LIÈGE université
Sciences

Faculté des Sciences

MATHEMATIQUE, F. Bastin

« partim B »

EXERCICES DE BASE

Bachelier (Bloc 1) en Chimie (Q2)
Bachelier (Bloc 2) en Géographie (Q1) et Géologie (Q2)

Année académique 2019-2020

Jacqueline CRASBORN

Introduction

Généralités

Ce fascicule fournit aux étudiants les listes d'exercices à résoudre lors des répétitions du cours de MATHEMATIQUE (partim B) de l'année académique 2019-2020. Il présente aussi la résolution complète d'exercices de base (listes 2002/2003) et les solutions des exercices des listes 2003/2004 et 2004/2005 couvrant la matière de ce cours s'adressant aux futurs bacheliers de premier bloc en chimie ainsi qu'aux futurs bacheliers de deuxième bloc en géographie et en géologie.

Ce fascicule a été rédigé pour répondre à divers objectifs. Il veut fournir aux étudiants une référence correcte sur laquelle s'appuyer pour tenter de résoudre les exercices proposés au cours des répétitions.

La rédaction de ce fascicule a également pour but d'insister sur le vocabulaire spécifique, les symboles mathématiques à utiliser, la rigueur exigée dans la rédaction, les liens indispensables qui doivent figurer entre les différentes étapes d'un développement mathématique. Trop souvent, en corrigeant des interrogations par exemple, on peut lire une succession de notations, d'équations, de calculs écrits les uns à côté des autres sans la moindre indication relative à la logique du raisonnement. C'est cet écueil aussi qu'on voudrait éviter aux étudiants grâce à ce fascicule.

Une dernière intention, et non la moindre, est d'amener, au plus vite, les étudiants à prendre en charge leur formation de la façon la plus active et la plus autonome possible.

Pour terminer, je m'en voudrais de ne pas exprimer mes plus vifs remerciements à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle a réservé à cette initiative, les conseils qu'elle m'a donnés, sa relecture attentive et la confiance qu'elle me témoigne dans mon travail avec les étudiants. Je remercie également tous les assistants avec lesquels je travaille, tout spécialement Christine Amory et Christophe Dozot, pour leurs suggestions constructives et leur participation à l'élaboration de ce fascicule.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2019 - 2020

Informations relatives aux répétitions

Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   — structurée (contexte, justifications, conclusion ...),
   — précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée ...) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? ...) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation ...) ;

4) **l'autonomie**
   — dans la recherche de pistes ou d'idées par l'utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours, fascicules intitulés "'Bases" et "Exercices de base" ...) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d'aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,
   — dans l'organisation et la planification de son travail ;
5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

Consignes pour préparer une répétition

1. Répondre soigneusement aux questions de théorie de la première partie de chaque liste.
2. Il est vivement conseillé
   — de prendre connaissance des exercices à résoudre lors de la répétition future afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   — de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l'assistant lors de la répétition

Déroulement des répétitions

1. Dans le cas de notions habituellement non vues dans l'enseignement secondaire ou qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l'assistant résout 1 ou 2 exercices "modèle" pour leur permettre de se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières ; il fait participer les étudiants à leur résolution. Ensuite, l'assistant fera une synthèse du processus de résolution en mentionnant les éléments de théorie utilisés.
2. Enfin, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S'il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l'assistant qui l'aidera dans sa recherche.

Tous les exercices de la liste doivent être résolus au plus tard pour la répétition suivante ; la plupart des étudiants seront obligés d'achever à domicile. Dans ce cas, s'ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors d'une séance de remédiation ou envoyer un courriel à l'un des assistants.

Les solutions des exercices proposés pour les répétitions se trouvent en fin de ce fascicule. Les solutions des tests seront mises sur le web en fin de semaine.
Les étudiants qui désirent s'entraîner à la résolution de problèmes élémentaires trouveront une liste de problèmes de ce type, ainsi que leur solution, au premier chapitre.

Table des matières des répétitions pour 2019-2020

1. Calcul matriciel (1).
2. Calcul matriciel (2).
3. Compléments.
4. Fonctions de plusieurs variables (1).
5. Fonctions de plusieurs variables (2).
6. Fonctions de plusieurs variables (3).
7. Fonctions de plusieurs variables (4).
8. Approximations polynomiales.
9. Suites.
10. Séries (1).

11. Séries (2).
12. Mathématiques appliquées (1).
13. Mathématiques appliquées (2).
14. Révisions en vue de l'examen.

Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l'avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l'adresse suit

http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.

L'équipe des assistants
Année académique 2019 - 2020

AVERTISSEMENT

Les listes d'exercices résolus présentées dans ce fascicule sont celles des années académiques 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005. Elles ont été modifiées en fonction de la nouvelle version du cours de Mathématique de F. Bastin. Les listes des années suivantes se trouvent sur la page web relative au cours.

Dans la nouvelle version de ce cours, les matières sont présentées en deux parties : Mathématique et Mathématique (partim B)

Les exercices des répétitions du cours Mathématique (partim B) pour l'année académique 2019-2020 se trouvent au chapitre 1. Ceux des années 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005 se trouvent dans les chapitres 2 à 4 inclus. Les solutions des exercices des répétitions se trouvent au chapitre 5.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2019 - 2020

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2019-2020

Mathématique : partim B

LISTES TYPE

RÉPÉTITIONS CHIMIE (B1), GÉOGRAPHIE ET GÉOLOGIE (B2)

Version 6 septembre 2019

Chapitre 1

Listes d'exercices

Liste 1 : calcul matriciel (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on une matrice ?
2. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
3. Etant donné une matrice A, définir
   (a) sa matrice conjuguée,
   (b) sa matrice transposée,
   (c) sa matrice adjointe.
4. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
   (a) addition de deux matrices du même type,
   (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
   (c) multiplication de deux matrices.
5. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
6. Citer les propriétés liées aux déterminants.
7. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
8. Quelle est la forme de cette matrice ?
9. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

Préambule

Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices. Après modélisation, l'outil « matrices » permet d'effectuer de manière efficace, claire et très gérable, des calculs et estimations qui semblent à priori parfois complexes.

In applied mathematics, the Leslie matrix is a discrete, age-structured model of population growth that is very popular in population ecology. It was invented by and named after P. H. Leslie. The Leslie Matrix (also called the Leslie Model) is one of the best known ways to describe the growth of populations (and their projected age distribution), [...]. [1] En utilisant les matrices, les éléments qui y sont liés (détermimant, valeurs propres, vecteurs propres, ...), on récolte beaucoup d'informations quant à l'évolution de la population modélisée, comme des taux de croissance à long terme, l'estimation de tel ou tel type d'individus après un certain temps, etc

1. Le texte qui suit est tiré de Wikipedia.

REMARQUE pour cette liste
- Plusieurs exercices ont déja été faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(2-7), II. 1(A - C) et III. (D) seront résolus par l'assistant.

I. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices A, B, C données par

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

2. Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1$, $\forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

3. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3I = 0$.

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\ (a, b \in \mathbb{C})$$

II. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix}\ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Etant donné une matrice carrée A,
   (a) qu'appelle-t-on valeur propre de A ?
   (b) qu'appelle-t-on vecteur propre de A ?
2. En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
3. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
4. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
6. Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?
7. Qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(C) et II. 1 seront résolus par l'assistant.

I. Diagonalisation

1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?
3. Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?

II. Divers

1. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,

— s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

Sachant cela,

(a) Représenter la matrice de transition de ce système.

(b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?

(c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?

2. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.

(a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?

(b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

3. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

— Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.

— Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?

— Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
est aussi une matrice qui représente une rotation.

4. Considérons la fonction $f : (x,y) \mapsto -x^2 - y^2 + xy + 2x - 4y + 3$.

a) Résoudre le système $\begin{cases} D_x f(x,y) = 0 \\ D_y f(x,y) = 0 \end{cases}$

b) Calculer les dérivées secondes de f.

c) Notons $H_f(x,y)$ la matrice $\begin{pmatrix} D_x^2 f & D_x D_y f \\ D_y D_x f & D_y^2 f \end{pmatrix}$.

Calculer $\det H_f(x,y)$ si (x,y) est la (les) solution(s) du système ci-dessus.

d) Mêmes questions avec la fonction $g : (x,y) \mapsto x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$.

5. Vrai ou faux (Justifier)

(a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) La matrice $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ est inversible.

(c) Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.

(d) Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.

(e) Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5 \det A$.

(f) Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors $\det B = 5 \det A$.

Liste 3 : compléments

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices reprend des énoncés du type de ceux résolus au premier quadrimestre. Ces rappels relatifs aux représentations d'ensembles, à la dérivation et au calcul intégral seront utiles pour les exercices portant sur les fonctions de plusieurs variables.

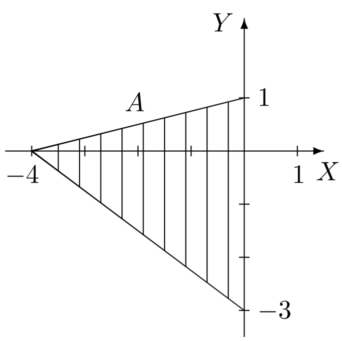
A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

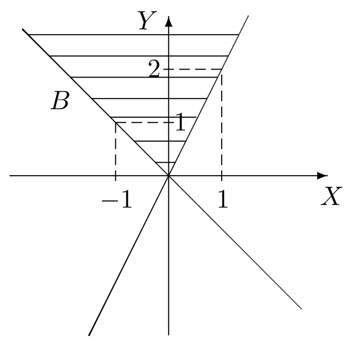
I. Représentation d'ensembles

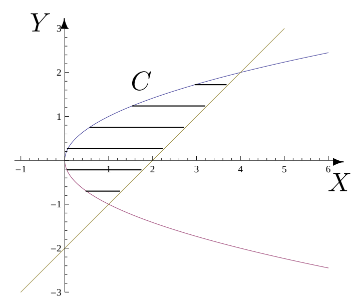
1. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1 - x^2}\}\}$
   b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$
   c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0, 1]\}$

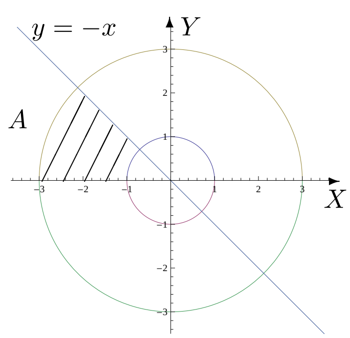
2. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord
   a) l'ensemble de variation des abscisses
   b) l'ensemble de variation des ordonnées.

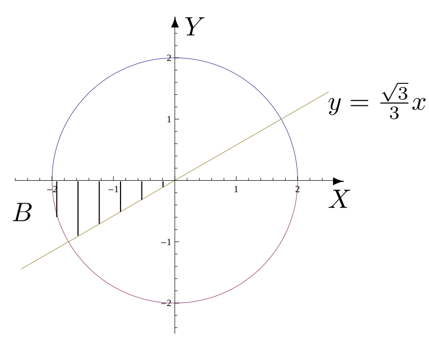






3. En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.





4. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est

   $$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

   Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.

II. Dérivation

1. En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si
   a) $f : x \mapsto |x^2 - 4|$ et $x_0 = 1$
   b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ et $x_0 = 2$
2. a) On donne la fonction f dérivable sur $]-1, 1[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\ln(2x))$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?
   b) Même question pour g dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ avec $G(x) = g(\arcsin(2x + 1))$.

III. Calcul intégral

1. a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $f_1 : x \mapsto x^2 \sin(ax)$ est-elle intégrable sur $[0, 1]$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{-a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2+a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?
2. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$a) \int_0^1 \ln(x)\ dx \qquad\qquad b) \int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4}\ dx$$

3. On considère l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.

IV. Divers

1. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut

$$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A - 0,78).0,22}$$

   Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?
2. Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut

$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5 - x)(0,25 - x)}$$

   Que vaut x sachant que $x \in]0; 0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?
3. En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à 17 % de la quantité initiale.
   Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
   a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
   b) l'âge de cet arbuste
4. Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle

$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2} \sin^2(\theta) - \cos(\theta),\ \theta \in [-\pi, \pi]$$

où n est un paramètre réel strictement positif. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de ν (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).
Déterminer les positions (éventuelles) d'équilibre du système.

5. Par une intégration par parties

   a) donner une formule de récurrence pour $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(x))^n \, dx$ $(n \in \mathbb{N})$

   b) En déduire la valeur de I_n.

Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions et représentations graphiques

Qu'appelle-t-on

1. domaine de définition d'une fonction de 2 variables ?
2. courbe de niveau d'une fonction de 2 variables ?
3. surface de niveau d'une fonction de 3 variables ?
4. trace d'une surface de niveau dans un plan orthogonal à l'un des axes ?
5. surface quadrique ? Quelles sont les différentes quadriques ?

II. Dérivation et gradient

1. Quand dit-on qu'une fonction de 2 variables est dérivable par rapport à sa première (resp. deuxième) variable en un point de coordonnées (x_0, y_0) d'un ouvert où elle est définie ?
2. Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de deux variables ?
3. Définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

Préambule

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi, par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si x, y, z sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où p est la pression du gaz (en pascal), V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube), n est la quantité de matière (en mole), R est la constante universelle des gaz parfaits et T est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...

Les exemples sont nombreux et la bonne manipulation (expression d'une variable ou d'un paramètre en fonction des autres, dérivation, intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, ...)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(g) - 2(b) - 4(a), II. 2(h) - 5(c) et 9(a) seront résolus par l'assistant.

I. Définitions et représentations graphiques

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x - y|}, \quad h(x,y) = \arcos(xy).$$

   S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1/2, -1)$ par f, de $(1, 2)$ par g et de $(2, 1)$ par h. Dans un repère orthonormé de l'espace représenter ces points et leur image éventuelle.

2. Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si
   a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
   b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
   c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$

3. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?

4. Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b)x^2 + y^2 = 4.$$

II. Dérivation et gradient

1. En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1, 2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

2. On donne les fonctions f, g et h par

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \text{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

   a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.
   a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
   b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

4. a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.
   b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

5. On donne les fonctions f et g respectivement par

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x+y^2+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

6. On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y)),\ (x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

7. On considère la fonction $f_r(x,y) = x^r e^{-\frac{y}{x}},\ r$ étant un réel.
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Déterminer le réel r tel que $D_x f_r(x,y) = yD_y^2 f_r(x,y) + D_y f_r(x,y),\ (x,y) \in B$.

8. On donne la fonction $f(x,y) = \sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.

9. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :
a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
b) $T(x,y) = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$
Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Dérivation des fonctions composées

1. Qu'appelle-t-on fonction composée ?
2. Quel est l'énoncé du théorème donnant les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?

II. Permutation de l'ordre d'intégration

Qu'appelle-t-on "permutation de l'ordre d'intégration" dans le calcul des intégrales doubles ? Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du resultat si on intègre sur un ensemble fermé borné ?

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Quand une fonction de 2 variables est-elle intégrable sur un ensemble fermé borné ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(a-b-c) - 4, II. 1(a) et III. 2(b) - 3(b) seront résolus par l'assistant.

I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.
   b) Même question pour g, continûment dérivable sur$]0,1[\times]\ln\left(\frac{\pi}{3}\right),+\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $1/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}[\times]\sqrt{2},+\infty[\times]0,3[$.

3. Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_x f)(2,7) = 6$ et $(D_y f)(2,7) = -8$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 3, que vaut (DF)(3) ?

4. Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en$(1,0)$ si
$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$
$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$
   et $(D_u f)(2,3) = -1$ et $(D_v f)(2,3) = 10$, calculer $(D_s F)(1,0)$ et $(D_t F)(1,0)$.

5. On donne la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ définie et 2 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ ($r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$) et on considère $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
   Montrer que $\quad (D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \dfrac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$

   Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

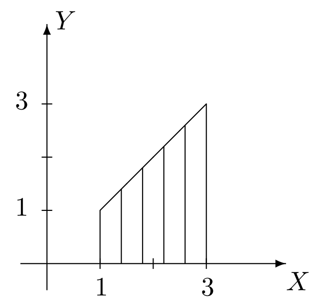
II. Permutation de l'ordre d'intégration

1. Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx \right) dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3} \left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

2. On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy.$$

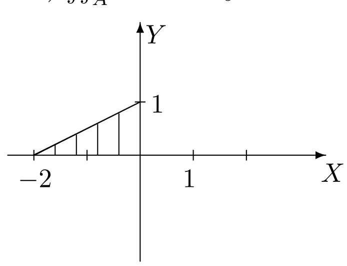


III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

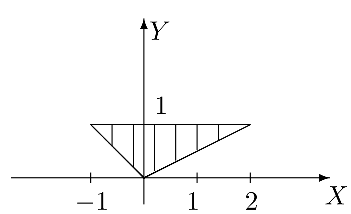
1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x\cos(y)$.

2. Si elle existe, calculer l'intégrale de
   a) $f(x,y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [1+x^2, 9-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$
   c) $f(x,y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1,1]$
3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

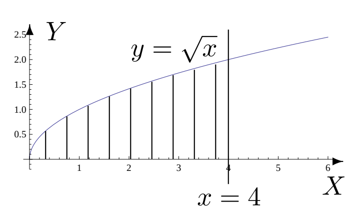
a) $\iint_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\iint_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\ dx\,dy$



4. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx \right)\ dy.$

   Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.

Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (3)

A préparer AVANT de venir à la répétition

Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné parallèle à l'axe Y, quand dit-on qu'elle est intégrable sur A ? Comment définit-on alors son intégrale ?
2. Même question si l'ensemble A est parallèle à l'axe X.
3. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné, quand peut-on permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 2(b) et 4 seront résolus par l'assistant.

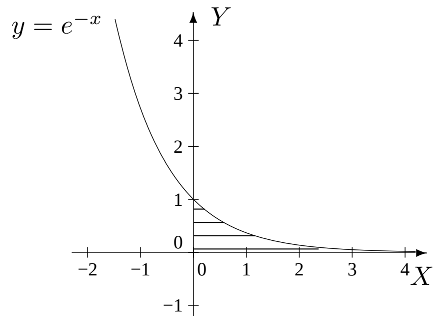
Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.
   a) $\iint_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$
   b) $\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\, dx \right) dy$
   c) $\iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$
   d) $\iint_A x^3\, e^{-x^2 y}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

2. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.
$$a) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx \right) dy, \quad b) \int_0^1 \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\, dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx$$

3. On considère l'intégrale double suivante
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \cos(y-x) e^{-x}\, dy \right) dx$$
   a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
   b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
   c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

4. Calculer l'intégrale de $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x - y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



Liste 7 : fonctions de plusieurs variables (4)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Volume d'un corps

Quelle est l'interprétation "graphique" de l'intégrale double d'une fonction continue et positive sur un ensemble fermé borné du plan ?

II. Intégration par changement de variables polaires

1. Que vaut le jacobien dans le cas d'un changement de variables polaires ?
2. Donner la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, l'exercice II. 3 sera résolu par l'assistant.

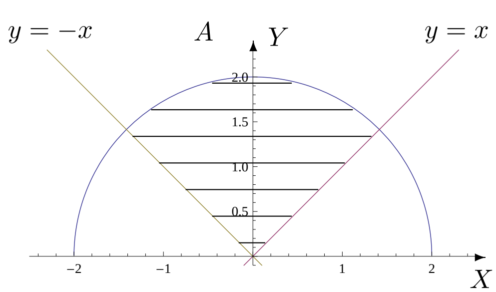
I. Volume d'un corps

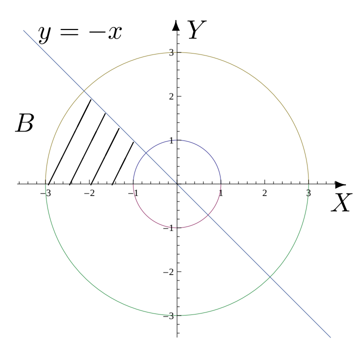
Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. Corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 1 - x^2$ et les plans d'équation $z = 0,\ y = -1$ et $y = 2$.
2. Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation $2x + 3y + z = 6$
3. Corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 1 - 4x^2 - y^2$ et le plan d'équation $z = 0$.

II. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer
   a) $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\ dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   b) $\displaystyle\iint_B xy\ dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   c) $\displaystyle\iint_C (2x+y)\ dx\,dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.





2. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = s^{-1} \iint_A x \, dx \, dy, \quad y_A = s^{-1} \iint_A y \, dx \, dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

3. Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 9 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.

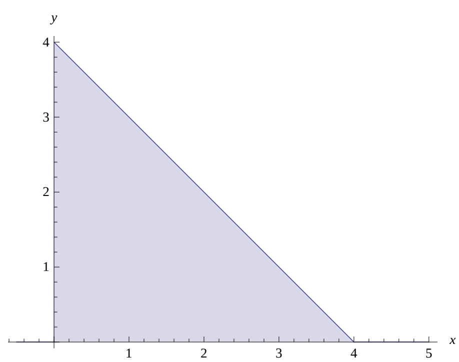
III. Divers

La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \iint_R \delta(x, y) dx dy,$$

où $\delta(x, y)$ est la densité au point de coordonnées (x, y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent 4 m. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [2], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) quelle est la masse de cette plaque ?
b) en quelles unités s'exprime la constante K ?



2. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)

Liste 8 : approximations polynomiales

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
3. (a) Enoncer le résultat appelé "Développement limité de Taylor".
   (b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.

Préambule Cette liste concerne les **approximations polynomiales.**

*****

Qu'entend-on par approximation polynomiale d'une fonction dans le cas où celle-ci est suffisamment dérivable ?
Comment introduire ces approximations à partir des connaissances actuelles ?
A quoi peuvent servir ces approximations ?

*****

Le *théorème des accroissements finis* pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ s'exprime de la manière suivante : quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir de sa valeur en a suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x - a)Df(\xi).$$

Ceci peut s'interpréter en disant que l'erreur commise en approchant la valeur de f en x par sa valeur en a est proportionnelle à l'écart entre les deux points (a et x) et à la dérivée de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Lorsque la fonction est plus régulière, ce résultat peut être étendu de la manière suivante (*c'est ce que l'on appelle le développement limité de Taylor*). Si f est p fois dérivable dans I, alors quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir des valeurs en a de ses $p-1$ premières dérivées suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x - a)Df(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi).$$

La fonction P définie par

$$P(t) = f(a) + (t - a)Df(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a), \quad t \in \mathbb{R}$$

est un polynôme de degré au plus $p - 1$ en la variable t. Le développement limité de Taylor ci-dessus s'écrit ainsi

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi)$$

et nous dit que la valeur de f en x est approchée par la valeur en x de ce polynôme, l'erreur commise étant proportionnelle à l'écart entre la p^e puissance de l'écart entre a et x et à la dérivée d'ordre p de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Si a est fixé et que la dérivée d'ordre p de f est continue en a, alors on en déduit que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Ceci exprime de façon précise la manière dont le polynôme approche la fonction au voisinage de a. Voir cours pour plus de détails.

Ce genre de résultat est très utile quand il s'agit d'obtenir une estimation de grandeurs physiques.

Ainsi par exemple, la force de marée agissant sur une masse m peut être définie comme la différence de l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et de l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par R le rayon terrestre, d la distance[3] Terre-Lune, G la constante de gravité, M la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport R/d est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force F est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

Exercice après lecture du préambule

Expliquer pourquoi une approximation de F est donnée par l'expression précédente.

REMARQUE pour cette liste
Plusieurs exercices seront faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 1 ($f_5,\ f_6$) - 2 (b) - 3 seront résolus par l'assistant.

Approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations. Pour f_5,
   a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   b) indiquer où se situe le graphique de f_5 au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

   $f_1(x) = \cos(x)\, e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$

   $f_3(x) = \dfrac{1}{1-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_4(x) = \operatorname{arctg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0,1,2$

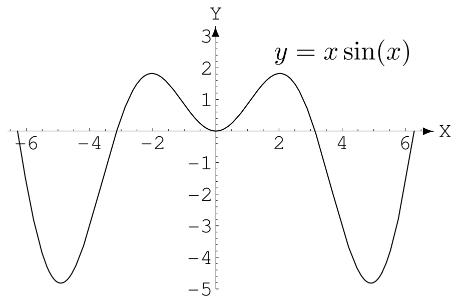
   $f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2$ $\qquad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2$

2. a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

   b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction $f(x) = x\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.
   (Suggestion : $|\sin(x)| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$)

---

3. entre les centres respectifs



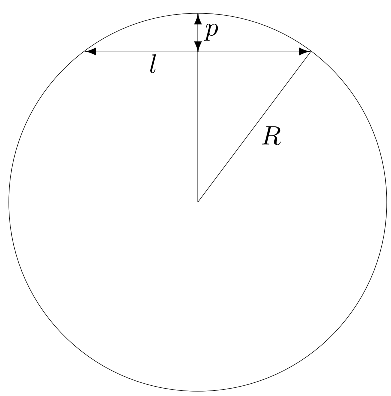
3. Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...

   Comment peuvent-ils procéder ?

4. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par [4]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$

5. Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale p de ce tunnel.



4. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$; décomposer en fractions simples

LISTE 9 : SUITES

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions

1. Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des naturels ou des entiers ou encore un sous-ensemble infini de ceux-ci.
2. Une sous-suite de la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite dont les éléments sont pris dans l'ensemble $\{x_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ en conservant la croissance stricte des indices. Une sous-suite de la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est une suite notée $x_{k(m)}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ avec $k(m) < k(m+1)$ pour tout m.
3. Une suite de réels x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge
   1) vers un nombre a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|x_m - a| \leq \varepsilon,\ \forall m \geq M$.
   2) vers l'infini si, pour tout $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|x_m| \geq R,\ \forall m \geq M$.
   On démontre que si une suite converge, sa limite est unique.
4. Une suite numérique réelle x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ est croissante (resp. décroissante) si $m < m' \Rightarrow x_m \leq x_{m'}$ (resp. $x_m \geq x_{m'}$) $\forall m,\, m' \in \mathbb{N}_0$.
   Comment vérifier la croissance (resp. décroissance) d'une suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$?
   a) Montrer que $x_{m+1} - x_m \geq 0$ (resp. ≤ 0) $\forall m \in \mathbb{N}_0$.
   b) Si les éléments de la suite sont strictement positifs, on peut aussi montrer que $\dfrac{x_{m+1}}{x_m} \geq 1$ (resp. ≤ 1) $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

II. Propriétés

1. Toute suite numérique réelle croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge vers la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses éléments.
2. Si la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de complexes non nuls converge vers 0 (resp. ∞) alors la suite $\dfrac{1}{x_m}$ converge vers ∞ (resp. 0).
3. La suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l (réel ou ∞) si et seulement si toute sous-suite de x_m converge vers l.
   Critère de divergence : si, d'une suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$, on peut extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes alors la suite x_m diverge.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ $\begin{cases} \text{1) converge vers 0 si } |a| < 1 \\ \text{2) converge vers } \infty \text{ si } |a| > 1 \\ \text{3) converge vers 1 si } a = 1 \\ \text{4) diverge si } a = -1 \end{cases}$
5. **Critère de comparaison** : soient 2 suites numériques réelles x_m et y_m $(m \in \mathbb{N}_0)$.
   Si la suite x_m converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et si la suite y_m est telle que $x_m \leq y_m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$ (resp. $y_m \leq x_m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$) alors la suite y_m converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
6. **Théorème de l'étau** : soient 3 suites numériques réelles $x_m,\ y_m$ et z_m $(m \in \mathbb{N}_0)$.
   Si les suites x_m et y_m convergent vers a et si z_m est tel que $x_m \leq z_m \leq y_m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$ alors la suite z_m converge vers a.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices Ex 1 (b-d-g-h) - Ex 3 - Ex 4 (i-ii) seront résolus par l'assistant.

Suites

1. Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence :

   a) $x_m = \dfrac{2m^2+5m+1}{3m^2+2}$ $(m \in \mathbb{N})$

   b) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

   c) $x_n = n - \sqrt{n^3-n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

   d) $x_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

   e) $x_n = \ln(2n^2-n) - \ln(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

   f) $x_k = \sqrt[k]{k^2}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

   g) $x_n = \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

   h) $x_j = \dfrac{j!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

   i) $x_j = \dfrac{(j!)^2}{(2j)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

   j) [5] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par
$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$
est divergente.

3. Montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon
$$x_0 = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_j = \sqrt{2+x_{j-1}} \quad ,\forall j \in \mathbb{N}_0$$
est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}_0$ avec $a \neq 1$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_{n+1} = au_n + b,\ u_0 \in \mathbb{R}.$$
   i) En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule limite L possible de cette suite ?
   ii) Définissons $v_n = u_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   iii) Application : considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons A_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $A_0 = 0$?

5. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Liste 10 : Séries (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

Définitions et propriétés

1. Qu'appelle-t-on
   a) série de terme général x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) ?
   b) série convergente ? divergente ?
   c) somme d'une série convergente ?
   d) série géométrique ?
   e) série de Riemann ?
2. Définir la fonction exponentielle par une série.
3. Dans quel cas une série géométrique converge-t-elle ? Que vaut alors sa somme ?
4. Dans quel cas une série de Riemann converge-t-elle ?
5. Que peut-on dire d'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ?
6. Citer
   a) le critère de comparaison des séries
   b) le critère des séries alternées

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices Ex 1 (a-e-f) - Ex 2 (e-f-g) seront résolus par l'assistant.

Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{j^2+1}{j^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j^3+\sqrt{3}}$

   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\ln(n)}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

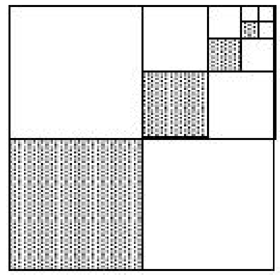
2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :

   a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^j$ b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^n}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{3k-1}}{k!}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$

3. Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel $1,32222\ldots$.

4. Un carré de $4\,cm$ de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?



5. Une balle est lâchée d'une hauteur de $2\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?

6. Démontrer l'égalité
$$\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^6(\theta) + \ldots = \tan^2(\theta).$$
A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

Liste 11 : Séries (2)

A résoudre PENDANT la répétition
(et à achever à domicile si nécessaire)

Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

   a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^3 - j + 2}{j^3 + 5j^2 + 10}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2 + 1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 1}$

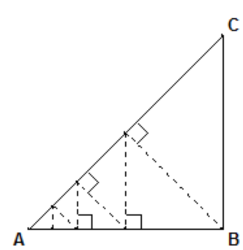
   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{7n + 15}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{n^3 + 1}}$ $(p \in \mathbb{N}_0)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ak}$ $(a \in \mathbb{R})$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \ln(3)}$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent (on donne $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $0 < ab < c$ et $c \neq 0$) :

   a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^{j+3}}{j! \ln(4)}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 5k + 6}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n b^{n+1}}{c^{n+2}}$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{k}{k+3}\right)$

3. Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $|BC| = a$ cm $(a > 0)$ comme représenté ci-dessous. Une puce qui se trouve en B se déplace le long d'une droite perpendiculaire au segment $[AC]$. Lorsqu'elle atteint ce segment, elle tourne et revient sur le segment $[AB]$ en prenant une route perpendiculaire à $[AB]$. Elle fait ainsi l'aller-retour entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point A. Quelle sera la distance parcourue par la puce ?



