Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2022-2023

Corrigé de l'examen du 13 juin 2023
Chimistes bloc 1 et géologues bloc 2

Version 1er mai 2023

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \ln(2x + 1).$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction f explicitement par

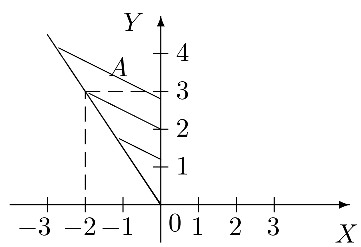
$$f(x, y) = \sqrt{\arcsin(x/y)}.$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x, y) - yD_y f(x, y)$$

3. On donne l'ensemble fermé non borné hachuré A ci-contre.
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A e^{3x-y} \, dx \, dy.$$



4. On donne l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \sqrt{3}\, x \leq y \leq -x\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_E e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy$$

5. (a) Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \cos(\pi/2 - 2\alpha) \\ \sin(\pi - 2\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a1) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M soit inversible.
(a2) Déterminer les valeurs propres de M ; pour quelles valeurs de α a-t-on une valeur propre double ?
(a3) Si $\alpha = \pi/4$ et si, dans ce cas, M est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

(b) On considère le comportement du petit chien Médor. Celui-ci a trois activités principales qu'il ne pratique qu'une seule fois par demi-journée : manger (M) ou se promener (P) ou dormir (D). Après avoir observé le chien, il est possible de synthétiser son comportement comme suit :

- sachant qu'il vient de manger, la probabilité qu'il se promène vaut celle de dormir et vaut 2/5 mais il retourne manger 1 fois sur 5.

- sachant qu'il vient de dormir, la probabilité qu'il mange vaut 0,2 celle qu'il dorme vaut 0,1 et celle qu'il se promène vaut 0,7.

- enfin, revenant de promenade, il a 1 chance sur 2 de manger et autant de chance de dormir ou de retourner en promenade.

(b1) Déterminer la matrice de transition.
(b2) Quelle est, à long terme, la probabilité que Médor se promène. ?

6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.

$$(a)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{5^{m/2}} \qquad (b)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\cos(\pi/3)}{j!} \qquad (c)\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

CORRIGÉ

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x)=\ln(2x+1).$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0**.**
Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-1/2,+\infty[$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{2}{2x+1},\\ D^2f(x) &= \frac{-4}{(2x+1)^2}\ ,\\ D^3f(x) &= \frac{16}{(2x+1)^3}. \end{aligned}$$

Comme $f(0)=\ln(1)=0$, $Df(0)=2$ et $D^2f(0)=-4$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0)+Df(0)x \ = \ 2x,\\ P_2(x) &= f(0)+Df(0)x+D^2f(0)\frac{x^2}{2} \ = \ 2x-2x^2,\ x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{-4}{(2u_1+1)^2}.\,\frac{x^2}{2}=\frac{-2x^2}{(2u_1+1)^2}\ ,\\ R_2(x) &= \frac{16}{(2u_2+1)^3}.\,\frac{x^3}{3!}=\frac{8x^3}{3(2u_2+1)^3},\ x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

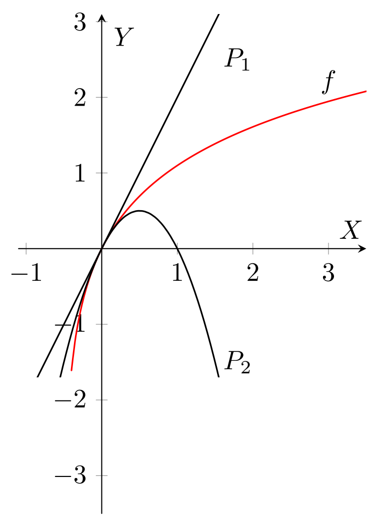
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.

Solution. Considérons les expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est toujours négatif. Dès lors le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe de x car, comme u_2 est situé entre 0 et x avec $x > -1/2$, $2u_2 + 1$ est strictement positif. Par conséquent, $R_2(x) < 0$, $\forall x < 0$ et $R_2(x) > 0$, $\forall x > 0$ au voisinage de 0. Le graphique de f est donc situé en dessous de celui de l'approximation P_2 si $x < 0$ et au-dessus de celui de P_2 si $x > 0$.

Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



2. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y) = \sqrt{\arcsin(x/y)}.$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

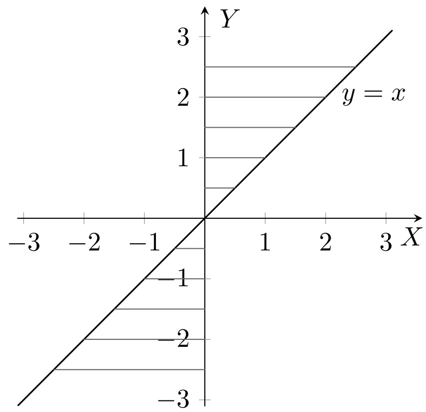
$$xD_xf(x,y) - yD_yf(x,y)$$

Solution.

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, -1 < x/y < 1, \arcsin(x/y) > 0 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0,\ 0 < x/y < 1 \right\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan ci-dessous, les points de la droite et de l'axe des ordonnées exclus.



(c) En tout point de A, on a

$$\begin{aligned}
D_x f(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \times \frac{1}{y} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}} \times \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

et

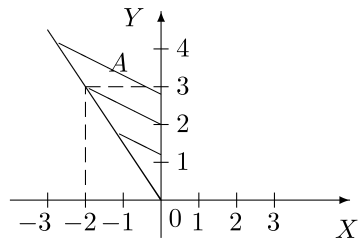
$$\begin{aligned}
D_y f(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \times \left(\frac{-x}{y^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}} \times \left(\frac{-x}{y^2}\right).
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
xD_x f(x,y) - yD_y f(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}} \times \left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \frac{x\,|y|}{y\,\sqrt{y^2-x^2}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \dfrac{(-x)}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si} \quad y<0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \dfrac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si} \quad y>0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)}} \times \frac{|x|}{\sqrt{y^2-x^2}},\ (x,y)\in A
\end{aligned}$$

3. **On donne l'ensemble fermé non borné hachuré A ci-contre.**
Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A e^{3x-y}\ dx\ dy.$$



Solution. La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{3x-y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [-2y/3, 0] \right\}$$

puisque la droite représentée (différente des axes) a pour équation cartésienne $y = (-3/2)x$.
Puisque A est un ensemble non borné fermé, étudions l'intégrabilité de f sur cet ensemble sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$.
Pour y fixé dans $[0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto e^{3x-y} = e^{3x}\ e^{-y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[-2y/3, 0]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\begin{aligned}
\int_{-2y/3}^{0} e^{3x}\ e^{-y}\ dx &= e^{-y}\ \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_{-2y/3}^{0} \\
&= \frac{e^{-y}}{3}\ (1 - e^{-2y}) \\
&= \frac{e^{-y}\ -\ e^{-3y}}{3}.
\end{aligned}$$

La fonction $h : y \mapsto (e^{-y}\ -\ e^{-3y})/3$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives lorsque y est positif. Elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ si la limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t (e^{-y}\ -\ e^{-3y})/3\ dy$$

est finie. Dans ce cas, la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{3x-y}$ sera intégrable sur A et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de f sur A.
Cela étant, quel que soit $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \int_0^t (e^{-y}\ -\ e^{-3y})\ dy &= \frac{1}{3} \left[-\ e^{-y} + \frac{1}{3}\ e^{-3y} \right]_0^t \\
&= \left(-\frac{1}{3}\ e^{-t} + \frac{1}{9}\ e^{-3t} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) \\
&= -\frac{1}{3}\ e^{-t} + \frac{1}{9}\ e^{-3t} + \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\lim_{y\to+\infty} e^{-y} = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t (e^{-y}\ -\ e^{-3y})/3\ dy = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\ e^{-t} + \frac{1}{9}\ e^{-3t} + \frac{2}{9} \right) = \frac{2}{9}$$

et l'intégrale de la fonction f sur A vaut donc $2/9$.

