0. \end{cases}$$

Si on additionne les deux premières équations, on trouve la troisième dans laquelle tous les termes ont été changés de signe ; on obtient ainsi

$$(T-\mathbb{1})X=0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -x/2+y/5+2z/5=0 \\ x/4-3y/10+z/5=0. \end{array}\right.$$

Maintenant, en ajoutant d'abord deux fois la seconde équation à la première on obtient successivement

$$\begin{aligned}(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -2y/5+4z/5=0 \\ x/4-3y/10+z/5=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z=y/2 \\ x/4-3y/10+y/10=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z=y/2 \\ x=4y/5. \end{array}\right.\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c\in\mathbb{C}_0.$$

Comme $c(4/5+1+1/2)=1 \;\Leftrightarrow\; 23c/10=1 \;\Leftrightarrow\; c=10/23$, la probabilité que l'enfant mange une crêpe à long terme est de

$$\frac{10}{23}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{23}.$$

Question 3. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{1}{xy}\right).$$

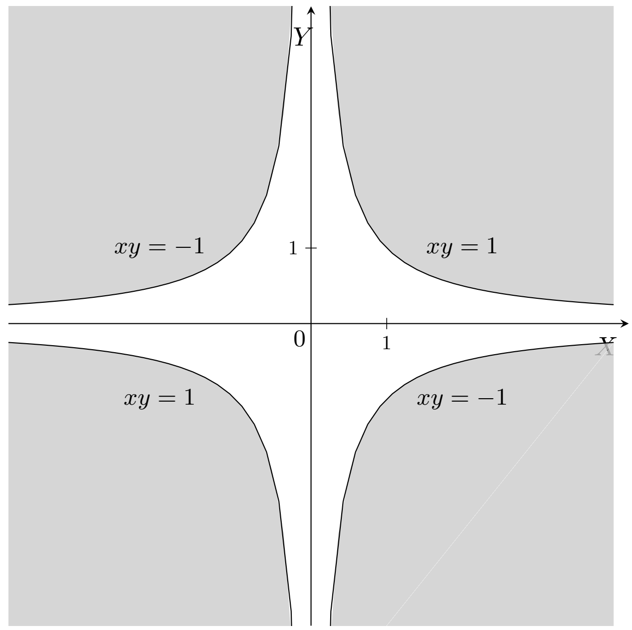
(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant ou en le coloriant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_xf(x,y)$$

Solution. (a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0 \text{ et } -1<\frac{1}{xy}<1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0 \text{ et } \frac{1}{|xy|}<1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<|xy|\right\}. \end{aligned}$$

(b) La représentation de cet ensemble est la suivante (bords non compris).



(c) En tout point de E, on a

$$
\begin{aligned}
x\, D_x f(x,y) &= x\,(D\arcsin)(Z) \times D_x \frac{1}{xy}, \quad \text{avec} \quad Z = \frac{1}{xy}\\
&= x\,\frac{1}{\sqrt{1-Z^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2 y}\right), \quad \text{avec} \quad Z = \frac{1}{xy}\\
&= \frac{|xy|}{\sqrt{x^2y^2-1}} \times \left(-\frac{1}{xy}\right)\\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2-1}} & \text{si } xy > 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2-1}} & \text{si } xy < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

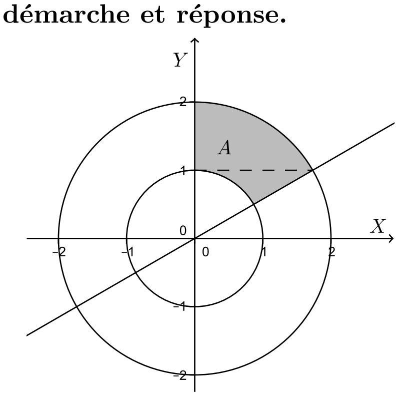
Question 4. (a) On donne

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|x|}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \right) dx.$$

(a1) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(a2) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