Liste 12 : Mathématiques appliquées (1)

Préambule

Les exercices de cette liste et de la suivante montrent des applications de notions mathématiques étudiées dans le cadre du cours de Mathématiques générales. Ces applications relèvent de la physique, de la biologie, du calcul des probabilités, de la géographie et même de la cryptographie.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Fonctions de plusieurs variables

1. En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [6]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.
   Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de* 3 *paramètres : l'énergie interne* U*, le volume* V *et le nombre de particules* N *du système.*
   Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction* S*, dépendant de* U*,* V *et* N*, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique.* Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par
   $$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$
   où
   — T est la température du système ;
   — p est la pression du système ;
   — μ est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [7]) ;
   et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

   Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par
   $$S = k_B N \ln\left(\frac{V - Nv_0}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{U + \frac{K_i N^2}{V}}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2} k_B N$$
   où
   — k_B est la constante de Boltzmann et vaut approximativement $1,38.10^{-23} J/K$,
   — v_0 est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,
   — $K_i > 0$ est le paramètre d'interaction entre les particules,
   — m est la masse d'une particule,
   — $\hbar$ est la constante de Planck et vaut $6,626.10^{-34} J.s$,
   déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

6. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va "diffuser" dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.

7. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

2. La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation [8] :

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant t, la température d'un tel gaz, qui est de $300K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $100\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

3. La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :

> Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que
> $$(D_x f)(a,b) = (D_y f)(a,b) = 0.$$
> Posons
> $$D = (D_x^2 f)(a,b)(D_y^2 f)(a,b) - [(D_x D_y f)(a,b)]^2.$$
> (a) Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;
>
> (b) Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;
>
> (c) Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé “point-selle” ;
>
> (d) Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.

En se basant sur ce test,

a) rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction

$$f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

b) déterminer la distance [9] (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1,0,-2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.

4. Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x,y)$ en un point(x,y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par

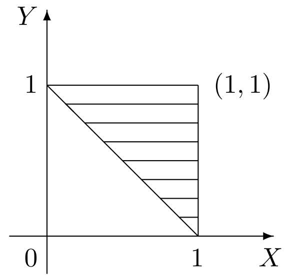
$$Q = \iint_R \rho(x,y)\, dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x,y) est donnée par $\rho(x,y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.

---

8. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

9. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$
et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.



5. En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$, de la manière suivante.
   Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut
$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$
   Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par
$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$
   On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

   Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
   a) le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre ;
   b) le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.

6. Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par
$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx \quad \left(\text{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx\right).$$
   De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\right) dy = 1,$$
   auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par
$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy.$$

   Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 10 \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}.$$

(a) Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.
(b) Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 7 ans mais au moins 2 ans.

7. Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } t < 0 & \\ \mu^{-1} e^{\frac{-t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 10 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Liste 13 : Mathématiques appliquées (2)

Calcul matriciel

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Dx(t) & = & -4x(t)-3y(t)+5t \\ Dy(t) & = & -2x(t)-5y(t)+5e^t \end{array}\right. .$$

Déterminer les composantes $(x(t),y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

2. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Dx(t) & = & x(t)+2y(t)-z(t) \\ Dy(t) & = & 2x(t)+4y(t)-2z(t) \\ Dz(t) & = & -x(t)-2y(t)+z(t) \end{array}\right. .$$

Déterminer les composantes $(x(t),y(t),z(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

3. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
   - étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;
   - étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;
   - étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.

   Déterminer
   a) la matrice de transition du système ;
   b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;
   c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

4. Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :
   - étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;
   - étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
   - étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
   - si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.

   Déterminer la matrice de transition du système.

5. La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.
   Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage

des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, ... , Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \mathrm{S} & \mathrm{U} & \mathrm{I} & \mathrm{S} & * & \mathrm{E} & \mathrm{N} & * & \mathrm{D} & \mathrm{A} & \mathrm{N} & \mathrm{G} & \mathrm{E} & \mathrm{R} \\ 19 & 21 & 9 & 19 & 27 & 5 & 14 & 27 & 4 & 1 & 14 & 7 & 5 & 18 \end{array}.$$

Puisqu'on emploie une matrice 2×2, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs [10] 1×2 :

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par C, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 19 & 21 & 9 & 19 & 27 & 5 & 14 & 27 & 4 & 1 & 14 & 7 & 5 & 18 \\ \mathrm{S} & \mathrm{U} & \mathrm{I} & \mathrm{S} & * & \mathrm{E} & \mathrm{N} & * & \mathrm{D} & \mathrm{A} & \mathrm{N} & \mathrm{G} & \mathrm{E} & \mathrm{R} \end{array}.$$

10. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$$

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,\mathrm{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

— Sachant que $\mathrm{th} : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.

— Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?

Liste 14 : Révisions en vue de l'examen

Fonctions de plusieurs variables

1. On donne la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$.

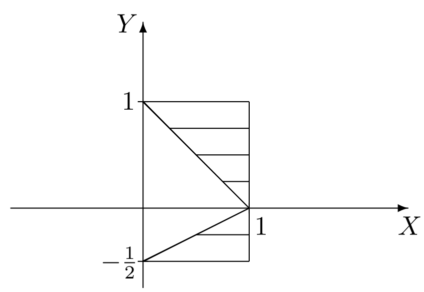
   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2, 1)$.

2. Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-2, 1[\times]-4, 4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x, y) = f(x + y^2, x^2 + 4y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

3. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

   a) $I = \displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x \sin(y^5)\, dy\right) dx$

   b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ si A est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous



   c) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^5}}\, dx\, dy$ si $A = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$

   d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4 + y^2}\, dy\right) dx$

4. Calculer le volume du corps de l'espace borné par les surfaces d'équation cartésienne $x + z = 6$ et $x + y^2 = 4$ et les plans d'équation $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.

Calcul matriciel

1. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0$, 1, 2 et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Séries

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sin(k\theta)}{k(k+1)} \quad (\theta \geq 0) \qquad\qquad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}.$$

2. Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :

$$(1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} \qquad (2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k+5)(2k+3)} \qquad (3) \sum_{n=3}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right] \qquad (4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x)}{n!} \; (x > 0).$$

Chapitre 2

Calcul matriciel

2.1 Exercices de base sur le chapitre 1 (partim B)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ \frac{1}{i} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer (si possible)
$$iA,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA, B\overline{B}.$$

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Factoriser le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. QCM + justifier la réponse
   — Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai□ Faux□
   — Le déterminant d'une matrice carrée dont les éléments sont des complexes est
   un complexe□ une matrice□ un polynôme□ aucune proposition correcte□
   — Si A et B sont des matrices carrées de même dimension qui vérifient $AB = A$, alors B est la matrice identité Vrai□ Faux□
   — Si A est une matrice qui vérifie $A = A^*$, si $c \in \mathbb{C}$ et si on pose $B = cA$, alors $B = B^*$
   Vrai□ Faux□
   — Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = I$, alors M admet un inverse Vrai□ Faux□
   — Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai□ Faux□
   — Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   Vrai□ Faux□
   — Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réelsVrai□ Faux□
   — Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai□ Faux□
   — La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai□ Faux□

Liste 2003-2004

Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux aux chimistes et aux géographes.

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ \frac{-1}{i^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -i+2 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$iA,\ C^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB,\ CA.$$

2. Une matrice carrée est qualifiée de matrice hermitienne lorsqu'elle est égale à son adjointe.
   Une matrice carrée est qualifiée de matrice normale lorsqu'elle commute avec son adjointe.
   2.1) Donner un exemple de matrice hermitienne et un exemple de matrice normale.
   2.2) Déterminer la forme générale des matrices hermitiennes 2×2.
   2.3) Pour chacune des matrices suivantes, déterminer (le plus rapidement possible) si elle est normale ou hermitienne.

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt[3]{\pi} & \frac{1}{i} \\ i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   2.4) En justifiant, répondre par oui ou par non aux questions suivantes.
   — Une matrice hermitienne est toujours une matrice normale.
   — Une matrice normale est toujours une matrice hermitienne.
   — Le produit entre une matrice hermitienne et une matrice normale est commutatif.
   — Le produit entre matrices normales est associatif.
   — Le produit d'un nombre et d'une matrice hermitienne est encore une matrice hermitienne.
   — La somme de deux matrices hermitiennes est encore une matrice hermitienne.
   — Le produit d'un nombre et d'une matrice normale est encore une matrice normale.
   — La somme de deux matrices normales est encore une matrice normale.
3. (*) Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Le déterminant de la matrice suivante est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix}.$$

6. (*) Factoriser le déterminant des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$$

7. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elle le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. (*) Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai☐ Faux☐
   - Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = I$, alors M admet un inverse Vrai☐ Faux☐
   - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai☐ Faux☐
   - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Vrai☐ Faux☐
   - Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels Vrai☐ Faux☐
   - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
   - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai☐ Faux☐
   - La somme de deux valeurs propres d'une même matrice est encore une valeur propre de cette matrice Vrai☐ Faux☐
   - Si le complexe λ_0 est une valeur propre de la matrice M alors $\overline{\lambda_0}$ est une valeur propre de la matrice $\overline{M}$ Vrai☐ Faux☐
   - Si un complexe est une valeur propre d'une matrice, alors il est aussi valeur propre de la matrice transposée Vrai☐ Faux☐

Liste 2004/2005

1. (Tous) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 2i^4 & \dfrac{(1+i)^2}{i^3} \\ 0 & -1 & 1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3i+1 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$\widetilde{iA},\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB.$$

2. (Chimie-Géographie)
   Une matrice carrée est qualifiée de matrice hermitienne lorsqu'elle est égale à son adjointe.
   Une matrice carrée est qualifiée de matrice symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.

Une matrice carrée réelle est qualifiée de matrice orthogonale lorsque le produit de cette matrice et de sa transposée est la matrice identité.

2.1) Quel lien existe entre les matrices hermitiennes et les matrices symétriques ?

2.2) Déterminer la forme générale des matrices symétriques 3×3.

2.3) Existe-t-il des matrices symétriques qui ne sont pas hermitiennes ? Si votre réponse est non, justifier. Si votre réponse est oui, donner un exemple.

2.4) Existe-t-il des matrices hermitiennes qui ne sont pas symétriques ? Si votre réponse est non, justifier. Si votre réponse est oui, donner un exemple.

2.5) Existe-t-il des matrices réelles orthogonales qui ne sont pas symétriques ? Si votre réponse est non, justifier. Si votre réponse est oui, donner un exemple.

2.6) Existe-t-il des matrices réelles symétriques qui ne sont pas orthogonales ? Si votre réponse est non, justifier. Si votre réponse est oui, donner un exemple.

2.7) Existe-t-il des matrices réelles hermitiennes qui ne sont pas symétriques ? Si votre réponse est non, justifier. Si votre réponse est oui, donner un exemple.

2.8) Le produit de deux matrices orthogonales de même dimension est-il encore une matrice orthogonale ? Justifier.

2.9) Le produit de deux matrices réelles symétriques de même dimension est-il encore une matrice symétrique ? Justifier.

2.10) Une matrice réelle orthogonale (resp. hermitienne) est-elle toujours inversible ? Justifier.

3. (Chimie-Géographie) Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (resp. avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$).

4. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} i+1 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Le déterminant des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.
$$\begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

6. (Chimie-Géographie) Factoriser le déterminant de la matrice suivante en un produit de polynômes du premier degré en x, y, z.
$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Si a est un réel donné, déterminer l'inverse de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Démontrer que si A est une matrice carrée qui vérifie $A^2 - A + I = 0$ alors A est inversible et déterminer son inverse en fonction de A.

10. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i+1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. (Chimie-Géographie) Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
    - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = A$, alors A est la matrice nulle ou est la matrice identité
      Vrai☐ Faux☐
    - Si M est une matrice carrée qui vérifie $M\widetilde{M} = I$, alors M vérifie aussi $\widetilde{M}M = I$
      Vrai☐ Faux☐
    - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A(A+B) = A^2 + AB$ Vrai☐ Faux☐
    - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $A^2 - B^2 = (A-B)\,(A+B)$
      Vrai☐ Faux☐
    - Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle orthogonale sont toujours des nombres réels
      Vrai☐ Faux☐
    - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
    - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai☐ Faux☐
    - La somme de deux vecteurs propres de valeur propre nulle est encore un vecteur propre de valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
    - La trace du produit de deux matrices carrées de même dimension reste la même si on permute l'ordre des facteurs du produit.

2.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

• On a

$$iA = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 2i & -1+i \end{pmatrix}.$$

• La matrice A est une matrice de format 2×3 tandis que B est une matrice de format 3×2. Ces matrices n'ayant pas le même format, il est impossible de les additionner.

• Puisque B est une matrice de format 3×2, $\widetilde{B}$ est de format 2×3 et peut être additionné à A, matrice de même format. On a

$$A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i} & -1 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{i} & -2 \\ 0 & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Puisque A est une matrice de format 2×3, A^* est une matrice de format 3×2 ; le produit AA^* est donc possible et donne une matrice de format 2×2. On a

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \text{ donc } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix};$$

ainsi,

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

• Le produit AB est possible puisque A est de format 2×3 et B de format 3×2 ; le produit est une matrice de format 2×2. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le produit BA est possible puisque B est de format 3×2 et A de format 2×3 ; le produit est une matrice de format 3×3. On a

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de $\overline{B}$; le produit $B\overline{B}$ est donc impossible.

Exercice 2

• On a $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 1.5 - (-1).(-2) = 3$.

• On a $\det \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix} = i^2 + i^2 = -2$.

• On a

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 + L_3 \\ &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 && \text{en développant le déterminant selon la première ligne.} \end{aligned}$$

Exercice 3

• On a $\det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 4 = (1-x-2)(1-x+2) = (-x-1)(3-x)$.

