LIÈGE université
Sciences

Mathématique (MATH0009)

Année académique 2020-2021

Corrigé de l'interrogation du lundi 19 avril 2021

Version 10 avril 2021

QUESTIONNAIRE

Questions de théorie *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. Soit f continûment dérivable sur $A =]0, \pi/2[\times]0, \sqrt{3}[$ et soit F la fonction composée définie explicitement par $F(t) = f(\arctan(t), \sqrt{t^2-1})$.
   Enoncer le théorème de dérivabilité d'une fonction composée dans le cas de la fonction F en déterminant son domaine de dérivabilité ainsi que sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

2. (a) Définir (a.1) matrice diagonale.
   (a.2) matrice diagonalisable.
   (a.3) valeur propre d'une matrice carrée.
   (b) Y a-t-il un lien entre les valeurs propres d'une matrice carrée A de dimension 3 diagonalisable et les valeurs propres d'une matrice diagonale obtenue par diagonalisation de A ? Si oui, lequel ?

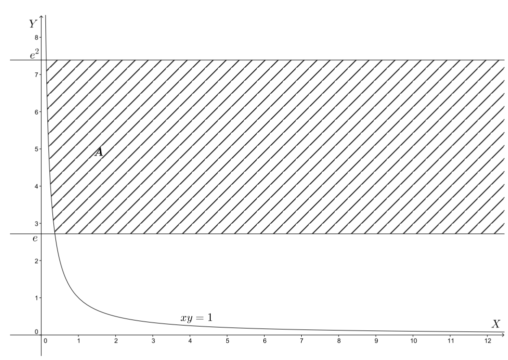
Exercices *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. On donne explicitement la fonction f par $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y)$.
   (a) Déterminer le domaine où la fonction est dérivable et le représenter, en le hachurant (ou en le colorant), dans un repère orthonormé.
   (b) Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_x f(x, y) \,/ D_y f(x, y)$.
   (c) Si $(-\sqrt{3}, -4)$ est un point du domaine de dérivabilité, calculer cette expression en ce point ; sinon, justifier pourquoi.

2. Déterminer, si possible, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\iint_A y\ dx\ dy$ avec
   $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 9, \ \ x \le y \le -\sqrt{3}\ x\right\}$ et représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le colorant).

3. Soit f une fonction intégrable sur la partie fermée A du plan telle que
   $$\iint_A f(x, y)\ dxdy \ = \ \int_{-1}^{0} \left(\int_{-\sqrt{-x/4}}^{0} f(x, y)\ dy \right)\ dx.$$
   (a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le colorant).
   (b) Permuter l'ordre d'intégration.

4. Calculer, si possible, l'intégrale suivante
   $$\iint_A e^{-xy} dxdy,$$
   où A est l'ensemble hachuré ci-contre.



5. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle inversible ? Calculer $(A^{-1})_{12}$ dans ce cas.
(b) Montrer que A admet toujours une même valeur propre quel que soit α. Quelle est cette valeur propre ? Justifier.
(c) Pour $\alpha = 1$, déterminer les vecteurs propres relatifs à cette valeur propre.
(d) Pour $\alpha = 1$, la matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

CORRIGE

Questions de théorie

1. **Soit f continûment dérivable sur $A =]0, \pi/2[\times]0, \sqrt{3}[$ et soit F la fonction composée définie explicitement par $F(t) = f(\arctan(t), \sqrt{t^2-1})$.**
Enoncer le théorème de dérivabilité d'une fonction composée dans le cas de la fonction F en déterminant son domaine de dérivabilité ainsi que sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

Solution. Soient
- f continûment dérivable sur $A =]0, \pi/2[\times]0, \sqrt{3}[$, ouvert de $\mathbb{R}^2$
- $f_1 : t \mapsto \arctan(t)$ et $f_2 : t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ deux fonctions dérivables sur I, un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $\{(\arctan(t), \sqrt{t^2-1}) : t \in I\} \subset A$.

