1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2018-2019

Mathématique (partim B)

Corrigé de l'interrogation du 23 avril 2019

Version 25 avril 2019

QUESTIONNAIRE

Questions de théorie *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. Soit $f : t \mapsto g(1-t^2, \ln(t))$ et g continûment dérivable sur $A =]0, +\infty[\times]-1, 1[$.
   Enoncer le théorème de dérivabilité d'une fonction composée dans le cas de la fonction f en déterminant son domaine de dérivabilité ainsi que sa dérivée en fonction des dérivées partielles de g.

2. (a) On donne la matrice carrée $A = (C_1, C_2, C_3)$, où C_k est la k ième colonne de A. Si le déterminant de A vaut α ($\alpha \in \mathbb{C}$), que vaut le déterminant de $B = (C_3, 3C_2, C_1)$ en fonction de α ?
   Enoncer les propriétés qui permettent de le calculer.

   (b) Soient A une matrice (3×4) et B une matrice (4×6).
   - Peut-on effectuer le produit AB ? Si oui, définir l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la quatrième colonne de ce produit AB.
   - Même question pour le produit BA.

Exercices *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. Soient les matrices A et B données par
$$A = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha) & 0 & 2 \\ 1 & \sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha) & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   où $\alpha \in [0, 2\pi]$.

   (a) Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible ; dans ces conditions, calculer **uniquement** $(A^{-1})_{1,2}$. Simplifier au maximum l'expression.

   (b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice qui y conduit.

2. On donne la fonction f explicitement par
$$f(x, y) = \ln\left(2x - y^2\right).$$
   (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
   (b) Représenter ce domaine dans un repère orthonormé en le hachurant.
   (c) Si c'est possible, déterminer la valeur des dérivées partielles de la fonction f au point de coordonnées cartésiennes (5,-3).

3. On donne l'ensemble $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \text{ et } y \geq 1\right\}$.
   Si possible, déterminer
$$I = \iint_A \frac{xe^{-y^2}}{y}\, dx\, dy$$
   après avoir représenté l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.

CORRIGE

Questions de théorie

1. **Soit $f : t \mapsto g(1-t^2, \ln(t))$ et g continûment dérivable sur $A =]0,+\infty[\times]-1,1[$.**
Enoncer le théorème de dérivabilité d'une fonction composée dans le cas de la fonction f en déterminant son domaine de dérivabilité ainsi que sa dérivée en fonction des dérivées partielles de g.

   Solution. Soient
   - g continûment dérivable sur $A =]0,+\infty[\times]-1,1[$, ouvert de $\mathbb{R}^2$
   - $g_1 : t \mapsto 1-t^2$ et $g_2 : t \mapsto \ln(t)$ deux fonctions dérivables sur I, intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $\{(1-t^2, \ln(t)) : t \in I\} \subset A$.

   Alors $f : t \mapsto g(1-t^2, \ln(t))$ est dérivable sur I et on a

$$(Df)(t) = (D_u g)_{(1-t^2,\ln(t))} \cdot D(1-t^2) + (D_v g)_{(1-t^2,\ln(t))} \cdot D\ln(t)$$

$$= -2t\,(D_u g)_{(1-t^2,\ln(t))} + \frac{1}{t}\,(D_v g)_{(1-t^2,\ln(t))}$$

   si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de g.

   Le domaine de dérivabilité de f est

$$I = \{t \in \mathbb{R} : t > 0, 1-t^2 > 0, -1 < \ln(t) < 1\} = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ -1 < t < 1,\ e^{-1} < t < e\} = \left]\frac{1}{e}, 1\right[.$$

2. **(a) On donne la matrice carrée $A = (C_1, C_2, C_3)$, où C_k est la k ième colonne de A. Si le déterminant de A vaut α ($\alpha \in \mathbb{C}$), que vaut le déterminant de $B = (C_3, 3C_2, C_1)$ en fonction de α ?**
Enoncer les propriétés qui permettent de le calculer.