• On a

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix} \\ = \; & xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } x \text{ sur } L_1,\ y \text{ sur } L_2 \text{ et } z \text{ sur } L_3 \\ = \; & xyz \begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \text{ et } L_2 \text{ par } L_2 - L_3 \\ = \; & xyz(x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } \begin{cases} x-z \text{ sur } L_1 \\ y-z \text{ sur } L_2 \end{cases} \\ = \; & xyz(x-z)(y-z) \begin{vmatrix} 1 & x+z \\ 1 & y+z \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\ = \; & xyz(x-z)(y-z)(y+z-x-z) \\ = \; & xyz(x-z)(y-z)(y-x). \end{aligned}$$

• On a

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} -a-x & a & 0\\ b & -2b-x & b\\ 0 & a & -a-x\end{pmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} -x & a & 0\\ -x & -2b-x & b\\ -x & a & -a-x\end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_1 \text{ par } C_1+C_2+C_3\\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+x\\ -x & -2b-x & b\\ -x & a & -a-x\end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1-L_3\\
&= (a+x)\begin{vmatrix} -x & -2b-x\\ -x & a\end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première ligne}\\
&= -x(a+x)\begin{vmatrix} 1 & -2b-x\\ 1 & a\end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } (-x) \text{ sur } C_1\\
&= -x(a+x)(a+2b+x).
\end{aligned}$$

Exercice 4

• Posons $A=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Puisque $\det A = 2-1 = 1 \neq 0$, la matrice A est inversible. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i,j=1,2)$ de A. On a $(\mathcal{A})_{1,1}=2,\ (\mathcal{A})_{1,2}=1,\ (\mathcal{A})_{2,1}=1,\ (\mathcal{A})_{2,2}=1$. On obtient ainsi

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

• Posons $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3-L_1\\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première colonne}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice inverse existe. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i,j=1,2,3)$ de A. On a

$(\mathcal{A})_{1,1}=\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2;\quad (\mathcal{A})_{1,2}=(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad (\mathcal{A})_{1,3}=\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;$

$(\mathcal{A})_{2,1}=(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\quad (\mathcal{A})_{2,2}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0;\quad (\mathcal{A})_{2,3}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;$

$(\mathcal{A})_{3,1}=\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1;\quad (\mathcal{A})_{3,2}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1;\quad (\mathcal{A})_{3,3}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$

Ainsi, on obtient

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 5

5.1) Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\ (2-\lambda)-2=2-3\lambda+\lambda^2-2=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 3 ; ces valeurs propres étant simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A-0I)X=0$. On a

$$(A-0I)X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow X=x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A-3I)X=0$. On a

$$(A-3I)X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases} -2x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}\Leftrightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow X=x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\qquad c\in\mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2) Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2.$$

La matrice A possède donc la valeur propre double 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A-I)X=0$. On a

$$(A-I)X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow X=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre sont donc les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{C}_0.$$

Comme ils sont tous multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, deux vecteurs propres sont toujours linéairement dépendants et donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

5.3) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -\lambda(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0I)X = 0$. On a

$$(A - 0I)X = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2I)X = 0$. On a

$$(A - 2I)X = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + iy = 0 \\ -ix - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

La matrice A admet donc la valeur propre triple 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - I)X = 0$. On a

$$(A - I)X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad \text{non simultanément nuls.}$$

Trois vecteurs propres sont donc toujours linéairement dépendants ; la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

5.5) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_3 \text{ par } C_3 + C_1 \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} && \text{en développant selon la troisième colonne} \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc -1, 1 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A+I)X = 0$. On a successivement

$$\begin{aligned}
(A+I)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 & (1) \\ x+y-z=0 & (2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 & (1)+(2) \\ 2y-2z=0 & (2)-(1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A-I)X = 0$. On a successivement

$$\begin{aligned}
(A-I)X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x-y+z=0 & (1) \\ 3x+y-3z=0 & (2) \\ x-y-z=0 & (3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4z=0 & (2)+(3) \\ y=0 & (1)+(3) \\ x-y-z=0 & (3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A-2I)X = 0$. On a successivement

$$(A-2I)X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad X = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

REMARQUES IMPORTANTES

Lors de l'inversion et de diagonalisation de matrices, on vérifie aisément que la solution trouvée est correcte.

— Quand on a déterminé la matrice inverse d'une matrice donnée, on vérifie que le résultat est correct en effectuant le produit de la matrice de départ par la matrice trouvée. On doit obtenir la matrice identité.

— Quand on a déterminé une forme diagonale Δ de la matrice de départ A et une matrice S qui y conduit, pour savoir si le résultat est correct, on doit vérifier que $S^{-1}AS = \Delta$, ce qui est équivalent à la vérification de l'égalité (bien plus simple !) $AS = S\Delta$.

2.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$iA = \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 1 & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}$; $C^* = \begin{pmatrix} 2+i & -4i \\ 3 & i \end{pmatrix}$; $A+B$ impossible car matrices de formats différents ;

$A + \tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ -i & 2 \\ -2 & 2+i \end{pmatrix}$; $AA^* = \begin{pmatrix} 8 & -2i & 2+2i \\ 2i & 1 & i \\ 2-2i & -i & 2 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} -4 & 4i & 2i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}$;

$BA = \begin{pmatrix} -1 & -1+2i \\ -1-5i & -1+i \end{pmatrix}$; $CB = \begin{pmatrix} 2+2i & 6 & 1+4i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$;

CA impossible car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Exercice 2

2.1 Exemple d'une matrice

hermitienne $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ normale $\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ mais la matrice hermitienne convient aussi comme matrice normale.

2.2 Les éléments a_{11} et a_{22} sont réels tandis que les éléments a_{12} et a_{21} sont des complexes conjugués.

2.3 Normale non hermitienne ; normale et hermitienne ; normale et hermitienne ; ni normale, ni hermitienne.

2.4 Oui, non, non, oui, non, oui, oui, non.

Exercice 3

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 4

$-7, -6, 0$.

Exercice 5

$x(x-3)$.

Exercice 6

$xyz(y-x)(z-x)(z-y)$ et $-x(x+a)(x+a+2b)$.

Exercice 7

$\begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Première matrice : valeurs propres simples 0 et 3 donc matrice diagonalisable.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 : $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Deuxième matrice : valeur propre double 1.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0$ donc matrice non diagonalisable.

Troisième matrice : valeurs propres simples 0 et 2 donc matrice diagonalisable.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 : $c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Quatrième matrice : valeur propre triple 1.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls ; la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Cinquième matrice : valeurs propres -2 (simple) et 7 (double).

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 7 : $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 : $c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Faux, vrai, vrai, faux, faux, faux, faux, faux, vrai, vrai.

2.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

$$\widetilde{iA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2i & -i \\ -2i & 1+i \end{pmatrix} \qquad (iB)^* = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & -2i \\ i & -1-i \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 & -3 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + \widetilde{B}$: impossible car A et $\widetilde{B}$ ne sont pas de même format.

$AA^* = \begin{pmatrix} 12 & -4-2i \\ -4+2i & 3 \end{pmatrix}$

AB : impossible car le nombre de colonnes de A (3) diffère du nombre de lignes de B (2).
BA : impossible car le nombre de colonnes de B (3) diffère du nombre de lignes de A (2).

$CB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2+6i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$

Exercice 2

2.1) Toute matrice hermitienne réelle est symétrique et toute matrice symétrique réelle est hermitienne.
2.2) Dans le cas d'une matrice symétrique 3×3, les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.
2.3) Oui, par exemple $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2.4) Oui, par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$.
2.5) Oui, par exemple $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.
2.6) Oui, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2.7) Non.
2.8) Oui.
2.9) Non sauf si les matrices commutent.

2.10) Oui - Non, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Toute matrice commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Toute matrice diagonale commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Toute matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Le premier déterminant est égal à $5 + 7i$ et le second à $\frac{7}{9}$.

Exercice 5

Le premier déterminant se factorise sous la forme $(3 - x)(x + 2)$ et le second sous la forme

$$-(x - \frac{1 + i\sqrt{7}}{2})(x - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}).$$

Exercice 6

Le déterminant se factorise sous la forme $(x - y)(x - z)(z - y)(x + y + z)$.

Exercice 7

Les matrices inverses sont

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

L'inverse de la matrice donnée est $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

—

Exercice 10

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeurs propres : 0 et 4.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 0$: $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 4$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas deux vecteurs linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$: $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice A est déjà diagonale.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : $-i$ et $2+i$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -i : c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2+i : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: valeur propre : 1 (triple).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 1 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas trois vecteurs propres linéairement indépendants.

— Matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : -1 (simple) et 2 (double).

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -1 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}_0$.

Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Faux, vrai, faux, faux, faux, faux, faux, faux, vrai.

Chapitre 3

Fonctions de plusieurs variables

3.1 Exercices de base sur le chapitre 2 (partim B)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Quel est le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données ci-dessous ? Représenter graphiquement ces domaines.

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, \quad f_2(x,y) = \ln(x-y), \quad f_3(x,y) = \ln(|x|-|y|)$$

$$f_4(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_5(x,y) = \operatorname{arcos}(x^2+y^2), \quad f_6(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Calculer

$$D_x^2 f_6(x,y) + D_y^2 f_6(x,y), \quad D_x D_y f_6(x,y).$$

2. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration.

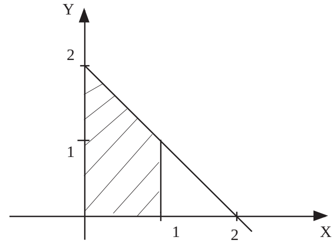
$$\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} f(x,y)\ dy\right)\ dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(\int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)\ dy\right)\ dx.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\ dx\right)\ dy$ et représenter l'ensemble d'intégration.

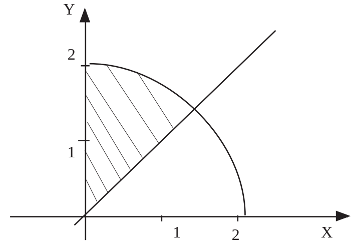
4. On considère la partie A du plan bornée par les droites d'équation $y = 2x, x = 0, y = 4$. Représenter A et calculer $\displaystyle\iint_A x\ dx\ dy$.

5. On considère la partie A du plan délimitée par l'axe X et le graphique de la fonction $\cos(x), x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Représenter A et calculer l'intégrale de $f(x,y) = 2y$ sur A.

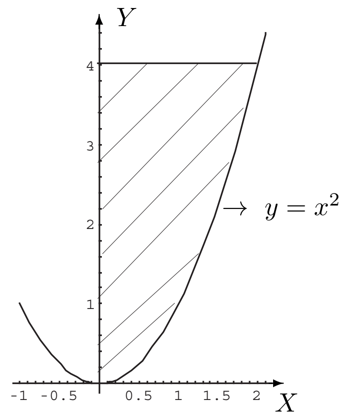
6. Calculer $\displaystyle\iint_A (x+y)\ dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.



7. Calculer $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.



8. Calculer $\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\, dxdy$ où A est la partie hachurée ci-dessous



9. Si elle existe, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\, dy \right) dx$ et représenter son ensemble d'intégration.
10. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sur $A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
11. Calculs de volumes.

Liste 2003-2004

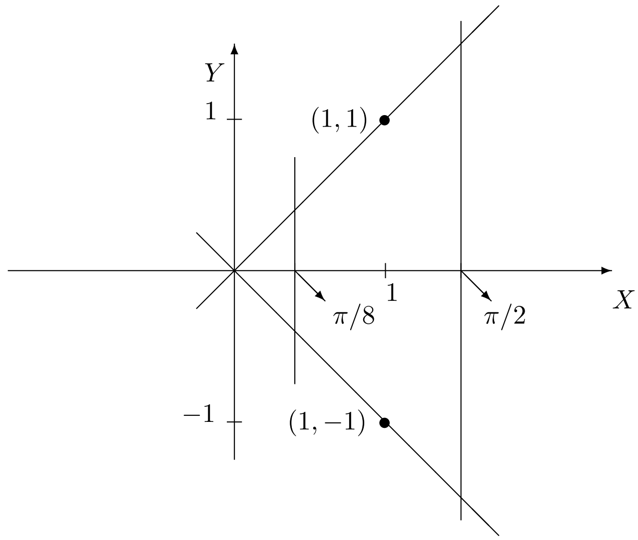
Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux chimistes et aux géographes.

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad g(x,y) = \ln(|x|+|y|-1).$$
2. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles.
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f(x,y) = \ln\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right).$$
3. Déterminer où la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ est indéfiniment continûment dérivable et calculer
$$D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y).$$
4. On donne les fonctions $(r,\theta) \mapsto f(r,\theta) = r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \mapsto g(r,\theta) = r\sin(\theta)$. Où ces fonctions sont-elles dérivables ? Dans cet ensemble, calculer
$$D_r f(r,\theta) D_\theta g(r,\theta) - D_\theta f(r,\theta) D_r g(r,\theta).$$

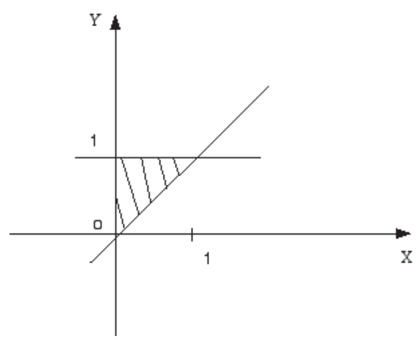
5. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les deux cas suivants

$$a)\ \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{(x+1)/2} f(x,y)dy\right)dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx\right)dy.$$

6. a) On donne l'ensemble A suivant (ensemble borné fermé), borné par les deux droites obliques et les deux droites parallèles à Y. Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A \sin(x+y)\ dxdy$ et simplifier la réponse au maximum.



b) On donne l'ensemble A suivant (ensemble hachuré, borné et fermé). Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A x\sqrt{y^2-x^2}\ dxdy$.



7. a) On donne l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,e], y \in [0, \ln(x)]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = y$. Représenter A. Calculer (et justifier l'intégrabilité) l'intégrale de f sur A en choisissant un ordre d'intégration. Effectuer à nouveau le calcul après avoir permuté l'ordre d'intégration.

b) On donne $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], x \in [y,1]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = e^{x^2}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

c) On donne $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2], y \geq 0\} = [1,2] \times [0,+\infty[$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = ye^{-xy}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

d) On donne l'ensemble $A = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1, \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{y}}\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = e^{yx^2}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

8. a) Représenter l'ensemble d'intégration et calculer (en justifiant)

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\right)dx.$$

b) (*) Représenter l'ensemble d'intégration, calculer (en justifiant) et donner une interprétation géométrique de l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \ dy \right) dx.$$

9. (*) Calcul d'aires et de volumes

Suggestion d'exercices supplémentaires

1. Calculer l'intégrale de la fonction $(x, y) \mapsto x^2y^2$ sur la boule centrée à l'origine et de rayon 1.
2. Calculer et représenter l'ensemble d'intégration :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \ dy \right) dx.$$

3. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

(Suggestion : transformer $1/x$ en une intégrale ; permuter alors les intégrales.)

4. L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1 - x^2} dx.$$

(Suggestion : transformer $\ln(x)$ en une intégrale : $2\ln(x) = \int_0^{+\infty} (\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y})dy$; permuter alors les intégrales.)

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx$ et de $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} dx$, puis la valeur de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$ et de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2}$.
(Suggestions : Garnir, Fonctions de variables réelles II, pp 257-259.)

5. Définir le produit de composition de deux fonctions : si f et g sont définies dans $\mathbb{R}$ et si l'intégrale a un sens, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy.$$

Propriété d'associativité et de commutativité.
On considère $f = \chi_{[0,1]}$.
— Calculer $(f * f)(x),\ x \in \mathbb{R}$, $(f * f * f)(x),\ x \in \mathbb{R}$ et représenter ces fonctions.
— Pour tout naturel $m \in \mathbb{N}_0$, on pose $B_m(x) = \underbrace{f * \ldots * f}_{m \text{facteurs}}$ (B-spline de degré $m - 1$). Démontrer que
- pour tout m, la restriction de B_m à un intervalle du type $[k, k + 1]$ ($k \in \{0, \ldots, m - 1\}$) est un polynôme de degré $m - 1$,
- pour tout m, la fonction B_m est nulle dans le complémentaire de $[0, m]$,
- pour tout $m \geq 2$, la fonction B_m appartient à $C_{m-2}(\mathbb{R})$,
- pour tout $m \geq 3$, on a $DB_m(x) = B_{m-1}(x) - B_{m-1}(x - 1),\ x \in \mathbb{R}$,
- pour tout $m \geq 2$, on a $B_m(x) = \frac{x}{m-1} B_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} B_{m-1}(x - 1),\ x \in \mathbb{R}$; en déduire que $B_m(x) > 0$ pour tout $x \in]0, m[$,
- pour tout m, on a $B_m(x + \frac{m}{2}) = B_m(\frac{m}{2} - x),\ x \in \mathbb{R}$; qu'est-ce que cela implique pour le graphique de B_m ?

