Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2023-2024

Corrigé de l'interrogation du 9 avril 2024

Version 10 avril 2024

QUESTIONNAIRE

$\boxed{\textbf{\textit{Théorie}}}$ 8 points

Rédiger précisément et clairement vos réponses.

1. (a) Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une matrice carrée A.
   (b) Donner la définition du polynôme caractéristique de A.
   (c) Démontrer que toute valeur propre de A est zéro de son polynôme caractéristique.

2. Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]1,+\infty[\times]-\infty,0[$.
   (a) Que signifie « *la fonction f est continûment dérivable sur A* » ?
   (b) Soient f continûment dérivable sur A et
   $$F : t \mapsto f\left(\ln(t), t^2 - 5t + 6\right).$$
   Où la fonction F est-elle dérivable ? Quelle est l'expression explicite de sa dérivée (en fonction des dérivées partielles de f).

$\boxed{\textbf{\textit{Exercices}}}$ 12 points

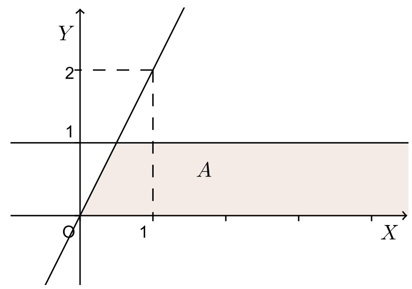
Rédiger précisément et clairement vos réponses.

1. Soit la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
   (b) Que vaut le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la troisième colonne ?
   (c) Déterminer les valeurs propres de A.

2. Le gérant d'un magasin analyse ses ventes du mois de décembre et fait le constat suivant : s'il a fait des ventes exceptionnelles l'année précédente, il a une chance sur deux de faire des ventes exceptionnelles l'année suivante et une sur quatre de faire des ventes satisfaisantes. Si les ventes ont été satisfaisantes l'année précédente, il a une chance sur deux de faire de mauvaises ventes l'année qui suit et une sur quatre de faire des ventes exceptionnelles. Enfin, si les ventes ont été mauvaises l'année qui précède, il a deux chances sur trois de faire à nouveau de mauvaises ventes et une chance sur trois de faire des ventes satisfaisantes.
   (a) Déterminer la matrice de transition.
   (b) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est la probabilité que les ventes soient exceptionnelles à long terme ?

3. On donne la fonction f explicitement par
   $$f(x,y) = \sqrt{2x - y^2}.$$
   (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
   (b) Représenter ce domaine dans un repère orthonormé en le hachurant.
   (c) Si c'est possible, déterminer la valeur des dérivées partielles de la fonction f au point de coordonnées cartésiennes (5,-3).

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé coloré ci-dessous
(a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées,
(b) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.



CORRIGE

Questions de théorie

1. **(a) Donner la <u>définition</u> d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une matrice carrée A.**
   (b) Donner la définition du polynôme caractéristique de A.
   (c) Démontrer que toute valeur propre de A est zéro de son polynôme caractéristique.
   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

2. **Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]1,+\infty[\times]-\infty,0[$.**
   (a) Que signifie ≪ *la fonction f est continûment dérivable sur A* ≫ ?
   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

   (b) Soient f continûment dérivable sur A et

   $$F : t \mapsto f\left(\ln(t), t^2 - 5t + 6\right).$$

   Où la fonction F est-elle dérivable ? Quelle est l'expression explicite de sa dérivée (en fonction des dérivées partielles de f).
   Solution. Les fonctions $f_1 : t \mapsto \ln(t)$ et $f_2 : t \mapsto t^2 - 5t + 6$ sont respectivement dérivables sur $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}$. La fonction F, composée de f et de f_1 et f_2, est donc dérivable sur

   $$\begin{aligned} I &= \left\{t \in]0,+\infty[: \left(f_1(t), f_2(t)\right) \in A\right\} \\ &= \left\{t \in]0,+\infty[: \ln(t) > 1,\ t^2 - 5t + 6 < 0,\right\} \\ &= \left\{t \in]0,+\infty[:\ t > e,\ 2 < t < 3\right\} \\ &=]e, 3[\end{aligned}$$

   et on a

   $$\begin{aligned} (DF)(t) &= D_1 f\,(X,Y)\ \times\ D\ln(t) + D_2 f\,(X,Y)\ \times\ D(t^2 - 5t + 6) \\ &= \frac{D_1 f\,(X,Y)}{t} + (2t - 5)\, D_2 f\,(X,Y) \end{aligned}$$

   avec $X = \ln(t)$ et $Y = t^2 - 5t + 6$.

Exercices

1. **Soit la matrice**

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
   Solution. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Comme les colonnes C_1 et C_3 sont opposées, elles sont multiples l'une de l'autre ; le déterminant de la matrice est donc nul et A n'est pas inversible.
   (b) Que vaut le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la troisième colonne ?

