# *Mathématiques générales II* (MATH1009)

Année académique 2021-2022

## Corrigé de l'examen du 23 août 2022
## Chimistes bloc 1 et géologues bloc 2

Version 29 juin 2022

QUESTIONNAIRE

1. On donne la fonction $f$ explicitement par

$$f(x) = xe^x.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi $f$ au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction $f$ par rapport aux graphiques des approximations **en utilisant la notion de reste**.

2. On donne la fonction $f$ explicitement par

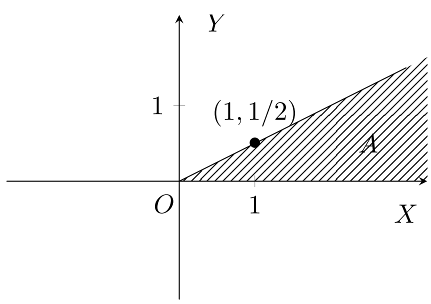
$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$D_x f(x,y) + D_y f(x,y)$$

3. On donne l'ensemble **non borné** hachuré $A$ ci-dessous. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_A \frac{x}{y}\, e^{-x^2/y}\ dx\ dy.$$




4. On donne l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2,\ |x| \leq y\}$.
(a) Représenter l'ensemble $E$ dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.
(b) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_E \frac{1}{(x^2+y^2+1)\sqrt{x^2+y^2}}\ dx\ dy.$$

5. (a) Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{pmatrix}\ (a, b \in \mathbb{R}), \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a1) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur les réels $a, b$ pour que la matrice $M$ soit inversible.
(a2) Si $b > 0$ alors la matrice $M$ admet deux valeurs propres réelles distinctes. Pourquoi ?
(a3) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $N$.

(b) Dans une pension canine cinq étoiles, les pensionnaires ont chaque jour le choix entre trois types de croquettes (présentées dans trois gamelles différentes) : croquettes au boeuf, au poulet ou au thon. Un même jour, ils ne peuvent choisir qu'un seul type de croquettes mais, le jour suivant, ils peuvent modifier leur repas s'ils le souhaitent.

Le propriétaire de la pension observe un pensionnaire et constate que
* s'il a mangé des croquettes au boeuf un jour, le lendemain il mangera celles-là ou celles au poulet de façon équiprobable et mangera des croquettes au thon dans 1 cas sur 2,
* s'il a mangé des croquettes au poulet, ll en mangera à nouveau le lendemain avec une probabilité de 80 % ; sinon il mangera chaque autre type 1 fois sur 10,
* s'il a mangé des croquettes au thon, le lendemain il y a 3 chances sur 10 pour qu'il en mange encore, 3 chances sur 5 pour qu'il mange des croquettes au poulet et 1 chance sur 10 pour qu'il mange des croquettes au boeuf.

(b1) Déterminer la matrice de transition.
(b2) Quelle est, à long terme, la probabilité que le pensionnaire observé mange des croquettes au boeuf ?

6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.

$$(a) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2} \qquad (b) \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^j \qquad (c) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2\ln(3))^m}{m!}$$

---

CORRIGÉ

---

***Exercices***

1. **On donne la fonction $f$ explicitement par**

$$f(x) = xe^x.$$

**(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.**
*Solution.* La fonction est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{aligned} Df(x) &= e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x\ , \\ D^2f(x) &= e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x\ , \\ D^3f(x) &= e^x + (x+2)\,e^x = (x+3)\,e^x. \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = 1$ et $D^2f(0) = 2$, si on note $P_n$ l'approximation polynomiale de $f$ à l'ordre $n$ en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)\,x \ = \ x, \\ P_2(x) &= f(0) + Df(0)\,x + D^2f(0)\,\frac{x^2}{2} \ = \ x + x^2,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.**
*Solution.* Si on note $R_n$ le reste de l'approximation polynomiale de $f$ à l'ordre $n$ en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $u_1$ et $u_2$ strictement compris entre 0 et $x$ tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= (u_1+2)\,e^{u_1}\,\frac{x^2}{2}\ , \\ R_2(x) &= (u_2+3)\,e^{u_2}\,\frac{x^3}{3!} = (u_2+3)\,e^{u_2}\,\frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