   Solution. On sait que si on permute deux rangées parallèles d'un déterminant, ce déterminant change de signe. De plus, pour multiplier un déterminant par un nombre non nul, on multiplie tous les éléments d'une rangée par ce nombre. Dès lors,

$$\det B = -3\alpha.$$

   (b) Soient A une matrice (3×4) et B une matrice (4×6).
   - Peut-on effectuer le produit AB ? Si oui, définir l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la quatrième colonne de ce produit AB.
   - Même question pour le produit BA.

   Solution. Le produit AB peut être effectué puisque le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B, à savoir 4. L'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la quatrième colonne de ce produit AB vaut

$$(AB)_{2,4} = \sum_{k=1}^{4} (A)_{2,k}(B)_{k,4}.$$

   Par contre, le produit BA ne peut pas être effectué puisque le nombre de colonnes de la matrice B, à savoir 6, n'est pas égal au nombre de lignes de la matrice A, à savoir 3.

Exercices

1. **Soient les matrices A et B données par**
$$A = \left(\begin{array}{ccc} \sin(2\alpha) & 0 & 2 \\ 1 & \sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha) & 2 \end{array} \right), \qquad B = \left(\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{array} \right)$$
où $\alpha \in [0, 2\pi]$.

(a) Donner la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible ; dans ces conditions, calculer uniquement $(A^{-1})_{1,2}$. Simplifier au maximum l'expression.

(b) La matrice B est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution. (a) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
D'une part, les formules de trigonométrie permettent d'écrire
$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & 0 & 2 \\ 1 & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha) & 2 \end{array} \right) \qquad \text{où } \alpha \in [0, 2\pi].$$
D'autre part, en remplaçant la première ligne par le retrait de la troisième ligne à la première et en appliquant la première loi des mineurs à la troisième colonne, on a
$$\begin{aligned} \det A &= \left| \begin{array}{ccc} \sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 1 & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha) & 2 \end{array} \right| \\ &= 2\left(-\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\right) \\ &= 2\cos(\alpha)\left(1 - \sin^2(\alpha)\right) \\ &= 2\cos^3(\alpha). \end{aligned}$$
La matrice A est donc inversible si et seulement si
$$\cos^3(\alpha) \neq 0 \text{ et } \alpha \in [0, 2\pi],$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha \neq \frac{3\pi}{2}.$$
Dans ce cas, l'élément $(A^{-1})_{1,2}$ peut être calculé et, si $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs, cet élément vaut
$$(A^{-1})_{1,2} = \frac{1}{\det A}\ (\widetilde{\mathcal{A}})_{1,2} = \frac{1}{2\cos^3(\alpha)}\ (\mathcal{A})_{2,1} = \frac{-1}{2\cos^3(\alpha)} \left| \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ \cos(\alpha) & 2 \end{array} \right| = \frac{2\cos(\alpha)}{2\cos^3(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}.$$
(b) Si I est la matrice identité de dimension 2 alors les valeurs propres de B sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(B - \lambda I) = 0$. Si on applique la définition pour le calcul de ce déterminant, on a
$$\det(B - \lambda I) = \left| \begin{array}{cc} 4-\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{array} \right| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$
Ainsi,
$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$
et les valeurs propres de B sont 1 et 3. Comme ce sont des valeurs propres simples, la matrice est diagonalisable.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$ tels que $(B - I)X = 0$ ce qui est équivalent à
$$\left(\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = y \end{array} \right. .$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs $c\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ avec $c\in\mathbb{C}_0$.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont les vecteurs non nuls $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que $(B-3I)X=0$ ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix}1&3\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=0\\-x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3y\\y=y\end{cases}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc les vecteurs $c\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ avec $c\in\mathbb{C}_0$.

Dès lors, la matrice inversible $S=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&1\end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}BS=\Delta=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$.

2. **On donne la fonction f explicitement par**

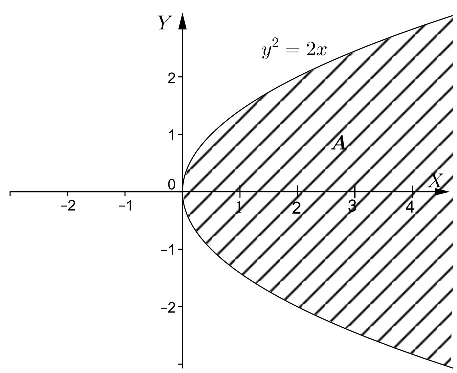
$$f(x,y)=\ln\left(2x-y^2\right).$$

(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
(b) Représenter ce domaine dans un repère orthonormé en le hachurant.
(c) Si c'est possible, déterminer la valeur des dérivées partielles de la fonction f au point de coordonnées cartésiennes (5,-3).