(Beaucoup de choses peuvent se faire par récurrence.)

Liste 2004/2005

Remarques

— Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux chimistes et géographes.

— Plusieurs exercices peuvent être considérés comme faisant partie de la LISTE 2 (cours B) pour les 1B Chimie et 3B Géomatique-Géométrologie.

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2+9},\quad g(x,y)=\ln(|x+y|-1),\quad h(x,h)=\arcsin\left(\frac{1}{x+y}\right).$$

2. Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilté des fonctions f,g données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f, les dérivées partielles premières de h et $|x|D_xg(x,y)+|y|D_yg(x,y)$.

$$f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2}),\quad g(x,y)=\arcsin\left(\frac{x}{y}\right),\quad h(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y+1}).$$

3. On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]0,+\infty[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction $F\ :\ t\mapsto f(\ln(t),e-e^t)$ et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de f.

4. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a)\ \int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{-x/2}f(x,y)dy\right)dx,\qquad b)\ \int_{-1}^{0}\left(\int_{-3x-4}^{0}f(x,y)dy\right)dx\quad c)\ \int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)dx\right)dy.$$

5. (*) On considère l'ensemble borné fermé du plan (parallélogramme) délimité par les droites dont les équations équations cartésiennes sont les suivantes

$$d_1: x-y=0,\quad d_1: 2y+x=0,\quad d_3: 2y+x-2=0,\quad d_4: y-x=2.$$

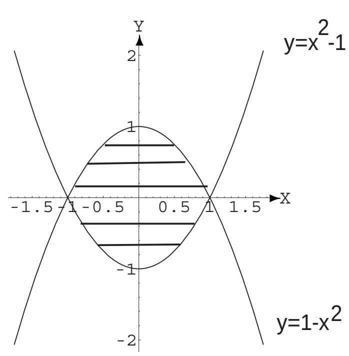
Représenter cet ensemble et déterminer l'intégrale de $f(x,y)=y$ sur celui-ci.

6. (*) On considère l'ensemble $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\leq y\leq\inf\{e^{-x},\ln(x+e)\}\right\}$. Déterminer, si elle existe, l'intégrale de $f(x,y)=x+y$ sur A.

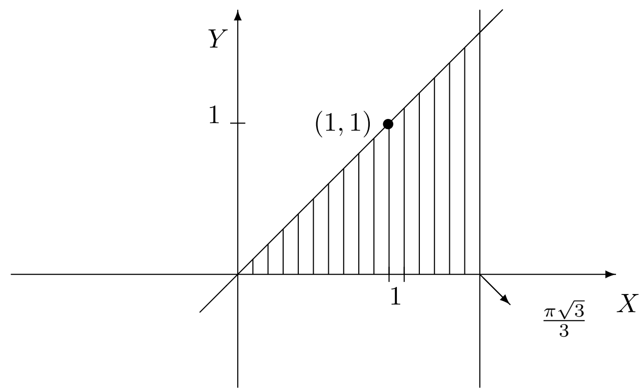
7. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=y^2\sin(xy)$ sur $A=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1]$.

   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=x+y$ sur $A=\{(x,y)\ :\ 0\leq y\leq\inf\{x,\sqrt{1-x^2}\}\}$.

8. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=xe^y$ sur l'ensemble borné fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y)=x^2\sin(xy)$ sur l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)



9. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.

$$a)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)dx,\ \ b)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x^2}\frac{e^{-x^2}}{x^2+y}\,dy\right)dx,$$

$$c)\int_0^{1}\left(\int_y^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dx\right)dy,\ \ d)\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx$$

10. Calculer l'intégrale de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ sur $A=\{(x,y):x\geq 0,y\leq 0,x^2+y^2\leq 4\}$.
11. Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement $1,2$, centrés à l'origine et l'axe X. Calculer l'intégrale de $f(x,y)=1+3x+8y^2$ sur A.
12. (*) Calcul d'aires et de volumes. Calculs d'intégrales faisant intervenir le changement de variables polaires dans le plan.
13. (*) Calculer l'intégrale de la fonction $(x,y)\mapsto x^2y^2$ sur la boule centrée à l'origine et de rayon 1.
14. (*)Calculer et représenter l'ensemble d'intégration :

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y^2dy\right)dx.$$

15. (*) L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx.$$

(Suggestion : transformer $1/x$ en une intégrale ; permuter alors les intégrales.)

16. (*) L'intégrale suivante a-t-elle un sens ? Si oui, la calculer.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{1-x^2}dx.$$

(Suggestion : transformer $\ln(x)$ en une intégrale : $2\ln(x)=\int_0^{+\infty}(\frac{x^2}{1+x^2y}-\frac{1}{1+y})dy$; permuter alors les intégrales.)

En déduire la valeur de $\int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x}dx$ et de $\int_0^1\frac{\ln(x)}{1+x}dx$, puis la valeur de $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}$ et de $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}$.
(Suggestions : Garnir, Fonctions de variables réelles II, pp 257-259.)

3.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

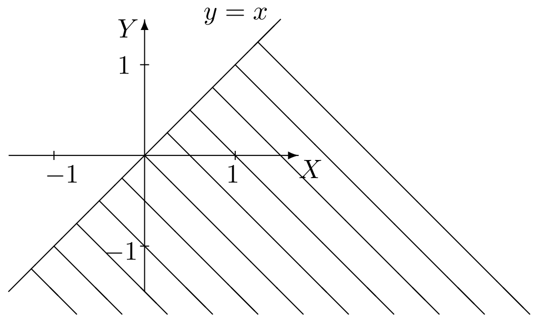
Exercice 1

• La fonction $(x,y)\mapsto f_1(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ est définie et dérivable sur

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1-(x^2+y^2)>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1\}$$

qui est l'ensemble des points intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1 (bord exclu).

• La fonction $(x,y) \mapsto f_2(x,y) = \ln(x-y)$ est définie et dérivable sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y > 0\}$ qui est l'ensemble hachuré ci-dessous (bord exclu).



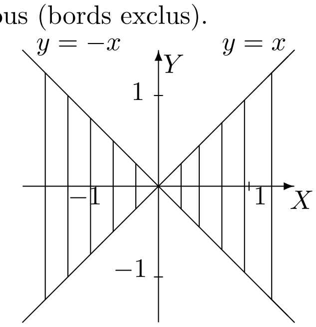
• La fonction $(x,y) \mapsto f_3(x,y) = \ln(|x|-|y|)$ est définie sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|-|y| > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}.$$

L'analyse de cette condition donne

$$|y| < |x| \Leftrightarrow -|x| < y < |x| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x < y < x \text{ si } x \geq 0 \\ x < y < -x \text{ si } x \leq 0 \end{array} \right. ;$$

A est donc l'ensemble hachuré ci-dessous (bords exclus).



Pour déterminer le domaine de dérivabilité, il faut tenir compte du fait que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en zéro et que la fonction $X \mapsto \ln(X)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi f_3 est dérivable sur

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|-|y| > 0,\ x \neq 0 \text{ et } \ y \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|-|y| > 0,\ y \neq 0\}.$$

• La fonction $(x,y) \mapsto f_4(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$; elle est dérivable sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

.

• La fonction $(x,y) \mapsto f_5(x,y) = \arccos(x^2+y^2)$ est définie sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ et dérivable sur $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2+y^2 < 1\}$. Comme $x^2+y^2 \geq 0\ \forall x,y \in \mathbb{R}$, on a

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \text{ et } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}.$$

L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon 1, le bord étant compris ; pour l'ensemble B, le bord est donc exclu.

• La fonction$(x,y) \mapsto f_6(x,y) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{y})$ est définie et dérivable sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, ensemble des points du plan dont on exclut ceux de l'axe des abscisses.
Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f_6 par rapport à x puis par rapport à y. On a

$$D_x f_6(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}.\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2} \ ; \qquad D_x^2 f_6(x,y) = \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

$$D_y f_6(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}.(\frac{-x}{y^2}) = \frac{-x}{y^2+x^2}\,; \qquad D_y^2 f_6(x,y) = \frac{2xy}{(y^2+x^2)^2}.$$

Dès lors,

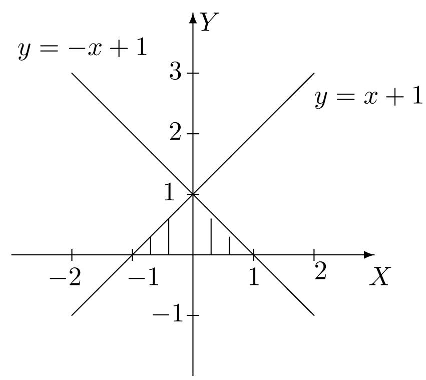
$$D_x^2 f_6(x,y) + D_y^2 f_6(x,y) = \frac{-2xy+2xy}{(y^2+x^2)^2} = 0.$$

Enfin,

$$D_x D_y f_6(x,y) = D_x\left[\frac{-x}{y^2+x^2}\right] = \frac{-y^2-x^2+2x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}.$$

Exercice 2

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], x \in [y-1, 1-y]\}$; il se représente de la façon suivante



Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

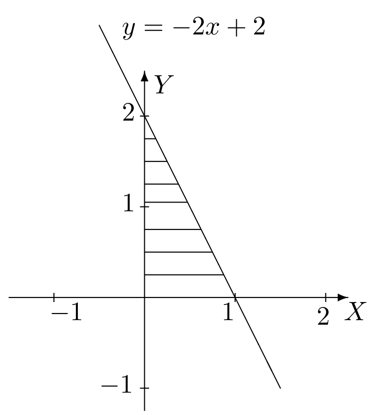
Comme on peut aussi décrire cet ensemble par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0], y \in [0, x+1]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0, -x+1]\},$$

si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx + \int_0^1 \left(\int_0^{-x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0, -2x+2]\}$; il se représente de la façon suivante



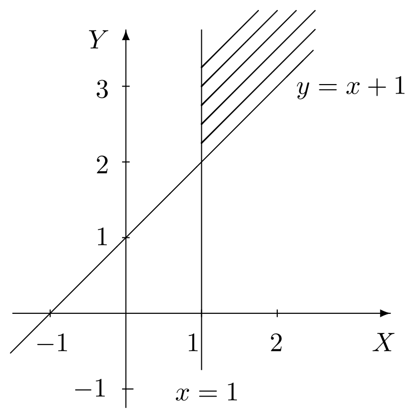
Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Comme on peut aussi décrire cet ensemble par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], x \in [0, 1-\frac{y}{2}]\}$, si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[, y \in [x+1, +\infty[\}$; il se représente de la façon suivante



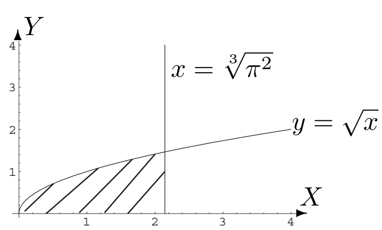
Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} \left(\int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Comme on peut aussi décrire cet ensemble par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [2, +\infty], x \in [1, y-1]\}$, si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_2^{+\infty} \left(\int_1^{y-1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Exercice 3
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \sqrt[3]{\pi}], x \in [y^2, \sqrt[3]{\pi^2}]\}$; il se représente de la façon suivante



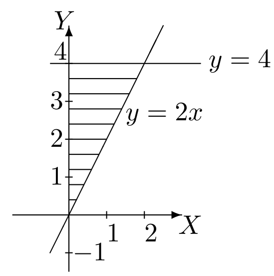
Comme la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(\sqrt{x^3})$ y est continue, elle y est intégrable et on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\,dx \right) dy.$$

Pour faciliter les calculs, permutons l'ordre d'intégration.
Puisque A peut aussi être décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt[3]{\pi^2}], y \in [0, \sqrt{x}]\}$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x^3})\,dy \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \frac{2}{3} D(\sqrt{x^3})\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos(\sqrt{x^3}) \right]_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \\
&= -\frac{2}{3}\cos(\pi) + \frac{2}{3}\cos(0) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

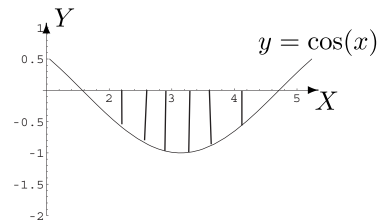
Exercice 4
Considérons la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [2x,4]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = x$ est continue sur A, donc intégrable sur A. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{2x}^4 x\,dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \Big[xy \Big]_{y=2x}^{y=4} dx \\
&= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 5
Soit la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], y \in [\cos(x), 0]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = 2y$ est continue sur A, donc intégrable sur A. On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_{\cos(x)}^{0} 2y\,dy \right) dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[y^2 \right]_{\cos(x)}^{0} dx \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1+\cos(2x))\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(3\pi)) + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(\pi)) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0, 2-x]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = x + y$ est continue, donc intégrable sur A. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_A (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-x} (x+y)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(2x - x^2 + 2 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + 2 \right) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{6} + 2x \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + 2 = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 7
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt{2}], y \in [x, \sqrt{4-x^2}]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est continue, donc intégrable sur A. Si on travaille en coordonnées polaires, cet ensemble, privé de l'origine, est décrit par $A' = \{(r,\theta) \in]0,2] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\}$; dans ces conditions, on a $f(x,y) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = \sqrt{r^2} = r$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta \right) dr \\
&= \int_0^2 r^2\,dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta \\
&= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 . \frac{\pi}{4} = \frac{8}{3}.\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

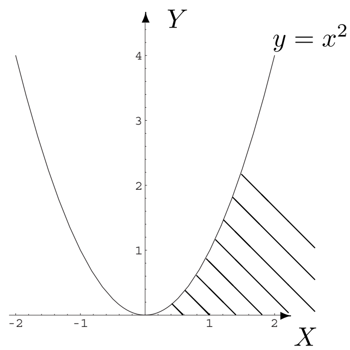
Exercice 8
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [x^2, 4]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}$ est continue, donc intégrable sur$A$. L'ensemble A peut aussi être

décrit sous la forme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 4], x \in [0, \sqrt{y}]\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dx\,dy &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dx \right) dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2\sqrt{1+y^2}} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx \\
&= \int_0^4 \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^4 D(1+y^2).\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{4} \left[2\sqrt{1+y^2} \right]_0^4 = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1).
\end{aligned}$$

Exercice 9

La fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{x^2+y}$ est continue sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \neq 0\}$ donc sur son ensemble d'intégration A, ensemble non borné dont la représentation graphique est la partie hachurée du plan ci-dessous.



Etudions l'intégabilité de f sur A sachant que $|f(x, y)| = f(x, y)\ \forall (x, y) \in A$.