(b) On donne la partie fermée du plan coloriée ci-contre notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$. Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

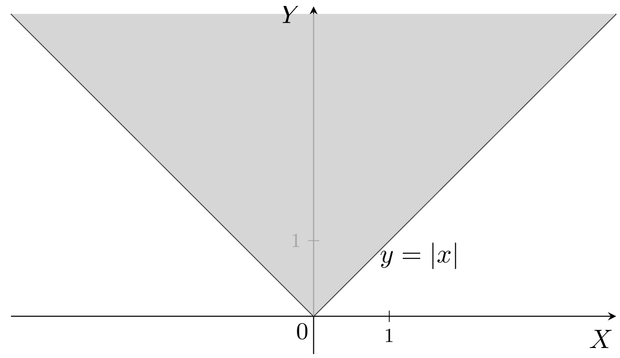
$$I = \iint_A f(x,y)\ dx\ dy$$



Solution. (a1) L'ensemble d'intégration est

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \right\}.$$

On a alors la représentation suivante, bords compris.



(a2) La fonction $f:(x,y)\mapsto e^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc sur l'ensemble d'intégration E, lequel est fermé mais non borné, et elle y est à valeurs positives. Examinons si elle y est intégrable.

Comme la fonction est à valeurs positives, si on sait intégrer successivement par rapport à l'une puis l'autre variable, alors la fonction sera intégrable sur l'ensemble donné E (partie du plan) et l'intégrale sera égale à la succession des intégrales simples, et cela quel que soit l'ordre d'intégration.

Cela étant, vu la description donnée de l'ensemble d'intégration et la fonction à intégrer, on ne voit pas comment on pourrait intégrer par rapport à y en premier lieu. Si on veut intégrer en premier lieu par rapport à x, il nous faut tout d'abord exprimer l'ensemble d'intégration autrement, de façon à permuter l'ordre d'intégration. On a

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\leq y\right\} \;=\; \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\in[0,+\infty[\text{ et } x\in[-y,y]\Big\}.$$

Cela étant,
- pour tout $y\geq 0$, la fonction $x\mapsto e^{-y^2}$ est constante sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur l'ensemble borné fermé $[-y,y]$ et on a
$$\int_{-y}^{y} e^{-y^2}\,dx \;=\; e^{-y^2}\int_{-y}^{y}1\,dx \;=\; 2y\,e^{-y^2};$$
- la fonction $y\mapsto 2y\,e^{-y^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: de fait, elle y est continue, à valeurs positives,
$$\int_0^t 2y\,e^{-y^2}\,dy=-\int_0^t De^{-y^2}\,dy=-e^{-t^2}+1,\quad \forall t>0$$

donc
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t 2y\,e^{-y^2}\,dy=1$$
puisque $\lim_{t\to+\infty}e^{-t^2}=0$. On a alors aussi
$$\int_0^{+\infty}2y\,e^{-y^2}\,dy=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t 2y\,e^{-y^2}\,dy=1.$$

Il s'ensuit que f est intégrable sur E et que l'on a

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{|x|}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)dx \;=\; \iint_E e^{-y^2}\,dx\,dy \;=\; \int_0^{+\infty}\left(\int_{-y}^{y}e^{-y^2}\,dx\right)\,dy=1.$$

(b) La fonction $f:(x,y)\mapsto\sin(x^2+y^2)$ est continue sur l'ensemble fermé borné A, donc y est intégrable. Vu l'expression de cette fonction et la forme de A, une intégration par changement de variables polaires est naturelle.