Alors $F : t \mapsto f(\arctan(t), \sqrt{t^2-1})$ est dérivable sur I et on a

$$\begin{aligned}(DF)(t) &= (D_u f)_{\left(\arctan(t), \sqrt{t^2-1}\right)} \cdot D\arctan(t) + (D_v f)_{\left(\arctan(t), \sqrt{t^2-1}\right)} \cdot D\sqrt{t^2-1} \\ &= \frac{1}{t^2+1}\,(D_u f)_{\left(\arctan(t), \sqrt{t^2-1}\right)} + \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,(D_v f)_{\left(\arctan(t), \sqrt{t^2-1}\right)}\end{aligned}$$

si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f.

Pour trouver le plus grand ensemble ouvert I possible, on cherche le domaine commun pour la dérivabilité de f_1 et f_2 et, pour un réel de ce domaine, on doit regarder si $(f_1(t), f_2(t))$ est dans A. Le domaine de dérivabilité de f_1 est $\mathbb{R}$, celui de f_2 est

$$\{t \in \mathbb{R} : t^2 - 1 > 0\} \ =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} I &= \left\{t \in \mathbb{R} : t < -1 \text{ ou } t > 1,\ 0 < f_1(t) < \pi/2 \text{ et } 0 < f_2(t) < \sqrt{3}\right\} \\ &= \left\{t \in \mathbb{R} : t < -1 \text{ ou } t > 1,\ 0 < \arctan(t) < \pi/2 \text{ et } 0 < \sqrt{t^2-1} < \sqrt{3}\right\} \\ &= \left\{t \in \mathbb{R} : t < -1 \text{ ou } t > 1,\ 0 < t \text{ et } t^2 < 4\right\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : t < -1 \text{ ou } t > 1,\ 0 < t \text{ et } -2 < t < 2\} \\ &=]1, 2[\end{aligned}$$

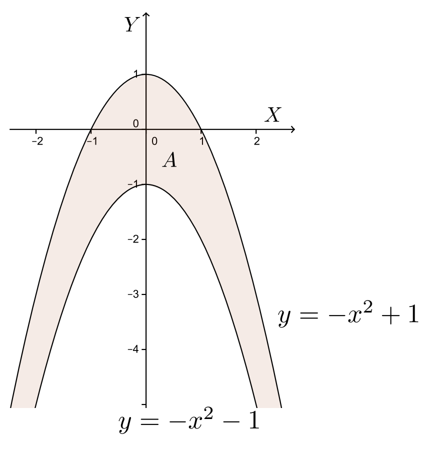
2. **(a) Définir (a.1) matrice diagonale.**
(a.2) matrice diagonalisable.
(a.3) valeur propre d'une matrice carrée.
(b) Y a-t-il un lien entre les valeurs propres d'une matrice carrée A de dimension 3 diagonalisable et les valeurs propres d'une matrice diagonale obtenue par diagonalisation de A ? Si oui, lequel ?

Solution. Voir cours.

Exercices

1. **On donne explicitement la fonction f par $f(x,y) = \arcsin(x^2+y)$.**
(a) Déterminer le domaine où la fonction est dérivable et le représenter, en le hachurant (ou en le colorant), dans un repère orthonormé.
(b) Dans celui-ci, simplifier au maximum l'expression $D_x f(x,y)\ /D_y f(x,y)$.
(c) Si $(-\sqrt{3},-4)$ est un point du domaine de dérivabilité, calculer cette expression en ce point ; sinon, justifier pourquoi.

Solution. (a) Le domaine de dérivabilité de f est l'ensemble
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + y < 1\}.$$
La représentation graphique de cet ensemble est la partie colorée du plan, bords exclus.