Solution. (a) Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x-y^2>0\}.$$

(b) La représentation graphique de cet ensemble est la partie hachurée du plan, bords exclus.



(c) La fonction f est dérivable au point de coordonnées $(5,-3)$ puisque ce point est un élément de A. Comme

$$D_xf(x,y)=\frac{2}{2x-y^2}\qquad\text{et}\qquad D_yf(x,y)=\frac{-2y}{2x-y^2},$$

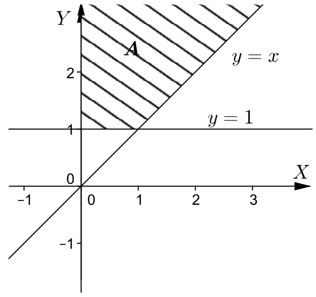
on a $D_xf(5,-3)=2$ et $D_yf(5,-3)=6$.

3. **On donne l'ensemble $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le y\ et\ y\ge 1\right\}$.**
Si possible, déterminer

$$I=\iint_A \frac{xe^{-y^2}}{y}\,dx\,dy$$

après avoir représenté l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé en le hachurant.

Solution. La représentation graphique de l'ensemble A d'intégration est la suivante.



On peut également écrire A sous la forme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,+\infty[\text{ et } x \in [0,y]\}.$$

La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xe^{-y^2}}{y}$ est continue sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Elle est donc continue sur A, fermé non borné. Elle y est également positive.

Pour y fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \left|\dfrac{xe^{-y^2}}{y}\right| = \dfrac{xe^{-y^2}}{y}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le fermé borné $[0,y]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^y \frac{xe^{-y^2}}{y}\,dx = \frac{e^{-y^2}}{y}\int_0^y x\,dx = \frac{e^{-y^2}}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y = \frac{ye^{-y^2}}{2}.$$

La fonction $h : y \mapsto \dfrac{ye^{-y^2}}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1,+\infty[$, fermé non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$. Comme la limite

$$\lim_{y\to+\infty} y^2\left|\frac{ye^{-y^2}}{2}\right| = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^3e^{-y^2}}{2} = 0$$

(puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste) existe et est finie, le critère en θ, avec $\theta = 2 > 1$, permet de conclure à l'intégrabilité de la fonction h en $+\infty$. Elle est donc intégrable sur $[1,+\infty[$.
Ainsi, f est intégrable sur A et comme f est une fonction positive sur A, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{+\infty}\frac{y}{2}e^{-y^2}\,dy\\
&= \frac{-1}{4}\left[e^{-y^2}\right]_1^{+\infty}\\
&= \frac{-1}{4}\left(\lim_{y\to+\infty}(e^{-y^2}) - e^{-1}\right)\\
&= \frac{-1}{4}\left(0 - \frac{1}{e}\right)\\
&= \frac{1}{4e},
\end{aligned}$$

par application du théorème des limites des fonctions composées avec

$$\lim_{y\to+\infty}(-y^2) = -\infty \quad\text{et}\quad \lim_{t\to-\infty} e^t = 0.$$

Autre méthode pour l'étude de l'intégrabilité de h et donc aussi de f en utilisant la définition. Calculons pour tout $t > 1$ la limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{y}{2}e^{-y^2}\,dy.$$

Si cette limite est finie, on pourra conclure que h est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc aussi f sur A et comme f est positif sur A, on aura aussi la valeur de l'intégrale. On a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{y}{2}e^{-y^2}\,dy = -\frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\left[e^{-y^2}\right]_1^t = -\frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}(e^{-t^2} - e^{-1}) = \frac{1}{4e}$$

par application du théorème des limites des fonctions composées (voir ci-dessus).