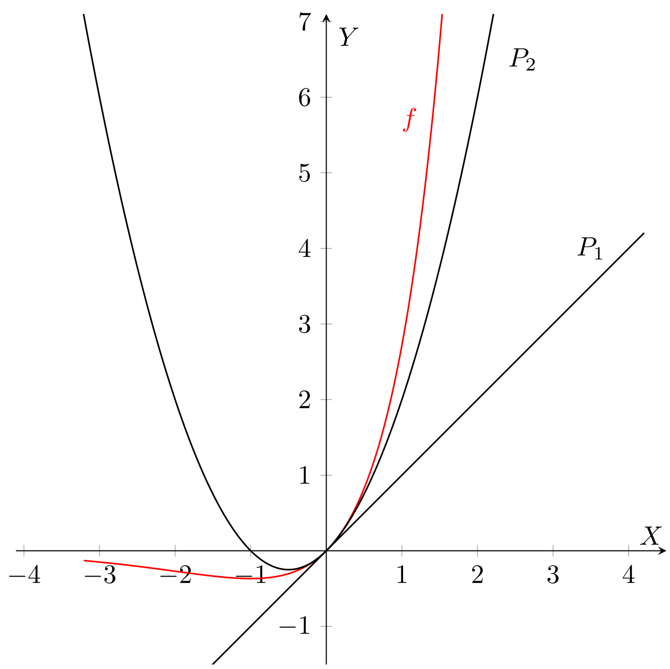
**(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi $f$ au voisinage de $0$ et justifier la position du graphique de la fonction $f$ par rapport aux graphiques des approximations en utilisant la notion de reste.**

*Solution.* Considérons les expressions des restes.

D'une part, vu son expression, $R_1(x)$ est toujours positif pour $x$ voisin de 0 si $u_1 > -2$. Dès lors le graphique de $f$ est situé au-dessus de celui de $P_1$ pour $x$ voisin de 0.

D'autre part, vu son expression, $R_2(x)$ est du signe de $x$ si $u_2 > -3$. Pour $x$ voisin de 0, si $x < 0$ alors $R_2(x) < 0$ et le graphique de $f$ est situé en dessous de celui de l'approximation $P_2$ ; par contre, pour $x$ voisin de 0, si $x > 0$ alors alors $R_2(x) > 0$ et le graphique de $f$ est situé au-dessus de celui de l'approximation $P_2$.

Voici la représentation graphique de $P_1$, $P_2$ et $f$ au voisinage de 0.




2. **On donne la fonction $f$ explicitement par**

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

**(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.**

**(b) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.**

$$D_x f(x,y) + D_y f(x,y)$$

*Solution.*

(a) Le domaine d'infinie dérivabilité de $f$ est l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0,\ y \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0),\ y \neq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0.$$

(b) En tout point de A, la fonction $f$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

et dès lors on a

$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+y^2} \times 2x - \frac{1}{1+x^2/y^2} \times \frac{1}{y} \\ &= \frac{x-y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

et

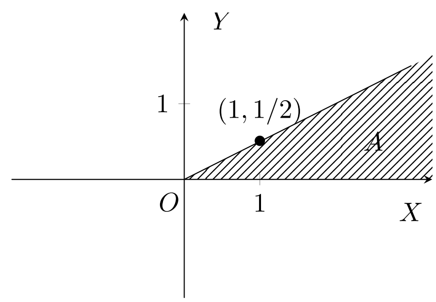
$$\begin{aligned} D_y f(x,y) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+y^2} \times 2y - \frac{1}{1+x^2/y^2} \times \left(\frac{-x}{y^2}\right) \\ &= \frac{y+x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$D_x f(x,y) + D_y f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\ .$$