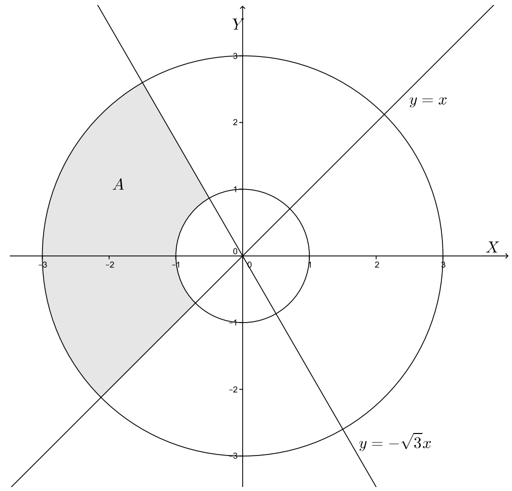


(b) Comme
$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}} \qquad \text{et} \qquad D_y f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}},$$
on a
$$\frac{D_x f(x,y)}{D_y f(x,y)} = 2x$$
quel que soit le point (x,y) dans A.
(c) La fonction f n'est pas dérivable au point de coordonnées $(-\sqrt{3},-4)$ puisque ce point n'est pas élément de A. En effet, en $(-\sqrt{3},-4)$, on a $x^2+y = 3-4 = -1$.

2. **Déterminer, si possible, la valeur de l'intégrale** $\displaystyle\iint_A y\ dx\ dy$ **avec**
$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 9,\quad x \le y \le -\sqrt{3}\ x\right\}$ **et représenter A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le colorant).**

Solution.

La représentation graphique de A est l'ensemble coloré ci-contre, bords compris.
La fonction $f : (x,y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur A, ensemble d'intégration fermé borné. La fonction est donc intégrable sur A.
Par passage aux coordonnées polaires, on a $r \in [1,3]$ et $\theta \in [2\pi/3, 5\pi/4]$ sans oublier le module du jacobien égal à r.



Ainsi,

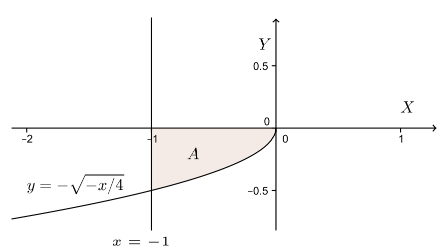
$$\begin{aligned}
\iint_A y\ dx\ dy &= \int_1^3 \left(\int_{2\pi/3}^{5\pi/4} r\ .\ r\sin(\theta)\ d\theta \right)\ dr \\
&= \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 \ .\ \Big[-\cos(\theta) \Big]_{2\pi/3}^{5\pi/4} \\
&= \left(9 - \frac{1}{3} \right) (-\cos(5\pi/4) + \cos(2\pi/3)) \\
&= \frac{26}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{13}{3} \left(\sqrt{2} - 1 \right).
\end{aligned}$$

3. **Soit f une fonction intégrable sur la partie fermée A du plan telle que**

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy = \int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{-x/4}}^0 f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

(a) Représenter l'ensemble d'intégration A dans un repère orthonormé en le hachurant (ou en le colorant).
(b) Permuter l'ordre d'intégration.
Solution.

L'ensemble d'intégration est
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-\sqrt{-x/4}, 0]\}$



A partir de la description donnée de A, cherchons celle qui va permettre de faire la permutation. Si on regarde tous les $(x,y) \in A$ alors les ordonnées y varient dans $[-1/2, 0]$ (la plus petite valeur, $-1/2$, est donnée par l'ordonnée de l'intersection de la droite d'équation $x = -1$ et de la parabole d'équation $y = -\sqrt{-x/4}$ et la plus grande valeur, 0 est claire vu la donnée de A). Cela étant, lorsque y est fixé, les points de l'ensemble A dont l'ordonnée est y, ont une abscisse comprise entre

-1 (clair vu la définition de A) et la valeur de l'abscisse de l'intersection de la droite horizontale dont les points ont pour ordonnée y et de la parabole, c'est-à-dire $x = -4y^2$. Dès lors

$$A \;=\; \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1/2, 0] \text{ et } x \in [-1, -4y^2]\}$$

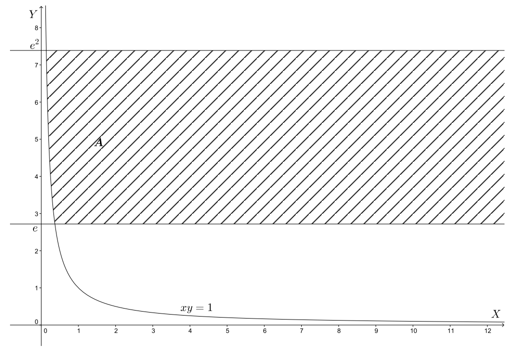
donc

$$\iint_A f(x,y)\; dxdy \;=\; \int_{-1/2}^{0} \left(\int_{-1}^{-4y^2} f(x,y)\; dx \right)\; dy.$$

4. **Calculer, si possible, l'intégrale suivante**

$$\iint_A e^{-xy} dxdy,$$

où A est l'ensemble hachuré ci-contre.