Solution. Le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la troisième colonne vaut

$$(\mathcal{A})_{2,3} = \ (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(4+4) = -8.$$

(c) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

Solution. Si $\mathbb{1}$ désigne la matrice identité de dimension 3, alors les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda\mathbb{1})=0$.

En remplaçant la première colonne par sa somme avec la troisième, puis en retirant la première ligne de la troisième , on a

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -\lambda & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda((2-\lambda)(3-\lambda)-2) \\
&= -\lambda(\lambda^2-5\lambda+4) \\
&= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)
\end{aligned}$$

par application de la première loi des mineurs selon la première colonne.

Les valeurs propres sont donc les nombres $0, 1, 4$.

2. **Le gérant d'un magasin analyse ses ventes du mois de décembre et fait le constat suivant : s'il a fait des ventes exceptionnelles l'année précédente, il a une chance sur deux de faire des ventes exceptionnelles l'année suivante et une sur quatre de faire des ventes satisfaisantes. Si les ventes ont été satisfaisantes l'année précédente, il a une chance sur deux de faire de mauvaises ventes l'année qui suit et une sur quatre de faire des ventes exceptionnelles. Enfin, si les ventes ont été mauvaises l'année qui précède, il a deux chances sur trois de faire à nouveau de mauvaises ventes et une chance sur trois de faire des ventes satisfaisantes.**

(a) Déterminer la matrice de transition.

Solution. Soient E_0, S_0 et M_0 respectivement le niveau des ventes (exceptionnelles, satisfaisantes, mauvaises) fixé au départ et E_1, S_1 et M_1 respectivement l'année suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ S_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ S_0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(b) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est la probabilité que les ventes soient exceptionnelles à long terme ?

Solution. Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T-\mathbb{1})X = 0.$$

On a successivement

$$
\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x+y=0 \\ 3x-9y+4z=0 \\ 3x+6y-4z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=2x \\ z=15x/4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 15x/4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(4+8+15)=1 \Leftrightarrow c=1/27$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} 4/27 \\ 8/27 \\ 15/27 \end{pmatrix}$$

et la probabilité que les ventes soient exceptionnelles à long terme est de $4/27$.

3. **On donne la fonction f explicitement par**

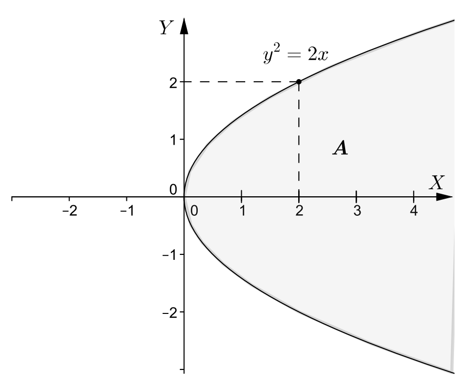
$$f(x,y)=\sqrt{2x-y^2}.$$

(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
(b) Représenter ce domaine dans un repère orthonormé en le hachurant.
(c) Si c'est possible, déterminer la valeur des dérivées partielles de la fonction f au point de coordonnées cartésiennes (5,-3).

Solution. (a) La fonction f est dérivable sur

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 2x-y^2>0\right\}.$$

(b) La représentation graphique de A est l'ensemble grisé ci-dessous, bords exclus.



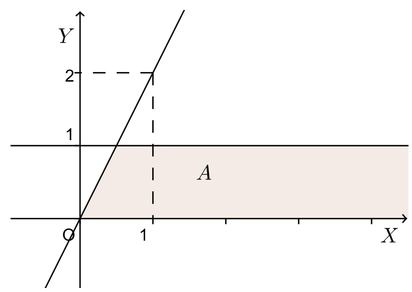
(c) La fonction est dérivable en $(5,-3)$ puisque $10-9=1>0$. Dans A, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{2}{2\sqrt{2x-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}} \quad \text{et} \quad D_y f(x,y) = \frac{-2y}{2\sqrt{2x-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{2x-y^2}}.$$

Par conséquent,

$$(D_x f)(5,-3) = \frac{1}{\sqrt{10-9}} = 1 \quad \text{et} \quad (D_y f)(5,-3) = \frac{3}{\sqrt{10-9}} = 3.$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé coloré ci-dessous**
(a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées,
(b) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.



Solution. Les droites ont pour équation cartésienne $y = 2x$ et $y = 1$. Leur point d'intersection a pour coordonnées $(1/2, 1)$.
Dès lors, l'ensemble fermé grisé est décrit analytiquement par
(a)

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1/2]\,,\; y \in [0,2x]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1/2,+\infty[\,,\; y \in [0,1]\right\},$$

(b)

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1]\,,\; x \in [y/2,+\infty[\right\}.$$