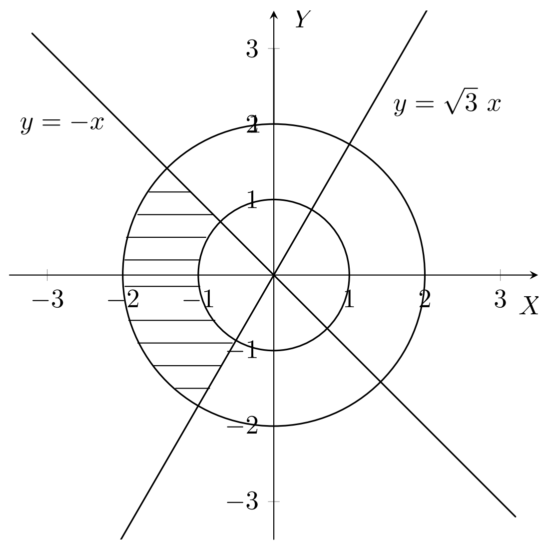
4. **On donne l'ensemble**

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ \sqrt{3}\ x \leq y \leq -x \right\}.$$

(a) Représenter l'ensemble E dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(b) Si possible, calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$I = \iint_E e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\ dy$$

Solution. (a) Voici la représentation graphique (partie hachurée du plan, bords compris) de l'ensemble E.



(b) La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur l'ensemble E fermé borné ; elle est donc intégrable sur E.
En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration E', en bijection avec l'ensemble E, s'écrit $E' = \{(r,\theta) : r \in [1,2], \theta \in [3\pi/4, 4\pi/3]\}$ et la fonction à intégrer est la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = e^{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}} = e^r$$

multipliée par le jacobien r. L'intégrale demandée est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \left(\int_{3\pi/4}^{4\pi/3} r\ e^r\, d\theta \right)\ dr \\
&= \left(\int_1^2 r\ e^r\ dr \right) \times \left(\int_{3\pi/4}^{4\pi/3} d\theta \right) \\
&= \Big[r\ e^r - e^r \Big]_1^2 \times \Big[\theta \Big]_{3\pi/4}^{4\pi/3} \\
&= \Big[(r-1)\ e^r \Big]_1^2 \times \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \right) \\
&= e^2 \times \frac{7\pi}{12} \\
&= \frac{7\pi}{12}\, e^2.
\end{aligned}$$

5. **(a) Soit la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \cos(\pi/2 - 2\alpha) \\ \sin(\pi - 2\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a1) Donner la condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice M soit inversible.
(a2) Déterminer les valeurs propres de M ; pour quelles valeurs de α a-t-on une valeur propre double ?
(a3) Si $\alpha = \pi/4$ et si, dans ce cas, M est diagonalisable, déterminer les vecteurs propres correspondants, une forme diagonale ainsi qu'une matrice S qui y conduit.

Solution. (a1) La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$. Vu les formules de trigonométrie, on a

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} \\
&= \cos^2(\alpha) - \sin^2(2\alpha) \\
&= \Big(\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\Big)\Big(\cos(\alpha) + \sin(2\alpha)\Big) \\
&= \cos^2(\alpha)\Big(1 - 2\sin(\alpha)\Big)\Big(1 + 2\sin(\alpha)\Big).
\end{aligned}$$

Donc $\det(M) \neq 0$ si et seulement si

$$\cos(\alpha) \neq 0, \ \sin(\alpha) \neq \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\alpha) \neq -\frac{1}{2},$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ et } \alpha \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

ou encore

$$\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(a2) Les valeurs propres de M sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned}
\lambda \mapsto \det(M - \lambda \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \Big(\cos(\alpha) - \lambda\Big)^2 - \sin^2(2\alpha) \\
&= \Big(\cos(\alpha) - \lambda - \sin(2\alpha)\Big)\Big(\cos(\alpha) - \lambda + \sin(2\alpha)\Big).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont donc $\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)$ et $\cos(\alpha) + \sin(2\alpha)$.
On a une valeur propre double si et seulement si $\cos(\alpha) - \sin(2\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(2\alpha)$ ce qui est équivalent à $\sin(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = k\pi \Leftrightarrow \alpha = k\pi/2 \ (k \in \mathbb{Z})$.