Pour x fixé dans $]0, +\infty[$, la fonction $g : y \mapsto \dfrac{xe^{-x^2}}{x^2+y}$ est continue sur le fermé borné $[0, x^2]$. Elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\,dy = \left[xe^{-x^2} \ln(x^2+y) \right]_0^{x^2} = xe^{-x^2}(\ln(2x^2) - \ln(x^2)) = xe^{-x^2}\ln(2).$$

Etudions l'intégrabilité de la fonction $h : x \mapsto xe^{-x^2}\ln(2)$ continue sur $[0, +\infty[$. Comme h est continu sur $[0, t]\ \forall t > 0$, on a

$$\int_0^t xe^{-x^2}\ln(2)\ dx = -\frac{\ln(2)}{2} \int_0^t -2xe^{-x^2}\ dx = -\frac{\ln(2)}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^t = -\frac{\ln(2)}{2}(e^{-t^2} - 1).$$

Dès lors,

$$\lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{\ln(2)}{2}(e^{-t^2} - 1) \right) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} \lim_{t \to +\infty} e^{-t^2} = \frac{\ln(2)}{2}$$

puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t^2} = 0$ par application du théorème de la limite des fonctions composées.
Comme cette limite est finie, h est intégrable en $+\infty$ donc sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, f est intégrable sur A et comme la fonction f est positive sur A, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{x^2} \frac{xe^{-x^2}}{x^2+y}\ dy \right)\ dx = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 10
La fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ est une fonction à variables séparées et l'ensemble d'intégration A se présente aussi sous la forme d'un produit cartésien d'intervalles :

$$f(x,y) = g_1(x).g_2(y) \quad x \in [0,+\infty[,\ y \in [0,+\infty[, \quad g_1 = g_2 : t \mapsto e^{-t^2}.$$

Le calcul de l'intégrale de cette fonction sur A est traité dans les notes de cours et effectué au cours.

3.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

dom $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 > 0\}$, ensemble des points du plan intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 2 ("bord" exclu).
dom $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| - 1 > 0\}$, ensemble des points du plan extérieurs au carré ayant pour sommets les points de coordonnées $(1,0), (0,1), (-1,0)$ et $(0,-1)$ ("bords" exclus).

Exercice 2

Domaine de définition et de dérivabilité $= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ensemble de tous les points du plan excepté l'origine.
$D_x f(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad D_y f(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Domaine de définition et de dérivabilité $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 > 0\}$, ensemble des points du plan extérieurs à l'ellipse centrée à l'origine et dont les sommets sont les points de coordonnées $(1,0), (0,2), (-1,0)$ et $(0,-2)$ ("bord" exclu).
$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2+\frac{y^2}{4}-1}$ $\qquad D_y f(x,y) = \frac{y}{2\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)}$.

Exercice 3

Fonction indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = 0$.

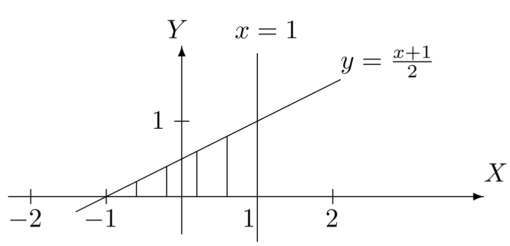
Exercice 4

Fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$; $D_r f(r,\theta) D_\theta g(r,\theta) - D_\theta f(r,\theta) D_r g(r,\theta) = r$.

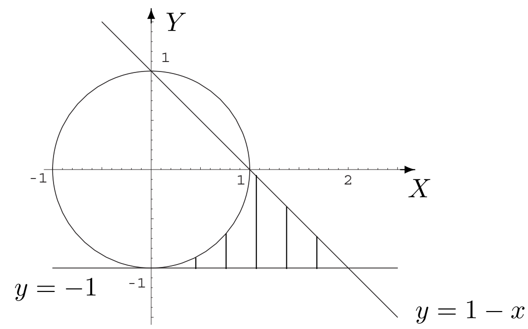
Exercice 5

Les ensembles d'intégration sont les parties hachurées du plan.

a) $\int_0^1 (\int_{2y-1}^1 f(x,y)dx)dy$



b) $\int_0^1 (\int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy)dx + \int_1^2 (\int_{-1}^{1-x} f(x,y)dy)dx$

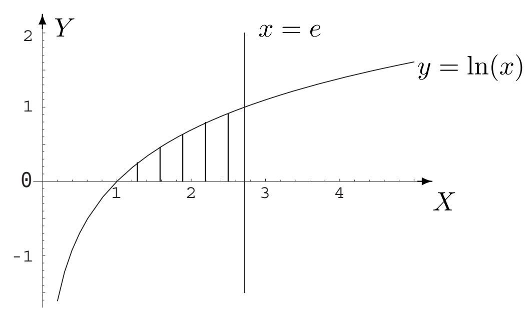


Exercice 6

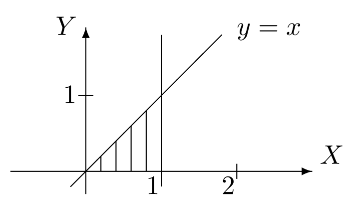
a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{3\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$.
b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{1}{12}$.

Exercice 7

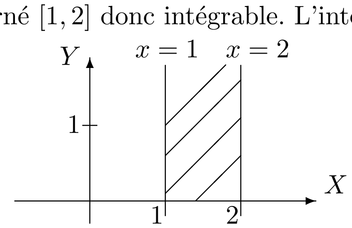
A est l'ensemble hachuré.
a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{e}{2} - 1$.



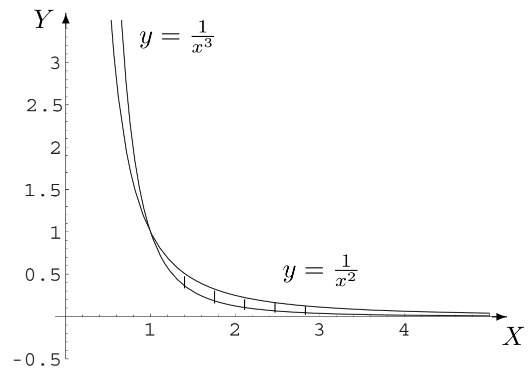
b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{1}{2}(e-1)$.



c) $\forall (x,y) \in A : |f(x,y)| = f(x,y)$. Pour x fixé dans $[1,2]$, la fonction $y \mapsto ye^{-xy}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle y est continue et $\lim\limits_{y\to+\infty} (y^2 \,.\, ye^{-xy}) = 0$. De plus, $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dy = \frac{1}{x^2}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur le fermé borné $[1,2]$ donc intégrable. L'intégrale donnée vaut $\frac{1}{2}$.



d) $\forall (x,y) \in A : |f(x,y)| = f(x,y)$. Pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la fonction $y \mapsto e^{yx^2}$ est continue sur le fermé borné $[\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^2}]$ donc intégrable et on a $\int_{\frac{1}{x^3}}^{\frac{1}{x^2}} e^{yx^2}dy = \frac{1}{x^2}(e - e^{\frac{1}{x}})$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}(e - e^{\frac{1}{x}})$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car elle y est continue et $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\frac{1}{x^2}\left(e-e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=e-1$. L'intégrale donnée vaut 1.



Exercice 8

a) L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points situés dans le quatrième quadrant, intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1. f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}(1-\frac{2}{e})$.

b) L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points du premier quadrant situés entre le cercle centré au point de coordonnées $(\frac{1}{2},0)$ de rayon $\frac{1}{2}$ et le cercle centré à l'origine de rayon 1. f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{\pi}{8}$; ce réel est la mesure de l'aire de la surface A.

Exercice 9

- - -

Suggestion d'exercices supplémentaires

Exercice 1

f est continu sur la boule, ensemble fermé borné donc f y est intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{\pi}{24}$.

Exercice 2

L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points du premier quadrant situés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon 1. Comme f est continu sur A, ensemble fermé borné, f y est intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{\pi}{16}$.

Exercice 3

La fonction est continue sur $]0,+\infty[$ et on vérifie qu'elle est intégrable en 0 et $+\infty$ en utilisant le critère en θ par exemple. L'intégrale vaut $\ln(2)$.

Exercice 4

La fonction est continue sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ et on vérifie qu'elle est intégrable en $0,\ 1$ et $+\infty$. L'intégrale vaut $-\dfrac{\pi^2}{4}$. De plus, si

$$X=\int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x}dx \text{ et } Y=\int_0^1\frac{\ln(x)}{1+x}dx, \text{ on a } \left\{\begin{array}{l} X+Y=2\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x^2}dx \\ X-Y=\frac{1}{2}X\end{array}\right. .$$

Comme $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{1-x^2}dx=-\frac{\pi^2}{8}$, on obtient $X=-\dfrac{\pi^2}{6}$ et $Y=-\dfrac{\pi^2}{12}$.

Enfin, $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 5

$$f * f : x \mapsto (f*f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$f * f * f : x \mapsto (f*f*f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}.$$

3.4 Solutions des exercices de la “liste type 2004/2005”

Exercice 1

— dom $(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 9 \geq 0\}$: ensemble des points situés entre les branches de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 + 9 = 0$ ayant pour sommets les points de coordonnées $(0,3)$ et $(0,-3)$, les points de la courbe étant compris.

— dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| - 1 > 0\}$: ensemble des points situés à l'extérieur des droites d'équation $x + y = 1$ et $x + y = -1$, les points des droites étant exclus.

— dom $(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \geq 1\}$: même ensemble de points que pour g mais les points des droites sont inclus.

Exercice 2

— Pour f, les deux domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ensemble des points du plan dont on exclut l'origine. On a

$$D_x f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad D_y f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$D_x^2 f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_y^2 f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_x D_y f(x,y) = D_y D_x f(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

— Pour g, dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$ tandis que le domaine d'infinie dérivabilité est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$. Le domaine de définition de g est l'ensemble des points situés entre les droites d'équation $x + y = 0$ et $x - y = 0$ et comprenant notamment les points de coordonnées $(0,1)$ et $(0,-1)$, les points des droites étant inclus mais non le point de coordonnées $(0,0)$; pour le domaine d'infinie dérivabilité, les points des droites sont exclus. On a

$$|x| D_x g(x,y) + |y| D_y g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy > 0 \\ \frac{-2x}{\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$$

— Pour h, les deux domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y + 1 > 0\}$: ensemble des points extérieurs à la parabole d'équation $y = -x^2 - 1$, les points de la courbe étant exclus. On a

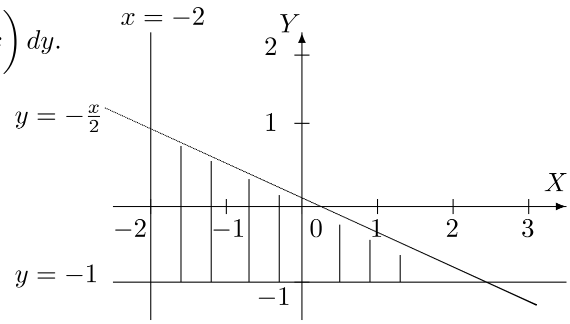
$$D_x h(x,y) = \frac{x}{x^2 + y + 1} \qquad D_y h(x,y) = \frac{1}{2(x^2+y+1)}.$$

Exercice 3

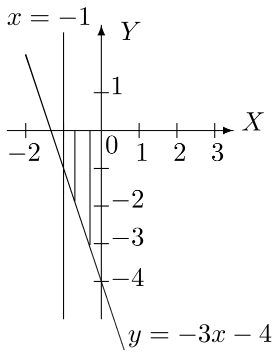
La fonction F est dérivable sur $]\frac{1}{e}, 1[$ et on a $DF(t) = (D_1 f)_{(f_1,f_2)} \cdot \frac{1}{t} - (D_2 f)_{(f_1,f_2)} \cdot e^t$.

Exercice 4

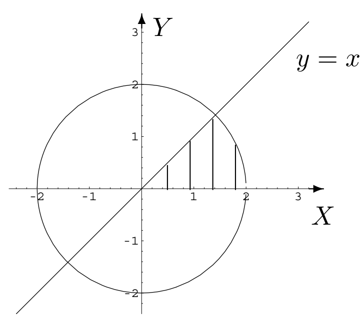
a) L'intégrale donnée est égale à $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{-2y} f(x,y)\, dx\right) dy.$



b) L'intégrale donnée est égale à $\int_{-4}^{-1}\left(\int_{-\frac{y+4}{3}}^{0} f(x,y)\, dx\right) dy + \int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\, dx\right) dy.$

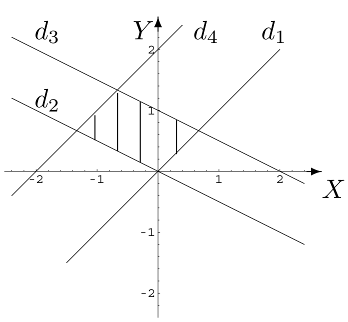


c) L'intégrale donnée est égale à $\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\, dy\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\right) dx.$



Exercice 5

Si A est l'ensemble hachuré alors $\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \frac{8}{9}$.



Exercice 6

L'intégrale vaut $\frac{3e^2}{4} - \frac{e}{2} - \frac{5}{4}$.

Exercice 7

a) L'intégrale vaut $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}$ b) L'intégrale vaut $\frac{1}{3}$.

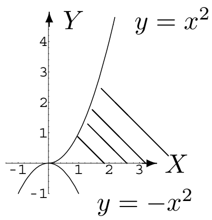
Exercice 8

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], y \in [-1+x^2, -x^2+1]$ et l'intégrale vaut 0.

b) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right], y \in [0,x]\right\}$ et l'intégrale vaut $\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi^2}{3}\right)$.

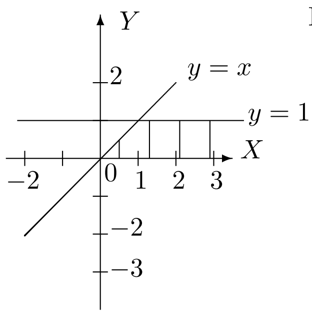
Exercice 9

a) L'intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln(2)$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble haché.

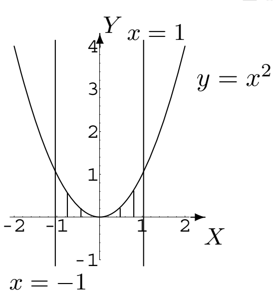


b) L'ensemble d'intégration est le même que ci-dessus et l'intégrale vaut $\frac{\ln(2)}{2}\sqrt{\pi}$.

c) L'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble haché.



d) L'intégrale vaut $2\ln(2) - 2$ et l'ensemble d'intégration est l'ensemble haché.



Exercice 10

L'intégrale vaut $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice 11

L'intégrale vaut $\frac{33\pi}{2}$.

Exercice 12

—

Exercice 13

L'intégrale vaut $\frac{\pi}{24}$.

Exercice 14

L'ensemble d'intégration est le premier quadrant du cercle trigonométrique et l'intégrale vaut $\frac{\pi}{16}$.

Exercice 15

L'intégrale vaut ln(2).

Exercice 16

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1-x^2}\, dx = -\frac{\pi^2}{4} \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Chapitre 4

Approximations polynomiales - Séries

4.1 Exercices de base sur le chapitre 3 (partim B)

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n au point x_0 pour chacune des fonctions données ci-dessous.

   $f(x) = x\sin(x), n = 3, x_0 = 0,\qquad f(x) = \sqrt{1+x}, n = 2, x_0 = 0,\qquad f(x) = \ln(x+1), n = 3, x_0 = 0$
   $f(x) = \ln(x), n = 2, x_0 = 2$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 et à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.
3. Etudier la convergence des séries suivantes

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(-\sqrt{2})^m,\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^m},\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^{3/2}},\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2+1},\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m+1}$$

4. a) Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :

$$i,\quad 1+i,\quad \frac{1}{i}.$$

   b) Déterminer les racines quatrièmes du complexe -1. Représenter ces racines.

Liste 2003/2004

Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux chimistes et aux géographes.

