Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2024-2025

Corrigé de l'interrogation du 8 avril 2025

Version 14 mars 2025

QUESTIONNAIRE

Théorie 8 points

Rédiger précisément et clairement vos réponses.

1. (a) Donner la définition de la notion d'inverse d'une matrice carrée.
(b) Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée admette une matrice inverse.
(c) Démontrer (ne pas oublier de JUSTIFIER !) que la condition que vous avez énoncée en (b) est suffisante.

2. Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]1, +\infty[\times]-\infty, 0[$.
(a) Quand dit-on que la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(2, -1)$?
(b) Qu'appelle-t-on alors la dérivée partielle de f (par rapport à sa deuxième variable) en ce point ?
(c) Que signifie « *la fonction f est continûment dérivable sur A* » ?

Exercices 12 points

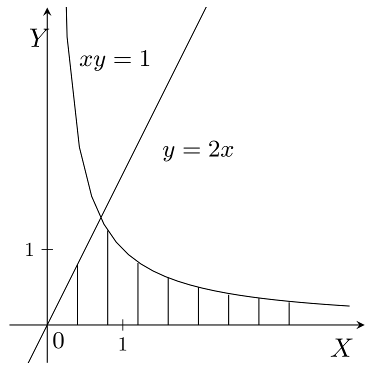
Rédiger précisément et clairement vos réponses.

1. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$
(a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
(b) Que vaut le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la première colonne ?
(c) Déterminer les valeurs propres de A.

2. Une agence de voyage organise chaque année 3 types de séjour : un séjour culturel (C), un séjour de repos (R) et un séjour sportif (S). Elle fait le constat suivant :
- si une personne choisit un séjour culturel, l'année suivante il y a 2 chances sur 3 qu'elle choisisse encore ce type de séjour et une chance sur 3 qu'elle choisisse le repos.
- si une personne choisit un séjour de repos, l'année suivante il y a une chance sur 2 qu'elle choisisse encore un séjour de repos, 2 chances sur 5 qu'elle choisisse un séjour culturel et une chance sur 10 qu'elle choisisse de faire du sport.
- enfin si elle a choisi un séjour sportif, l'année suivante elle choisit encore ce type de séjour dans 3 cas sur 4 ou, de façon équiprobable, un séjour culturel ou un séjour de repos.
(a) Déterminer la matrice de transition.
(b) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est la probabilité qu'une personne choisisse un séjour de repos à long terme ?

3. On donne la fonction f explicitement par
$$f(x, y) = \arcsin(x - y^2).$$
(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
(b) Représenter ce domaine dans un repère orthonormé en le hachurant.
(c) Si c'est possible, déterminer la valeur des dérivées partielles de la fonction f au point de coordonnées cartésiennes $(1/4, 1/2)$ en simplifiant au maximum.

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré ci-dessous
(a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées,
(b) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.



CORRIGE

Questions de théorie

1. **(a) Donner la <u>définition</u> de la notion d'inverse d'une matrice carrée.**
   (b) Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée admette une matrice inverse.
   (c) Démontrer (ne pas oublier de JUSTIFIER !) que la condition que vous avez énoncée en (b) est suffisante.

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

2. **Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]1, +\infty[\times] - \infty, 0[$.**
   (a) Quand dit-on que la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(2, -1)$?
   (b) Qu'appelle-t-on alors la dérivée partielle de f (par rapport à sa deuxième variable) en ce point ?
   (c) Que signifie ≪ *la fonction f est continûment dérivable sur A* ≫ ?

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

Exercices

1. **Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.

   Solution. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Le déterminant de la matrice vaut

$$(-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0.$$

   Comme le déterminant n'est pas nul, A est donc inversible.

   (b) Que vaut le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la première colonne ?

   Solution. Le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la première colonne, noté $(\mathcal{A})_{2,1}$ vaut

$$(\mathcal{A})_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -(-12 + 8) = 4.$$

   (c) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

   Solution. Si $\mathbb{1}$ désigne la matrice identité de dimension 3, alors les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$.