Solution. La fonction $f : (x, y) \mapsto e^{-xy}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble non borné $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [e, e^2],\; x \in [1/y, +\infty[\}$. Comme cette fonction est positive sur A, on a $|f(x, y)| = f(x, y)$.
Soit y fixé dans $[e, e^2]$; la fonction $g : x \mapsto e^{-xy}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1/y, +\infty[$. Etudions l'intégrabilité de g en $+\infty$; $\forall t > 1/y$, on a

$$\int_{1/y}^{t} e^{-xy}\; dx \;=\; -\frac{1}{y}\left[e^{-xy}\right]_{1/y}^{t} \;=\; -\frac{1}{y}\left[e^{-yt} - e^{-1}\right]$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{1/y}^{t} e^{-xy}\; dx \;=\; -\frac{1}{y}\left[\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{(-y)t}}_{=0} - \frac{1}{e}\right] \;=\; \frac{1}{ey}$$

car $\lim_{t\to+\infty}(-yt) = -\infty$, y étant positif et $\lim_{z\to-\infty} e^z = 0$. Comme la limite est finie, g est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1/y, +\infty[$ et son intégrale vaut $1/(ey)$.
Considérons maintenant la fonction $h : y \mapsto 1/(ey)$; elle est continue sur le fermé borné $[e, e^2]$ donc intégrable sur cet ensemble et, dès lors, f est intégrable sur A.
Comme f est positif sur A, on a

$$\iint_A e^{-xy} dxdy \;=\; \frac{1}{e}\int_{e}^{e^2} \frac{1}{y}\; dy \;=\; \frac{1}{e}\left[\ln(y)\right]_{e}^{e^2} \;=\; \frac{1}{e}(\ln(e^2) - \ln(e)) \;=\; \frac{1}{e}$$

puisque $\ln(e^2) = 2\ln(e)$ et $\ln(e) = 1$.

5. **Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix},\; \alpha \in \mathbb{C}.$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle inversible ? Calculer $(A^{-1})_{12}$ dans ce cas.
(b) Montrer que A admet toujours une même valeur propre quel que soit α. Quelle est cette valeur propre ? Justifier.

(c) Pour $\alpha = 1$, déterminer les vecteurs propres relatifs à cette valeur propre.
(d) Pour $\alpha = 1$, la matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

Solution. (a) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
En appliquant la première loi des mineurs à la deuxième ligne, on a $\det A = \alpha^2 - 4$. La matrice A est donc inversible si et seulement si

$$\alpha^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -2 \text{ et } \alpha \neq 2.$$

Dans ce cas, l'élément $(A^{-1})_{1,2}$ peut être calculé et, si $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs, cet élément vaut

$$(A^{-1})_{1,2} = \frac{1}{\det A}\,(\widetilde{\mathcal{A}})_{1,2} = \frac{1}{\alpha^2-4}\,(\mathcal{A})_{2,1} = \frac{-1}{\alpha^2-4}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = \frac{4-\alpha}{\alpha^2-4}.$$

(b) Si I est la matrice identité de dimension 3 alors les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$. Si on calcule le déterminant comme ci-dessus, on a

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2 - 4\right].$$

Ainsi, $\det(A - \lambda I)$ s'annule toujours pour $\lambda = 1$ quel que soit α.
(c) Pour $\alpha = 1$, les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - I)X = 0$. On résout alors cette équation : on a successivement

$$\begin{aligned}
(A-I)X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

(d) Pour $\alpha = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)^2 - 4\Big) \\
&= (1-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) \\
&= (1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda).
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice A possède 3 valeurs propres simples $-1,\ 1$ et 3 ; elle est donc diagonalisable.