3. **On donne l'ensemble <u>non borné</u> hachuré $A$ ci-dessous. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$I = \iint_A \frac{x}{y}\, e^{-x^2/y}\ dx\ dy.$$




*Solution.* La fonction $f : (x,y) \mapsto (x/y)\, e^{-x^2/y}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$ donc sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in ]0,+\infty[,\ x \in [2y,+\infty[\}$$

puisque la droite représentée (différente des axes) a pour équation cartésienne $y = x/2$.
Puisque $A$ est un ensemble non borné fermé, étudions l'intégrabilité de $f$ sur cet ensemble sachant que $|f(x,y)| = f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$.
Pour $y$ fixé dans $]0,+\infty[$, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{y}\, e^{-x^2/y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé non borné $[2y,+\infty[$.
Vérifions son intégrabilité en $+\infty$ en utilisant la définition. Pour $t > 2y$, on a

$$\begin{aligned} \int_{2y}^{t} \frac{x}{y}\, e^{-x^2/y}\ dx &= \left[-\frac{1}{2}\ e^{-x^2/y}\right]_{2y}^{t} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\ e^{-t^2/y} - e^{-4y}\right). \end{aligned}$$

Dès lors, puisque $y$ est positif, $-t^2/y$ est négatif ; on a alors $\lim_{t\to+\infty}(-t^2/y) = -\infty$ et $\lim_{z\to-\infty} e^z = 0$ et, par application du théorème de la limite d'une fonction de fonction, on a

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2/y} = 0.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{2y}^{t}\frac{x}{y}\,e^{-x^2/y}\,dx=-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\,e^{-t^2/y}+\frac{1}{2}e^{-4y}=\frac{1}{2}e^{-4y}.$$

La limite étant finie, la fonction $g$ est intégrable en $+\infty$ donc sur $[2y,+\infty[$ et son intégrale vaut $(1/2)e^{-4y}$.

La fonction $h:y\mapsto(1/2)e^{-4y}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives. Elle est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ si

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t(1/2)e^{-4y}\,dy$$

est finie. Dans ce cas, la fonction $f:(x,y)\mapsto(x/y)\,e^{-x^2/y}$ sera intégrable sur $A$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale de $f$ sur $A$.

Cela étant, quel que soit $t>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t(1/2)e^{-4y}\,dy &= \left[-\frac{1}{8}\,e^{-4y}\right]_0^t\\ &= -\frac{1}{8}(\,e^{-4t}-1).\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\lim\limits_{y\to+\infty}e^{-y}=0$, on obtient

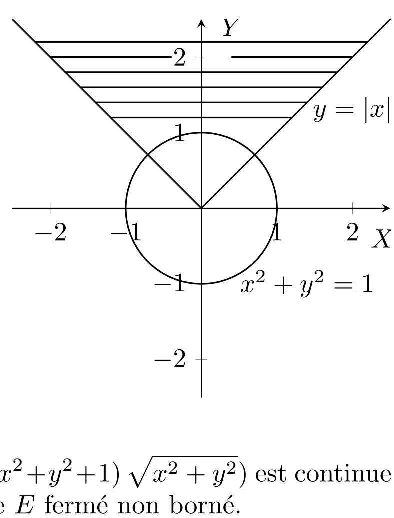
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t(1/2)e^{-4y}\,dy=-\frac{1}{8}\lim_{t\to+\infty}\,(\,e^{-4t}-1)=\frac{1}{8}$$

et l'intégrale de la fonction $f$ sur $A$ vaut donc $1/8$.

4. **On donne l'ensemble $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\le x^2+y^2,\ |x|\le y\}$.**
**(a) Représenter l'ensemble $E$ dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant.**
**(b) Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale**

$$I=\iint_E\frac{1}{(x^2+y^2+1)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$$

*Solution.* (a) Voici la représentation graphique (partie hachurée du plan, bords compris) de l'ensemble $E$.




(b) La fonction $f:(x,y)\mapsto1/((x^2+y^2+1)\sqrt{x^2+y^2})$ est continue sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2>\ 0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ donc sur l'ensemble $E$ fermé non borné.