En appliquant la première loi des mineurs à la deuxième ligne, on a

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)(3-\lambda)+1\Big) \\
&= (1-\lambda)\ (3-4\lambda+\lambda^2+1) \\
&= (1-\lambda)\ (\lambda^2-4\lambda+4) \\
&= (1-\lambda)\ (\lambda-2)^2.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc les nombres 1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

2. **Une agence de voyage organise chaque année 3 types de séjour : un séjour culturel (C), un séjour de repos (R) et un séjour sportif (S). Elle fait le constat suivant :**
- si une personne choisit un séjour culturel, l'année suivante il y a 2 chances sur 3 qu'elle choisisse encore ce type de séjour et une chance sur 3 qu'elle choisisse le repos.
- si une personne choisit un séjour de repos, l'année suivante il y a une chance sur 2 qu'elle choisisse encore un séjour de repos, 2 chances sur 5 qu'elle choisisse un séjour culturel et une chance sur 10 qu'elle choisisse de faire du sport.
- enfin si elle a choisi un séjour sportif, l'année suivante elle choisit encore ce type de séjour dans 3 cas sur 4 ou, de façon équiprobable, un séjour culturel ou un séjour de repos.
(a) Déterminer la matrice de transition.
Solution. Soient C_0, R_0 et S_0 respectivement le type de séjour (culturel, de repos, sportif) choisi au départ et C_1, R_1 et S_1 respectivement l'année suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ R_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/5 & 1/8 \\ 1/3 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1/10 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ R_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/5 & 1/8 \\ 1/3 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1/10 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

(b) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est la probabilité qu'une personne choisisse un séjour de repos à long terme ?
Solution. Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T-\mathbb{1})X = 0.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
(T-\mathbb{1})X=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1/3 & 2/5 & 1/8 \\ 1/3 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & 1/10 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -40x+48y+15z=0 \\ 8x-12y+3z=0 \\ 2y-5z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y=5z \\ 8x-27z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=27z/8 \\ y=5z/2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27z/8 \\ 5z/2 \\ z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 27 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(27+20+8)=1 \Leftrightarrow c=1/55$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} 27/55 \\ 20/55 \\ 8/55 \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'une personne choisisse un séjour de repos à long terme est de $20/55 = 4/11$.

3. **On donne la fonction f explicitement par**

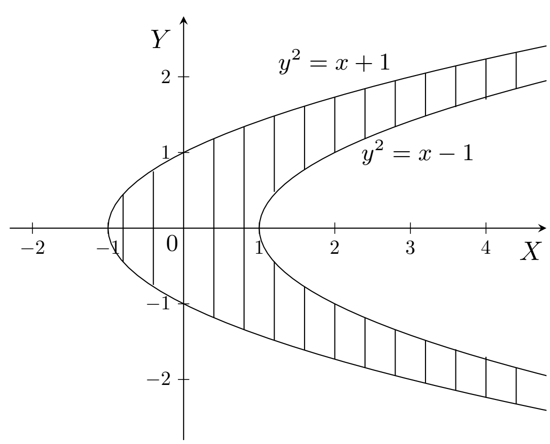
$$f(x,y) = \arcsin(x-y^2).$$

(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
(b) Représenter ce domaine dans un repère orthonormé en le hachurant.
(c) Si c'est possible, déterminer la valeur des dérivées partielles de la fonction f au point de coordonnées cartésiennes (1/4,1/2) en simplifiant au maximum.

Solution. (a) La fonction f est dérivable sur

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x-y^2 < 1\right\}.$$

(b) La représentation graphique de A est l'ensemble hachuré ci-dessous, bords exclus.



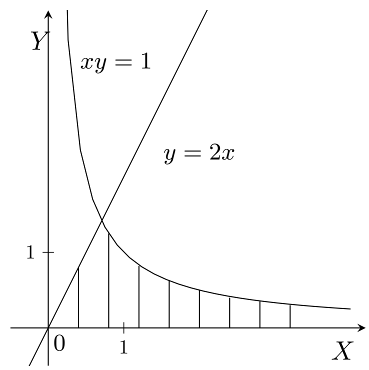
(c) La fonction est dérivable en $(1/4, 1/2)$ puisque $1/4 - (1/2)^2 = 0 \in]-1, 1[$. Dans A, on a

$$D_x f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x - y^2)^2}} \quad \text{et} \quad D_y f(x, y) = \frac{-2y}{\sqrt{1 - (x - y^2)^2}}.$$

Par conséquent,

$$(D_x f)(1/4, 1/2) = 1 \quad \text{et} \quad (D_y f)(1/4, 1/2) = -1.$$

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré ci-dessous**
(a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées,
(b) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.



Solution. Le point d'intersection de la droite et de la courbe a pour coordonnées $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par
(a)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \sqrt{2}/2\right],\ y \in [0, 2x]\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\sqrt{2}/2, +\infty\right[,\ y \in [0, 1/x]\right\},$$

(b)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \sqrt{2}\right],\ x \in [y/2, 1/y]\right\}.$$