1. Déterminer l'approximation polynomiale de f à l'ordre n au point x_0 dans chacun des cas suivants.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = x^2\cos(x),\ x_0 = 0, n = 4 & f_2(x) = \mathrm{tg}(x),\ x_0 = \pi, n = 4 \\ f_3(x) = \mathrm{tg}(x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}, n = 3 & f_4(x) = \sqrt{2x+1},\ x_0 = 0, n = 2 \\ f_5(x) = \ln(1-x^2),\ x_0 = 0, n = 2 & f_6(x) = x\ \mathrm{arcos}(x),\ x_0 = 0, n = 2 \end{array}$$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. (*) Montrer que le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre n en 0 de la fonction cos converge vers 0 si $n \to +\infty$. En déduire le développement de cos en série de puissances de x.
4. Etudier la convergence des séries suivantes
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{m}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \pi^{-m}.$$
5. (*) Etudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.
$$\sum_{m=2}^{+\infty} 3^{-m}, \quad \sum_{m=2}^{+\infty} (-3)^{-m}, \quad \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m+1)}.$$
6. Déterminer les racines cubiques du complexe -2 et en donner la représentation géométrique.
7. (*) Déterminer les racines cubiques du complexe $1+i$ et du complexe $-i$. En donner une représentation géométrique.

Liste 2004/2005

Les exercices (*) sont plus spécialement destinés aux chimistes.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction donnée explicitement.
$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 & f_2(x) = xe^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ x_0 = 0, n = 0,1,2 & f_4(x) = \mathrm{arctg}(x),\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \\ f_5(x) = \ln(x),\ x_0 = 1, n = 0,1,2,3 & f_6(x) = (1+x)^3,\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3,4 \end{array}$$
Représenter f_3 et son approximation à l'ordre 2 en 0.
2. (*) Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 4 en 0 de la fonction sin. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. (*) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0,1,2,3$ en 0 des fonctions données explicitement par [1]
$$g_1(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), \quad g_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$
4. (*) Etudier la convergence des séries suivantes (signaler le critère des séries alternées)
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(m)}{m^2}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{m} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{2m+1}}, \quad \sum_{m=4}^{+\infty} \frac{1}{(\sin(2))^m}.$$
5. (*) Etudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes, lorsqu'elles sont convergentes.
$$\sum_{m=2}^{+\infty} (-3)\left(\frac{2}{3}\right)^m, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{-m}\frac{3^m}{2^{m+2}}, \quad \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{m^2-3m+2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$
6. Déterminer les racines cubiques du complexe i et en donner la représentation géométrique.
7. (*) Déterminer les racines quatrièmes du complexe -16. En donner une représentation géométrique.
Déterminer les racines carrées et les racines quatrièmes du complexe $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$. En donner la représentation géométrique.
8. (*) Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.

1. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$; décomposer en fractions simples

9. A proposer aux étudiants.
   — Une série convergente est une suite convergente. Vrai☐ Faux☐
   — Une série est toujours une suite. Vrai☐ Faux☐
   — Une suite est toujours une série. Vrai☐ Faux☐
   — L'approximation à l'ordre 3 d'une fonction en un point est toujours
   ☐ un polynôme de degré 3
   ☐ une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur
   ☐ un nombre réel plus petit ou égal à 3
   ☐ une fonction
   ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte.
10. (*) Illustrer par un exemple le fait que *si la série* $\sum_{m=1}^{+\infty} x_m$ *converge et si la série* $\sum_{m=1}^{+\infty} |x_m|$ *ne converge pas, alors on ne peut pas impunément grouper les termes de la première sans changer la limite.*
    Exemple amusant avec la série harmonique alternée :
    $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots \to \ln(2)$$
    et
    $$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)+\ldots\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\ldots\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)\\ &\to \frac{1}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

4.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

— La fonction $x \mapsto f(x) = x\sin(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(x) = \sin(x) + x\cos(x),\ D^2f(x) = 2\cos(x) - x\sin(x),\ D^3f(x) = -3\sin(x) - x\cos(x)$$

sur $\mathbb{R}$, donc

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0, \quad D^2f(0) = 2, \quad D^3f(0) = 0.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3f(0) = x^2.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a

$$Df(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad D^2f(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

sur $]-1,+\infty[$, donc

$$f(0) = 1, \quad Df(0) = \frac{1}{2}, \quad D^2f(0) = -\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x+1)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a

$$Df(x) = (x+1)^{-1},\ D^2f(x) = -(x+1)^{-2},\ D^3f(x) = 2(x+1)^{-3}$$

sur $]-1,+\infty[$, donc

$$f(0)=0,\quad Df(0)=1,\quad D^2f(0)=-1,\quad D^3f(0)=2.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x)=f(0)+x\ Df(0)+\frac{x^2}{2}\ D^2f(0)+\frac{x^3}{6}\ D^3f(0)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

— La fonction $x\mapsto f(x)=\ln(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$Df(x)=x^{-1},\quad D^2f(x)=-x^{-2}$$

sur $]0,+\infty[$, donc

$$f(2)=\ln(2),\quad Df(2)=\frac{1}{2},\quad D^2f(2)=-\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x-2)=f(2)+(x-2)\ Df(2)+\frac{(x-2)^2}{2}\ D^2f(2)=\ \ln(2)+\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}.$$

Exercice 2

La fonction $x\mapsto f(x)=\sin(x)$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, vu le développement limité de Taylor, on sait que le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 est $R_2(x)=\dfrac{x^3}{6}D^3f(u_0)$, $x\in\mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x. Puisque $Df(x)=\cos(x)$, $D^2f(x)=-\sin(x)$ et $D^3f(x)=-\cos(x)$, on a

$$R_2(x)=-\frac{x^3}{6}\cos(u_0)\qquad\text{et}\qquad |R_2(x)|\leq\frac{|x|^3}{6},\ x\in\mathbb{R}.$$

De même, le reste de l'approximation à l'ordre 3 est $R_3(x)=\dfrac{x^4}{24}\ D^4f(u_0)=\dfrac{x^4}{24}\ \sin(u_0)$, $x\in\mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x puisque $D^4f(x)=\sin(x)$. Mais comme l'approximation de la fonction sinus à l'ordre 4 est la même que l'approximation à l'ordre 3, en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$R_3(x)=R_4(x)=\frac{x^5}{120}D^5f(u_0)=\frac{x^5}{120}\cos(u_0)\qquad\text{et}\qquad |R_3(x)|\leq\frac{|x|^5}{120},\ x\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3

— La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}(-\sqrt{2})^m$ est une série géométrique de terme général $x^m=(-\sqrt{2})^m$. Comme $-\sqrt{2}\notin\,]-1,1[$, cette série ne converge pas.

— La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^m}=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^m$ est une série géométrique de terme général $x^m=\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^m$. Comme $\dfrac{1}{\pi}\in\,]-1,1[$, cette série converge (et même absolument).

— La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{m^\alpha}$ avec $\alpha=\frac{3}{2}>1$. La série est donc convergente (et même absolument).

— La série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2+1}$ est une série de terme général $x_m=\dfrac{1}{m^2+1}$. Comme $x_m=\dfrac{1}{m^2+1}<\dfrac{1}{m^2}$ et que $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha=2>1$), le critère de comparaison permet de conclure que la série donnée est convergente (et même absolument).

— Considérons la série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m+1} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} - 1$. Puisque la série harmonique $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m}$ est divergente, la série donnée l'est aussi.

Exercice 4

a) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

— La forme trigonométrique de i est $e^{i\frac{\pi}{2}}$ car $i = 0 + i\,.\,1$ et donc $r = \sqrt{0^2+1^2} = 1$. De plus, comme $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

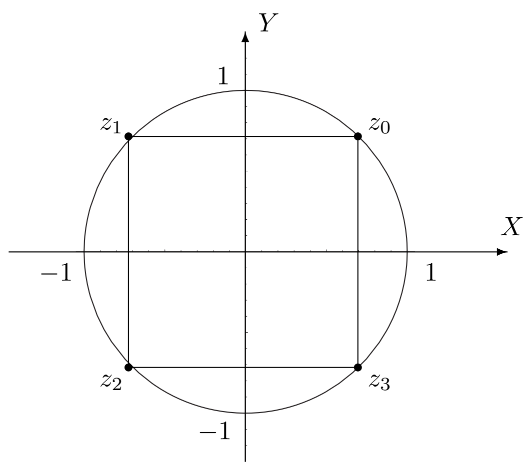
— Considérons $z = 1 + i$; on a $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et, dès lors, $z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ainsi, $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, ce qui donne $\theta = \frac{\pi}{4}$. Pour conclure, la forme trigonométrique de $1 + i$ est donc $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

— Le complexe $\frac{1}{i} = -i$ s'écrit sous forme trigonométrique $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ puisque $r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$, $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = -1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

b) La forme trigonométrique de -1 est $e^{i\pi}$. Ainsi, ses racines quatrièmes sont données par $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ avec $k = 0, 1, 2, 3$. Dès lors, on a

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}},\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Ces racines quatrièmes se représentent sur le cercle centré à l'origine de rayon 1 et sont les sommets d'un carré, points communs au cercle et aux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.



4.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$f_1 : P_4(x) = x^2 - \frac{x^4}{2},\ x \in \mathbb{R}$.

$f_2 : P_4(x - \pi) = x - \pi + \frac{(x-\pi)^3}{3},\ x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

$f_3 : P_3(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3,\ x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

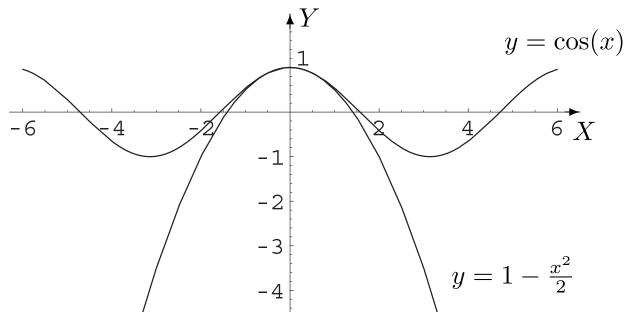
$f_4 : P_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2},\ x \in] - \frac{1}{2}, +\infty[$.

$f_5 : P_2(x) = -x^2,\ x \in] - 1, 1[$.

$f_6 : P_2(x) = \frac{\pi}{2}x - x^2,\ x \in] - 1, 1[$.

Exercice 2

$R_2(x) = \frac{x^3}{6}\sin(u)$ avec u strictement compris entre 0 et x ; on a donc $|R_2(x)| \leq \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}$.



Exercice 3

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Exercice 4

$\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{m}$ diverge et $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \pi^{-m}$ converge vers $\frac{1}{\pi-1}$.

Exercice 5

Les séries convergent respectivement vers $\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{2}$.

Exercice 6

$z_0 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_1 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\pi}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{5\pi}{3}}.$
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[3]{2}$. Un des sommets appartient à l'axe des X, son abscisse étant négative.

Exercice 7

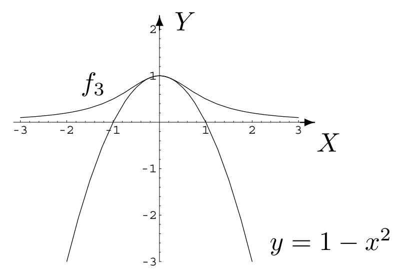
Pour $1+i$: $z_0 = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{\pi}{12}}, \qquad z_1 = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad z_2 = \sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{17\pi}{12}}.$
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[6]{2}$. Un des sommets appartient à la deuxième bissectrice et est situe dans le second quadrant.

Pour $-i$: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad z_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, \qquad z_2 = e^{i\frac{11\pi}{6}}.$
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Un des sommets appartient à l'axe des Y, son ordonnée étant positive.

4.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

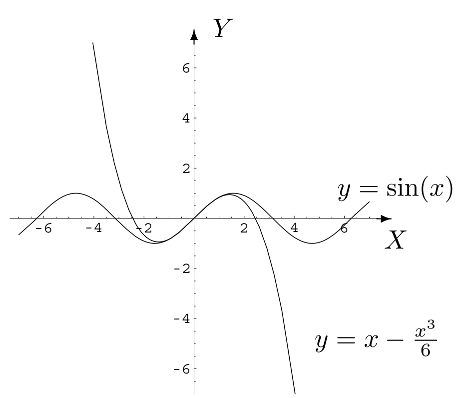
	$P_0(x-x_0)$	$P_1(x-x_0)$	$P_2(x-x_0)$	$P_3(x-x_0)$	$P_4(x-x_0)$
f_1	1	$1-2x$	$1-2x+2x^2$	$1-2x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3, x\in\mathbb{R}$	
f_2	0	x	$x-2x^2$	$x-2x^2+2x^3, x\in\mathbb{R}$	
f_3	1	1	$1-x^2, x\in\mathbb{R}$		
f_4	0	x	x	$x-\dfrac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$	
f_5	0	$x-1$	$x-1-\dfrac{(x-1)^2}{2}$	$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}, x\in]0,+\infty[$	
f_6	1	$1+3x$	$1+3x+3x^2$	$1+3x+3x^2+x^3$	$1+3x+3x^2+x^3, x\in\mathbb{R}$



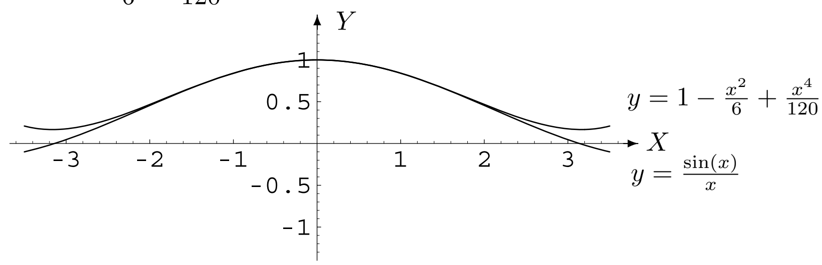
Exercice 2

$R_4(x)=\cos(u_0)\dfrac{x^5}{5!}$ avec u_0 strictement compris entre 0 et x.

Approximation : $P_4(x)=x-\dfrac{x^3}{6}, x\in\mathbb{R}$.



$R_4(x) = \dfrac{x^5}{5\,!}(u_0^5 \cos(u_0) - 5\ u_0^4 \sin(u_0) - 20\ u_0^3 \cos(u_0) + 60\ u_0^2 \sin(u_0) + 120\ u_0 \cos(u_0) - 120\ \sin(u_0))\ .\ u_0^{-6}$
avec u_0 strictement compris entre 0 et x.
Approximation : $P_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120}, x \in \mathbb{R}$.



Exercice 3

	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
g_1	0	$2x$	$2x$	$2x + \frac{2}{3}x^3, x \in\ ]-1, 1[$
g_2	2	$2 + 3x$	$2 + 3x + 5x^2$	$2 + 3x + 5x^2 + 9x^3, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$

Exercice 4

La première et la troisième série convergent, les deux autres divergent.

Exercice 5

La première série converge vers -4, la seconde diverge, la troisième converge vers 1 et la quatrième converge vers $e - 1$.

Exercice 6

Les racines cubiques de i sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Ce sont les sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique dont le sommet correspondant à z_2 est le point de coordonnées $(0, -1)$.

Exercice 7

Les racines quatrièmes de -16 sont $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 2, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Les racines carrées de $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ce sont les points diamétralement opposés du cercle trigonométrique dont l'un a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
Les racines quatrièmes de $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle trigonométrique, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 8

$\dfrac{l^2}{8R}$

Exercice 9

Vrai - vrai - faux - une fonction.