En passant aux coordonnées polaires, l'ensemble d'intégration $E'$, en bijection avec l'ensemble $E$, s'écrit $E'=\{(r,\theta):r\in[1,+\infty[,\ \theta\in[\pi/4,3\pi/4]\}$ et la fonction à intégrer est la fonction

$$(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\frac{1}{(r^2+1)\,|r|}=\frac{1}{r\,(r^2+1)}$$

multipliée par le jacobien $r$. L'intégrale demandée est donc égale à

$$I = \int_1^{+\infty} \left( \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{r^2+1}\, d\theta \right) dr.$$

La fonction $g : (r, \theta) \mapsto 1/(r^2+1)$ est continue et positive sur $E'$, ensemble non borné. Si cette fonction est intégrable après changement de variables c'est qu'elle l'était aussi en coordonnées cartésiennes. Etudions donc son intégrabilité.
Fixons $r$ dans $[1, +\infty[$ ; la fonction $h : \theta \mapsto 1/(r^2+1)$ est continue sur le fermé borné $[\pi/4, 3\pi/4]$ donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{r^2+1}\, d\theta = \frac{1}{r^2+1}(3\pi/4 - \pi/4) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{r^2+1}.$$

La fonction $j : r \mapsto (\pi/2) \times 1/(r^2+1)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, +\infty[$, ensemble non borné. Etudions son intégrabilité en utilisant la définition et pour cela calculons la limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \left( \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{r^2+1} \right) dr.$$

Pour tout $t > 1$, on a

$$\int_1^t \left( \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{r^2+1} \right) dr = \left[ \frac{\pi}{2} \arctan(r) \right]_1^t = \frac{\pi}{2} \left( \arctan(t) - \frac{\pi}{4} \right)$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \left( \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{r^2+1} \right) dr = \frac{\pi}{2} \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Comme cette limite est finie, la fonction $j$ est intégrable en $+\infty$ donc sur $[1, +\infty[$ et la fonction $g$ l'est sur $E'$ donc $f$ est intégrable sur $E$. La valeur de la limite est la valeur de l'intégrale demandée.

5. **(a) Soient les matrices**

$$M = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{pmatrix} \ (a, b \in \mathbb{R}), \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(a1) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur les réels $a, b$ pour que la matrice $M$ soit inversible.**
**(a2) Si $b > 0$ alors la matrice $M$ admet deux valeurs propres réelles distinctes. Pourquoi ?**
**(a3) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $N$.**

*Solution.* (1) La matrice $M$ est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$. Comme on a

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} \\ &= ab \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \\ &= ab\,(b-a), \end{aligned}$$

$\det(M) \neq 0$ si et seulement si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a \neq b$.

(2) Les valeurs propres de $M$ sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} \lambda \mapsto \det(M - \lambda \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & a^2 \\ b & b^2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= ab^2 - b^2\lambda - a\lambda + \lambda^2 - a^2 b \\ &= \lambda^2 - (a+b^2)\,\lambda + ab^2 - a^2 b. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré vaut

$$\begin{array}{rcl}\Delta & = & (a+b^2)^2-4(ab^2-a^2b)\\ & = & a^2+b^4+2ab^2-4ab^2+4a^2b\\ & = & a^2+b^4-2ab^2+4a^2b\\ & = & (a-b^2)^2+4a^2b,\end{array}$$

expression strictement positive si $b>0$ et dès lors le polynôme caractéristique possède deux valeurs propres réelles distinctes.
(3) Les valeurs propres de $N$ sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{array}{rcl}\lambda\mapsto \det(N-\lambda\mathbb{1}) & = & \begin{vmatrix} -\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}\\ & = & \lambda^2+1.\end{array}$$