Déterminons la description de A en fonction des coordonnées polaires. D'une part, les cercles intervenant dans la description de A ayant respectivement pour équation cartésienne $x^2+y^2=1$ et $x^2+y^2=4$, il est immédiat que $r\in[1,2]$. D'autre part, en plus de l'axe Y, la droite intervenant dans la description de A passe par l'origine et par le point de coordonnées

$$(\sqrt{4-1},1)=(\sqrt{3},1)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos(\pi/6),\sin(\pi/6)\right).$$

On obtient donc finalement que les coordonnées polaires des points de A sont celles de l'ensemble

$$[1,2]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right].$$

Cela étant, en n'oubliant pas le jacobien r du changement de variables, on obtient alors successivement

$$\begin{aligned}\iint_A \sin(x^2+y^2)\ dx\ dy &= \iint_{[1,2]\times[\pi/6,\pi/2]} \sin(r^2)\, r\ d\theta\ dr\\ &= \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} 1\ d\theta\right)\times\left(\int_1^2 r\ \sin(r^2)\ dr\right)\\ &= \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{-1}{2}\int_1^2 D\cos(r^2)\ dr\\ &= \frac{\pi}{6}\ \Big(\cos(1)-\cos(4)\Big).\end{aligned}$$

Question 5. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x)=\ln(1-2x).$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.

Solution. (a) Puisque la fonction logarithme est infiniment dérivable sur $]0,+\infty[$, la fonction de fonction donnée est infiniment dérivable sur $]-\infty,1/2[$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x)=\frac{-2}{1-2x}=\frac{2}{2x-1},\quad D^2f(x)=\frac{-4}{(2x-1)^2},\quad D^3f(x)=\frac{16}{(2x-1)^3}.$$

Comme $f(0)=0$, $Df(0)=-2$ et $D^2f(0)=-4$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned}P_1(x) &= f(0)+Df(0)x \ = \ -2x,\ x\in\mathbb{R},\\ P_2(x) &= P_1(x)+D^2f(0)\frac{x^2}{2}\ =\ -2x-2x^2,\ x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

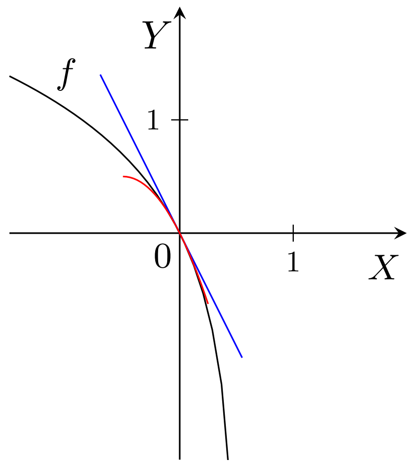
(b) Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned}R_1(x) &= D^2f(u_1)\ \frac{x^2}{2}=\frac{-4}{(2u_1-1)^2}\ \frac{x^2}{2}=\frac{-2x^2}{(2u_1-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\\ R_2(x) &= D^3f(u_2)\ \frac{x^3}{3!}=\frac{16}{(2u_2-1)^3}\ \frac{x^3}{3!}=\frac{8x^3}{3(2u_2-1)^3},\ x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(c) Vu son expression, R_1 est négatif quel que soit x. Comme $f(x)=P_1(x)+R_1(x)$, le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1.

Examinons alors le cas de P_2 et f. On a $2t-1>0$ (resp. $2t-1<0$) si et seulement si $t>1/2$ (resp. $t<1/2$). Si x est voisin de 0, alors $x<1/2$ donc aussi $u_2<1/2$ puisque u_2 est compris entre 0 et x. Il s'ensuit que $2u_2-1<0$ si x est voisin de 0 donc son cube aussi et par conséquent $R_2(x)$ a le signe opposé à celui de x au voisinage de 0. Comme $f(x)=P_2(x)+R_2(x)$, on a donc $f(x)\le P_2(x)$ si x est positif et voisin de 0 et $f(x)\ge P_2(x)$ si x est négatif et voisin de 0. Au voisinage de 0, le graphique de f est donc situé en dessous de celui de P_2 si x est positif et au-dessus si x est négatif.

Voici la représentation graphique de P_1 en bleu, P_2 en rouge et f en noir au voisinage de 0.



Y
f
1
0
1
X