1, 2, 3... Sciences

Année académique 2017-2018

Mathématique (partim B)

Corrigé de l'interrogation du 16 avril 2018

Version 14 mars 2018

QUESTIONNAIRE

Questions de théorie *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. On donne trois matrices carrées de dimension n, notées A, B, C et on désigne par I la matrice identité de dimension n. Démontrer que si $BA = AC = I$ alors $B = C$.

2. (a) Enoncer la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.
(b) Si f est une fonction continue sur A, déterminer, en utilisant le point (a), la nouvelle expression de l'intégrale
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{avec} \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\; x \leq 0,\; x \leq y \leq -x\right\}$$
si on travaille en coordonnées polaires.
Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.

Exercices *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. Soient les matrices A, B, C et X données par
$$A = \begin{pmatrix} a & b-a & -b \\ a & b & -a \\ c & 2c & -3c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
où $a, b, c \in \mathbb{C}$.

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible ; dans ces conditions, calculer **uniquement** $(A^{-1})_{32}$. Simplifier au maximum l'expression.

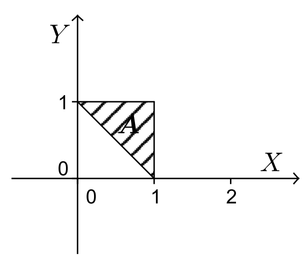
(b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

(c) Montrer $\boxed{\textbf{directement}}$ que X est un vecteur propre de C de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.

2. On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln\left(\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$.
(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction et le représenter dans un repère orthonormé.

(b) Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $\sqrt{y^2-x^2}\; D_x f(x,y)$.

3. Si possible, calculer l'intégrale suivante
$$\iint_A \cos(x^2)\,dx\,dy,$$
où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



4. On donne
$$I \; = \; \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{e^{-y/x}}{1+x} \; dx \right) \; dy.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

CORRIGE

Questions de théorie

1. **On donne trois matrices carrées de dimension n, notées A, B, C et on désigne par I la matrice identité de dimension n. Démontrer que si $BA = AC = I$ alors $B = C$.**

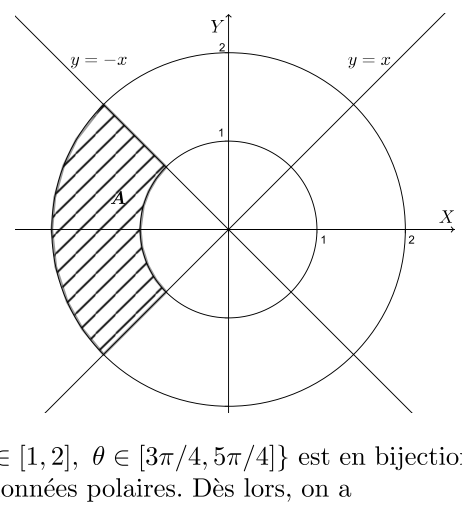
   Solution. Voir cours (amphi et syllabus)

2. **(a) Enoncer la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.**

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus)

   (b) Si f est une fonction continue sur A, déterminer, en utilisant le point (a), la nouvelle expression de l'intégrale
$$\iint_A f(x,y) \; dx \; dy \qquad \textbf{avec} \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \; x \leq 0, \; x \leq y \leq -x\right\}$$
   si on travaille en coordonnées polaires.
   Représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant.

   Solution. L'ensemble A est la partie du plan hachurée ci-dessous, les points des bords étant inclus dans l'ensemble.



   L'ensemble $A' = \{(r,\theta) \; : \; r \in [1,2], \; \theta \in [3\pi/4, 5\pi/4]\}$ est en bijection avec l'ensemble A par changement de variables en coordonnées polaires. Dès lors, on a
$$\iint_A f(x,y) \; dx \; dy = \iint_{A'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r \; d\theta \; dr$$
$$= \int_1^2 r \left(\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \; d\theta \right) dr = \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \left(\int_1^2 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r \; dr \right) d\theta.$$

$\boxed{\textit{Exercices}}$

1. **Soient les matrices A, B, C et X données par**

$$A = \begin{pmatrix} a & b-a & -b \\ a & b & -a \\ c & 2c & -3c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$.

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible ; dans ces conditions, calculer uniquement $(A^{-1})_{32}$. Simplifier au maximum l'expression.

(b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?

(c) Montrer $\boxed{\textbf{directement}}$ que X est un vecteur propre de C de valeur propre λ_0 et donner la valeur de λ_0.

Solution. (a) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. En remplaçant la première colonne par la somme des trois colonnes et en appliquant la première loi des mineurs à la première colonne, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & b-a & -b \\ b & b & -a \\ 0 & 2c & -3c \end{vmatrix} = -b((b-a)(-3c)+2bc) = bc(3b-3a-2b) = bc(b-3a).$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si $b \neq 0,\ c \neq 0$ et $b \neq 3a$.

