



Mathématiques générales II (MATH1009)

Année académique 2025-2026

CORRIGÉ DE L'INTERROGATION DU 31 MARS 2026

QUESTIONNAIRE

Théorie 8 points

Rédiger précisément et clairement vos réponses.

1. (a) Énoncer les lois des mineurs relatives aux propriétés des déterminants d'une matrice carrée.
(b) Expliciter ces lois sous forme d'une égalité faisant intervenir des produits de matrices; bien expliquer les notations utilisées.
(c) Donner la définition de la notion d'inverse d'une matrice carrée.
(d) Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée admette une matrice inverse.
(e) **Démontrer** que la condition que vous avez énoncée en (d) est suffisante.

2. Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]1, +\infty[\times]0, +\infty[$.
(a) Quand dit-on que la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(2, 1)$?
(b) Qu'appelle-t-on alors la dérivée partielle de f (par rapport à sa deuxième variable) en ce point?
(c) Que signifie la notation $C_1(A)$ et « la fonction f est continûment dérivable sur A »?

Exercices 12 points

Rédiger précisément et clairement vos réponses.

1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) La matrice A est-elle inversible? Justifier.
 - (b) Que vaut le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la troisième colonne?
 - (c) Déterminer les valeurs propres de A .
 - (d) Calculer $A^2 - \tilde{A}$.
2. Soit une fonction f appartenant à $C_1(]-1, 1[\times]1, +\infty[)$. On considère alors la fonction F définie explicitement par

$$F(t) = f(\ln(t), e^{t-1}).$$

Dans quel sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} cette fonction est-elle dérivable? Justifier.

3. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- (a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.
- (b) En tout point du domaine de dérivabilité, calculer explicitement l'expression suivante, en simplifiant au maximum

$$D_1 f(x, y) + i D_2 f(x, y).$$

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne un ensemble A par la description analytique suivante

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1] \text{ et } \ln(x) \leq y \leq \ln(1/x)\}.$$

- (a) Représenter l'ensemble A en le hachurant ou en le coloriant.
- (b) Ensuite, décrire cet ensemble en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.

Questions de théorie

1. (a) **Enoncer les lois des mineurs relatives aux propriétés des déterminants d'une matrice carrée.**
(b) **Expliciter ces lois sous forme d'une égalité faisant intervenir des produits de matrices ; bien expliquer les notations utilisées.**
(c) **Donner la définition de la notion d'inverse d'une matrice carrée.**
(d) **Donner une condition suffisante pour qu'une matrice carrée admette une matrice inverse.**
(e) **Démontrer que la condition que vous avez énoncée en (d) est suffisante.**

Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

2. **Soit f une fonction définie sur l'ensemble $A =]1, +\infty[\times]0, +\infty[$.**
(a) **Quand dit-on que la fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable au point $(2, 1)$?**
(b) **Qu'appelle-t-on alors la dérivée partielle de f (par rapport à sa deuxième variable) en ce point ?**
(c) **Que signifie la notation $C_1(A)$ et « la fonction f est continûment dérivable sur A » ?**

Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

Exercices

1. **Soit la matrice**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) **La matrice A est-elle inversible ? Justifier.**

Solution. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Le déterminant de la matrice vaut

$$(-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0.$$

Comme le déterminant n'est pas nul, A est donc inversible.

- (b) **Que vaut le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la troisième colonne ?**

Solution. Le cofacteur de l'élément qui se trouve sur la deuxième ligne et la troisième colonne, noté $(A)_{2,3}$ vaut

$$(A)_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(8 + 4) = -12.$$

- (c) **Déterminer les valeurs propres de la matrice A .**

Solution. Si $\mathbb{1}$ désigne la matrice identité de dimension 3, alors les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$.

En appliquant la première loi des mineurs à la deuxième ligne, on a

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 8 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1 - \lambda) \left((1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 \right) \\
 &= (1 - \lambda) (3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1) \\
 &= (1 - \lambda) (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\
 &= (1 - \lambda) (\lambda - 2)^2.
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc les nombres 1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

(d) Calculer $A^2 - \tilde{A}$.

Solution. On a

$$\begin{aligned}
 A^2 - \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -16 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 28 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & -16 & -5 \\ 4 & 0 & -8 \\ 5 & 28 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Soit une fonction f appartenant à $C_1(]-1, 1[\times]1, +\infty[)$. On considère alors la fonction F définie explicitement par

$$F(t) = f(\ln(t), e^{t-1}).$$

Dans quel sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} cette fonction est-elle dérivable? Justifier.

Solution. La fonction F est dérivable sur

$$\begin{aligned}
 A &= \left\{ t \in \mathbb{R} : t > 0, -1 < \ln(t) < 1, e^{t-1} > 1 \right\} \\
 &= \left\{ t \in \mathbb{R} : t > 0, e^{-1} < t < e, t - 1 > \ln(1) = 0 \right\} \\
 &= \left\{ t \in \mathbb{R} : e^{-1} < t < e, t > 1 \right\} \\
 &=]1, e[.
 \end{aligned}$$

3. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de cette fonction.

(b) En tout point du domaine de dérivabilité, calculer explicitement l'expression suivante, en simplifiant au maximum

$$D_1 f(x, y) + i D_2 f(x, y).$$

Solution. (a) La fonction f est dérivable sur

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0, x \neq 0\} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

(b) Comme $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = (1/2) \ln(x^2 + y^2)$, en tout point de A on a

$$D_1 f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + (y/x)^2} \times \left(\frac{-y}{x^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

et

$$D_2 f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + (y/x)^2} \times \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{ix}{x^2 + y^2}.$$

Dès lors

$$D_1 f(x, y) + i D_2 f(x, y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + \frac{iy - x}{x^2 + y^2} = 0.$$

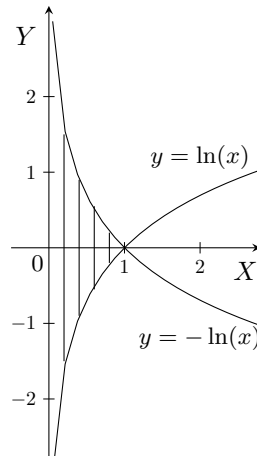
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne un ensemble A par la description analytique suivante

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1] \text{ et } \ln(x) \leq y \leq \ln(1/x)\}.$$

(a) Représenter l'ensemble A en le hachurant ou en le coloriant.

(b) Ensuite, décrire cet ensemble en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.

Solution. (a) Puisque $\ln(1/x) = -\ln(x)$, A est l'ensemble des points de la partie hachurée du plan ci-dessous, les points de l'axe des ordonnées exclus et les points des courbes inclus.



(b) L'ensemble hachuré A est décrit analytiquement par

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-\infty, 0], x \in]0, e^y]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[, x \in]0, e^{-y}]\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}, x \in]0, e^{-|y}]\}. \end{aligned}$$