(a3) Si $\alpha = \pi/4$ alors les valeurs propres sont simples et valent $\cos(\pi/4) - \sin(\pi/2) = \sqrt{2}/2 - 1$ et $\cos(\pi/4) + \sin(\pi/2) = \sqrt{2}/2 + 1$. Dès lors, la matrice M est diagonalisable.
Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}/2 - 1$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $\Big(M - (\sqrt{2}/2 - 1)\,\mathbb{1}\Big) X = 0$. On a

$$\Big(M - (\sqrt{2}/2 - 1)\,\mathbb{1}\Big) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 + 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}/2-1$ sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}/2+1$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $\left(M - (\sqrt{2}/2+1)\ \mathbb{1}\right) X = 0$. On a

$$\left(M - (\sqrt{2}/2+1)\ \mathbb{1}\right) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2-\sqrt{2}/2-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}/2-\sqrt{2}/2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-y=0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}/2+1$ sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est telle que } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2-1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2+1 \end{pmatrix}.$$

(b) On considère le comportement du petit chien Médor. Celui-ci a trois activités principales qu'il ne pratique qu'une seule fois par demi-journée : manger (M) ou se promener (P) ou dormir (D). Après avoir observé le chien, il est possible de synthétiser son comportement comme suit :

- sachant qu'il vient de manger, la probabilité qu'il se promène vaut celle de dormir et vaut 2/5 mais il retourne manger 1 fois sur 5.

- sachant qu'il vient de dormir, la probabilité qu'il mange vaut 0,2 celle qu'il dorme vaut 0,1 et celle qu'il se promène vaut 0,7.

- enfin, revenant de promenade, il a 1 chance sur 2 de manger et autant de chance de dormir ou de retourner en promenade.

(b1) Déterminer la matrice de transition.
(b2) Quelle est, à long terme, la probabilité que Médor se promène. ?

Solution.
(b1) Soient D_0, M_0 et P_0 les situations initiales respectives « dormir », « manger » et « se promener » ; soient D_1, M_1 et P_1 , ces mêmes situations la demi-journée suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ M_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,25 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_0 \\ G_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,25 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 0,4 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

(b2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1

sont les vecteurs non nuls X tels que $(T-\mathbb{1})X=0$.
On a successivement

$$\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,9 & 0,4 & 0,25 \\ 0,2 & -0,8 & 0,5 \\ 0,7 & 0,4 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -90x+40y+25z=0 \\ 2x-8y+5z=0 \\ 70x+40y-75z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -18x+8y+5z=0 \\ 2x-8y+5z=0 \\ 14x+8y-15z=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Si on additionne deux fois la deuxième équation du système ci-dessus à la troisième, on obtient $18x-8y-5z=0$. Cette équation et la première étant équivalentes, le système se réduit à

$$\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-8y+5z=0 \\ 14x+8y-15z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-8y+5z=0 \\ 16x-10z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=8x/5 \\ y=5x/4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 5x/4 \\ 8x/5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c\ (20+25+32)=1 \Leftrightarrow c=1/77$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} 20/77 \\ 25/77 \\ 32/77 \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que Médor se promène est de $32/77$.

6. **Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.**

$$(a)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{5^{m/2}} \qquad (b)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\cos(\pi/3)}{j!} \qquad (c)\sum_{m=1}^{+\infty}\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Solution.
(a) Comme le terme général

$$\frac{1}{5^{m/2}}=\frac{1}{\sqrt{5^m}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^m$$

avec $1/\sqrt{5}\in]-1,1[$, la série donnée est une série géométrique convergente.
Sa somme vaut

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

(b) Vu la définition de l'exponentielle, on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\cos(\pi/3)}{j!} \;=\; \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \;=\; \frac{1}{2}\, \exp(1) \;=\; \frac{e}{2}.$$

(c) On a

$$\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m,\ \forall m \geq 1;$$

dès lors, la suite formée par le terme général $(-1)^m$ ne converge pas vers 0 et, par conséquent, la série ne converge pas.