Dans ce cas, l'élément $(A^{-1})_{32}$ peut être calculé et vaut

$$(A^{-1})_{32} = \frac{1}{bc(b-3a)}\,(\mathcal{A})_{23} = \frac{-1}{bc(b-3a)} \begin{vmatrix} a & b-a \\ c & 2c \end{vmatrix} = \frac{-c(2a-b+a)}{bc(b-3a)} = \frac{1}{b}.$$

(b) Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de B sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(B - \lambda I) = 0$. On a

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)(-2-\lambda)+2) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda)$$

si on applique la première loi des mineurs à la troisième ligne. Ainsi,

$$\det(B-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(\lambda+1) = 0$$

et les valeurs propres de B sont $0,\ 1$ et -1. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

(c) Par définition, un vecteur non nul X est un vecteur propre de C de valeur propre λ_0 si et seulement si $CX = \lambda_0 X$. Comme

$$CX = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = (-4) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

X est bien un vecteur propre de C de valeur propre -4.

2. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \ln\left(\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$.**

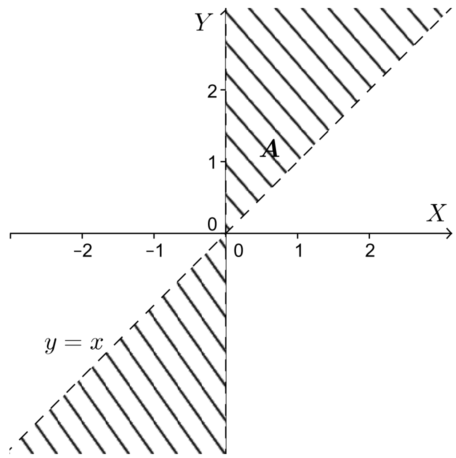
(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction et le représenter dans un repère orthonormé.

(b) Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $\sqrt{y^2 - x^2}\ D_x f(x,y)$.

Solution. La fonction f est dérivable sur

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) > 0,\ -1 < \frac{x}{y} < 1,\ y \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < \frac{x}{y} < 1,\ y \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < y\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < x < 0\right\}. \end{aligned}$$

Sa représentation graphique est l'ensemble hachuré ci-dessous, bords exclus.



Dans A, on a

$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= \frac{1}{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \frac{1}{y} \\ &= \frac{|y|}{y\ \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)\ \sqrt{y^2-x^2}} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si } y > 0 \\ \dfrac{-1}{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

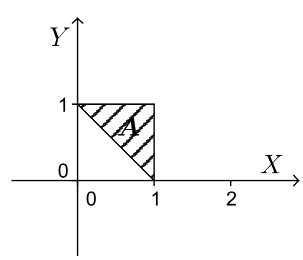
Donc,

$$\sqrt{y^2-x^2}\ D_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)} & \text{si } y > 0 \\ \dfrac{-1}{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)} & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

3. Si possible, calculer l'intégrale suivante

$$\iint_A \cos\left(x^2\right) dx\, dy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-contre.



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto \cos(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc continue sur le fermé borné $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [-x+1,1]\}$ et y est par conséquent intégrable. On a

$$\begin{aligned}\iint_A \cos(x^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x+1}^1 \cos(x^2)\ dy\right)\ dx\\ &= \int_0^1 \cos(x^2)\,[y]_{-x+1}^1\ dx\\ &= \int_0^1 x\cos(x^2)\ dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(x^2)\right]_0^1 = \frac{\sin(1)}{2}.\end{aligned}$$

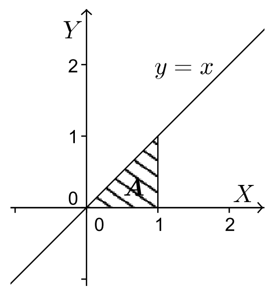
4. **On donne**

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{e^{-y/x}}{1+x}\ dx\right)\ dy.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.

(b) Si possible, calculer la valeur de I en justifiant vos démarche et réponse.

Solution. (a) La représentation graphique de l'ensemble A d'intégration est la suivante.



(b) La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{-y/x}}{1+x}$ est continue sur l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 0\right\}$.
Elle est donc continue et positive sur $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in]0,1]\ ,\ y \in [0,x]\right\} \subset B$.
Etudions l'intégrabilité de f sur A, borné non fermé.
Pour x fixé dans $]0,1]$, la fonction $h : y \mapsto \left|\dfrac{e^{-y/x}}{1+x}\right| = \dfrac{e^{-y/x}}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le fermé borné $[0,x]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^x \frac{e^{-y/x}}{1+x}\ dy = \frac{-x}{1+x}\int_0^x \frac{-1}{x}e^{-y/x}\ dy = \frac{-x}{1+x}\ \left[e^{-y/x}\right]_0^x = \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{x}{1+x}.$$

La fonction $g : x \mapsto \left(1-\frac{1}{e}\right)\dfrac{x}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc sur $[0,1]$, fermé borné. Elle y est intégrable. Ainsi, f est intégrable sur A et comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\left(\int_y^1 \frac{e^{-y/x}}{1+x}\ dx\right)\ dy = \int_0^1\left(\int_0^x \frac{e^{-y/x}}{1+x}\ dy\right)\ dx\\ &= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{x}{1+x}\ dx = \left(1-\frac{1}{e}\right)\int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}\ dx\\ &= \left(1-\frac{1}{e}\right)[x-\ln(|x+1|)]_0^1 = \frac{e-1}{e}(1-\ln(2)).\end{aligned}$$