Les valeurs propres de $N$ sont donc égales à $i$ et $-i$.
Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $i$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

tels que $(N-i\ \mathbb{1})X=0$. On a

$$(N-i\ \mathbb{1})X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -ix-y=0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $i$ sont donc les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} 1\\ -i\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $-i$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

tels que $(N+i\ \mathbb{1})X=0$. On a

$$(N+i\ \mathbb{1})X=0\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & -1\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow ix-y=0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-i$ sont donc les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} 1\\ i\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{C}_0.$$

**(b) Dans une pension canine cinq étoiles, les pensionnaires ont chaque jour le choix entre trois types de croquettes (présentées dans trois gamelles différentes) : croquettes au boeuf, au poulet ou au thon. Un même jour, ils ne peuvent choisir qu'un seul type de croquettes mais, le jour suivant, ils peuvent modifier leur repas s'ils le souhaitent.**
**Le propriétaire de la pension observe un pensionnaire et constate que**
*** s'il a mangé des croquettes au boeuf un jour, le lendemain il mangera celles-là ou celles au poulet de façon équiprobable et mangera des croquettes au thon dans 1 cas sur 2,**
*** s'il a mangé des croquettes au poulet, ll en mangera à nouveau le lendemain avec une probabilité de 80 % ; sinon il mangera chaque autre type 1 fois sur 10,**
*** s'il a mangé des croquettes au thon, le lendemain il y a 3 chances sur 10 pour qu'il en mange encore, 3 chances sur 5 pour qu'il mange des croquettes au poulet et 1 chance sur 10 pour qu'il mange des croquettes au boeuf.**

**(b1) Déterminer la matrice de transition.**
**(b2) Quelle est, à long terme, la probabilité que le pensionnaire observé mange des croquettes au boeuf ?**

*Solution.*
(1) Soient $B_0$, $P_0$ et $T_0$ les situations initiales respectives « manger des croquettes au boeuf », « manger des croquettes au poulet » et « manger des croquettes au thon » ; soient $B_1$, $P_1$ et $T_1$ , ces mêmes situations au repas du lendemain. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ P_1 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/10 & 1/10 \\ 1/4 & 4/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/10 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ P_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition $T$ est

$$T = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/10 & 1/10 \\ 1/4 & 4/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/10 & 3/10 \end{pmatrix}.$$

(2) Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X$ tels que $(T - \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$\begin{aligned}
(T - \mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3/4 & 1/10 & 1/10 \\ 1/4 & -1/5 & 3/5 \\ 1/2 & 1/10 & -7/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -15x + 2y + 2z = 0 \\ 5x - 4y + 12z = 0 \\ 5x + y - 7z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5y + 19z = 0 \\ x = (7z - y)/5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = (5/19)y \\ x = (35/19 - 1)y/5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = (5/19)y \\ x = (16/19)y/5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (16/95)\ y \\ y \\ (5/19)y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 16 \\ 95 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c\ (16 + 95 + 25) = 1 \Leftrightarrow c = 1/136$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} 16/136 \\ 95/136 \\ 25/136 \end{pmatrix}$$

et, à long terme, la probabilité que le pensionnaire mange des croquettes au boeuf est de $16/136 = 2/17$.

6. **Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme exprimée le plus simplement possible.**

$$(a) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2} \qquad (b) \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^j \qquad (c) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2\ln(3))^m}{m!}$$

*Solution.*

(a) Le terme général de la série donnée est tel que

$$\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2} \geq \frac{\sqrt{m^2}}{m^2} \geq \frac{m}{m^2} \geq \frac{1}{m}.$$

Comme $1/m$ est le terme général de la série harmonique qui est une série divergente, la série donnée diverge aussi par le critère de comparaison.

(b) Comme $\sin(\pi/6) = 1/2$, on a une série géométrique de raison $1/2 \in ]-1,1[$ ; la série est donc convergente et sa somme vaut

$$\frac{1}{1-1/2} = 2.$$

(c) Vu la définition de l'exponentielle, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2\ln(3))^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln(3^2))^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln(9))^m}{m!} = \exp(\ln(9)) = 9$$

puisque les fonctions exponentielle et logarithme sont inverses l'une de l'autre.