Exercice 10

—

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2019-2020

Mathématique (partim B)

CORRECTION DES LISTES D'EXERCICES DU 1^{ER} QUADRIMESTRE : GÉOGRAPHIE (B2) ET DU $2^{\text{ÈME}}$ QUADRIMESTRE : CHIMIE (B1) ET GÉOLOGIE (B2)

Version 6 septembre 2019

Chapitre 5

Listes d'exercices 2019 - 2020 : correction (partim B)

Liste 1 : calcul matriciel (1)

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix}$

3) $A.B = \begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} 11+i & \frac{9+19i}{2} \\ 3+3i & \frac{-20+17i}{2} \end{pmatrix}$

5) $B.A = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2}-i \\ 3-i & -\frac{3i}{2} \\ 8+3i & \frac{-1+6i}{2} \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1+i}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1$, $\forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$**. Montrer que** $A^2 - 2A + 3I = 0$**.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec**

$$\textbf{a)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\ (a, b \in \mathbb{C})$$

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$.

La forme générale des matrices qui commutent avec B est du type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ si $a \neq b$.
Si $a = b$ alors toute matrice de dimension 2 commute avec B car B est dans ce cas un multiple de la matrice identité.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix}\ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Le déterminant de A vaut $\frac{1}{9}(8-i)$, celui de B vaut 1, celui de C vaut 90, celui de D vaut $-\frac{7}{2}$ et celui de E est nul.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est égal à $(x+1)^2$; celui de B est égal à
$(x+2i)(x-2i)$, celui de C vaut $(x+1)^2(x-3)$ et celui de D vaut $-x^2(x+2)(x-1)^2$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• La matrice inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.

• La matrice inverse de C est égale à son inverse.

• La matrice inverse de D est $D^{-1} = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

• La matrice inverse de E est $E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i & -i \\ i & -1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $-1+i$ et $1+i$; ces valeurs propres sont simples (c'est-à-dire de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice B sont 2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
Les valeurs propres de la matrice C sont $-4,\ 1$ et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

• Matrice A : 2 valeurs propres simples : -2 et 5 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 5 sont du type $c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
Dès lors, en effectuant les produits, on a $AS = S\Delta = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Comme A est diagonalisable, on a $\Delta = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\Delta = AS$ en multipliant les deux membres à gauche par S.

• Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$. Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres

linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}CS = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

• Matrice D : 3 valeurs propres simple : -4, 1 et 3 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -4 sont du type $c\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$; les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont du type $c_2\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{C}_0$ et les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 sont du type $c_3\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $c_3 \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

II. Divers

1. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,

   (a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**

   (b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**

   (c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

   (a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix}N_1\\P_1\\S_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_0\\P_0\\S_0\end{pmatrix}$$

   et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige, 4 chances sur 10 qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

2. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**
   (b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

   (a) S'il vient de manger des carottes, le lapin a 30 % de chance de manger de la salade dans deux repas.
   (b) A longue échéance, le lapin a 40 % de chance de manger des carottes ou de la salade et 20% de chance de manger des pissenlits.

3. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
   — **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
   On a

$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

   — **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
   On a

$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

   ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

   — **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   est aussi une matrice qui représente une rotation.

   On a

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

   C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

4. **Considérons la fonction** $f : (x, y) \mapsto -x^2 - y^2 + xy + 2x - 4y + 3$**.**

a) Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} D_x f(x, y) = 0 \\ D_y f(x, y) = 0 \end{array} \right.$

b) Calculer les dérivées secondes de f**.**

c) Notons $H_f(x, y)$ **la matrice** $\left(\begin{array}{ll} D_x^2 f & D_x D_y f \\ D_y D_x f & D_y^2 f \end{array} \right)$**.**

Calculer det$H_f(x, y)$ **si** (x, y) **est la (les) solution(s) du système ci-dessus.**

a) Ce système a pour solution $(0, -2)$.
b) On a $D_x^2 f = -2,\ D_y^2 f = -2$ et $D_x D_y f = D_y D_x f = 1$.
c) Le déterminant de $H_f(0, -2)$ vaut 3.

d) **Mêmes questions avec la fonction** $g : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + \frac{1}{3} y^3 - 3y$**.**
- Le système a pour solution les couples $(-1, -1)$ et $(3, 3)$.
- On a $D_x^2 g = 2,\ D_y^2 g = 2y$ et $D_x D_y g = D_y D_x g = -2$.
- Le déterminant $H_g(-1, -1)$ vaut -8 et le déterminant $H_g(3, 3)$ vaut 8.

5. **Vrai ou faux (Justifier)**

(a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec** $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$**.**

Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right)$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la troisième ligne de AB est le vecteur nul alors que la troisième ligne de BA a pour premier élément g.

(b) **La matrice** $\left(\begin{array}{cc} a - b & a^2 - ab + b^2 \\ a^2 - b^2 & a^3 - b^3 \end{array} \right)$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**
Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0 si $a = b$ ou si $b = 0$.

(c) **Si une matrice carrée** A **de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de** A **est multiple de l'autre.**
Vrai (cf. théorie)

(d) **Si deux lignes d'une matrice carrée** A **de dimension 3 sont identiques, alors** $\det A = 0$**.**
Vrai (cf. théorie)

(e) **Si** A **est une matrice carrée de dimension 3, alors** $\det(5A) = 5 \det A$**.**
Faux : $\det(5A) = 5^3 \det A = 125 \det A$

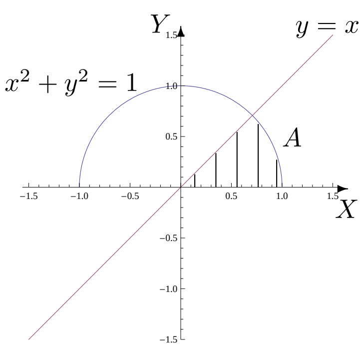
(f) **Si** B **est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée** A **de dimension 3 par 5, alors** $\det B = 5 \det A$**.**
Vrai (cf. théorie)

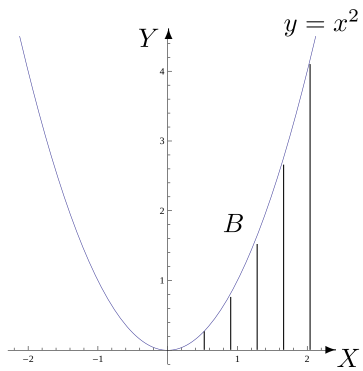
Liste 3 : compléments

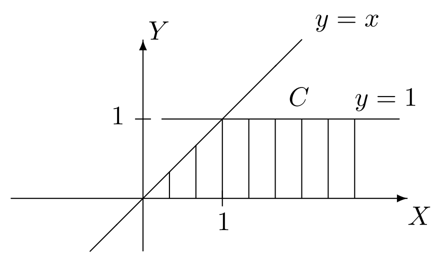
I. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1 - x^2}\}\}$
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$
c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y,\ y \in [0, 1]\}$

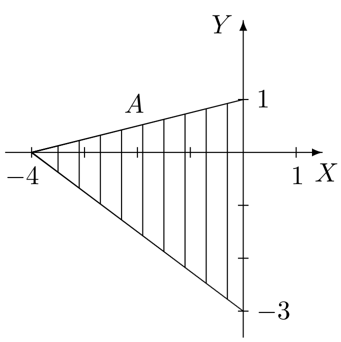


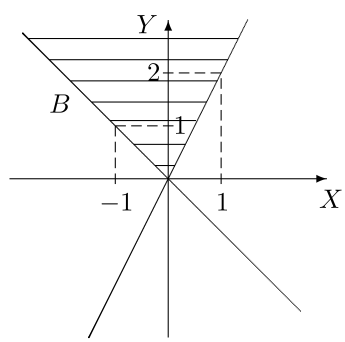


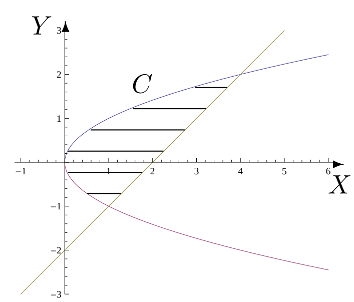


Les points des bords sont compris dans les ensembles.

2. **Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord**
a) l'ensemble de variation des abscisses
b) l'ensemble de variation des ordonnées.





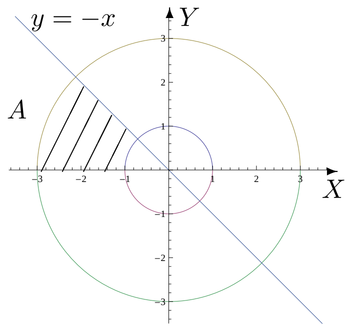


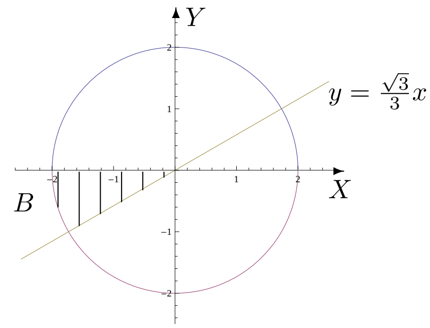
Les descriptions analytiques sont les suivantes
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 0],\ y \in [-\frac{3}{4}x - 3, \frac{x}{4} + 1]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3, 0],\ x \in [-\frac{4}{3}y - 4, 0]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1],\ x \in [4(y - 1),\ 0]\}$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, +\infty[,\ x \in [-y,\ \frac{y}{2}\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in\ ]-\infty, 0],\ y \in [-x, +\infty[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\ +\infty[,\ y \in [2x,\ +\infty[\}$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 2],\ x \in [y^2, y + 2]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 4],\ y \in [x - 2, \sqrt{x}]\}.$

3. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.**





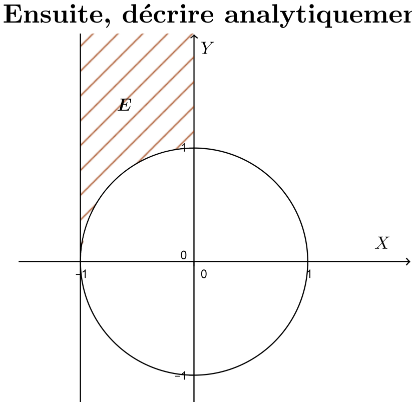
Les ensembles A et B exprimés en coordonnées polaires sont respectivement

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in [1,3],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{(r,\theta) : r \in]0,2[,\ \theta \in \left]\pi, \frac{7\pi}{6}\right[\right\}.$$

4. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{(r,\theta) : \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ r \in \left]1, \frac{-1}{\cos(\theta)}\right[\right\}.$$

II. Dérivation

1. **En appliquant la définition, montrer que la fonction est dérivable en x_0 et donner la valeur de sa dérivée en ce point si**
   a) $f : x \mapsto |x^2 - 4|$ et $x_0 = 1$
   b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ et $x_0 = 2$
   Ces deux fonctions sont dérivables en x_0 ; la dérivée de f en 1 vaut -2 et celle de g en 2 vaut $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. **a) On donne la fonction f dérivable sur $]-1,1[$. Quel est le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x) = f(\ln(2x))$ ainsi que l'expression de sa dérivée en fonction de celle de f ?**
   Le domaine de dérivabilité de F est $\left]\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right[$ et sa dérivée vaut $DF(x) = \frac{1}{x}(Df)(\ln(2x))$.
   b) Même question pour g dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ avec $G(x) = g(\arcsin(2x+1))$.
   Le domaine de dérivabilité de G est $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ et sa dérivée vaut

$$DG(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}(Dg)(\arcsin(2x+1)).$$

III. Cacul intégral

1. a) **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $f_1 : x \mapsto x^2 \sin(ax)$ est-elle intégrable sur $[0,1]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**

   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,1]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut
   $$\left(\frac{2}{a^3} - \frac{1}{a}\right)\cos(a) + \frac{2}{a^2}\sin(a) - \frac{2}{a^3}.$$

   b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{-a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   La fonction est continue sur le fermé borné $[0, a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\ln(2)\ .\ e^{-a^2}$.

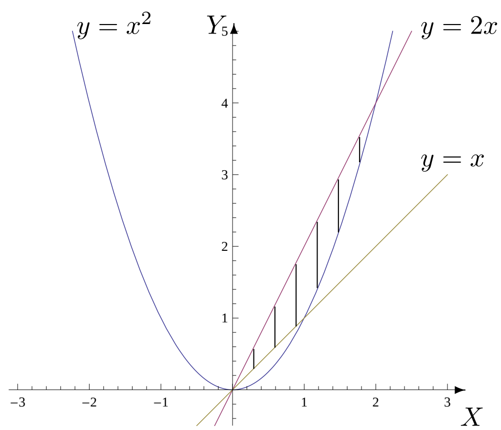
   c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2+a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   La fonction est continue sur $[a, +\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$donc sur $[a, +\infty[$. Son intégrale vaut $\dfrac{\pi\sqrt{a}}{4a}$.

2. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes**
   $$a)\int_0^1 \ln(x)\ dx \qquad\qquad b)\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\ dx$$

   Ces deux fonctions sont intégrables. La première intégrale vaut -1 et la deuxième $\frac{1}{4}\ln(3)$.

3. **On considère l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**
   L'aire de la région hachurée vaut $\dfrac{7}{6}$.



IV. Divers

1. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**
   $$K_C = 50 = \frac{1,56^2}{(A-0,78).0,22}$$

Que vaut A sachant que A représente la quantité de matière introduite dans le milieu réactionnel ?

La quantité de matière A introduite dans le milieu réactionnel vaut 1,001 mol.

2. **Dans une réaction chimique, la constante d'équilibre à une température donnée vaut**

$$K_C = 4 = \frac{x}{(0,5-x)(0,25-x)}$$

Que vaut x sachant que $x \in]0; 0,25[$ représente le nombre de moles par litre de produit formé ?

Le nombre de moles par litre de produit formé vaut $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ donc approximativement 0,146 mol/L.

3. **En creusant pour les fondations d'une maison, on pénètre dans une masse de débris de roche emballés dans une matrice argileuse. Dans la masse, on trouve les restes d'un arbuste qu'on échantillonne pour le dater au carbone-14. On obtient un carbone-14 résiduel correspondant à 17 % de la quantité initiale.**
Sachant que la constante de désintégration radioactive λ du carbone-14 vaut $1,21\ 10^{-4}$ (en année^{-1}) et que $N(t) = N_0\ e^{-\lambda t}$ où $N(t)$ est le nombre d'atomes restants au temps t (en années) et N_0 le nombre d'atomes au départ, déterminer
a) la demi-vie (temps nécessaire pour que le nombre d'atomes radioactifs soit diminué de moitié) du carbone-14
b) l'âge de cet arbuste.

a) La demi-vie du carbone-14 est de 5 728 années.
b) L'arbuste a 14 644 ans.

4. **Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle**

$$\nu(\theta) = -\frac{n^2}{2}\sin^2(\theta) - \cos(\theta),\ \ \theta \in [-\pi, \pi]$$

où n est un paramètre réel strictement positif. Les positions d'équilibre du système correspondent aux extrema de ν (équilibre stable pour un minimum, instable pour un maximum).
Déterminer les positions (éventuelles) d'équilibre du système.

Les extrema éventuels sont compris dans l'ensemble des zéros de la dérivée première de ν.
Si $n \in]0, 1]$ les zéros sont $-\pi,\ 0$ et π.
Si $n > 1$, les zéros sont $-\pi,\ 0,\ \pi$ et $\pm\arccos(\frac{1}{n^2})$.

Pour avoir un extremum, la dérivée doit changer de signe de part et d'autre du zéro. Dès lors,
- si $n \in]0, 1]$, on a un maximum en $-\pi$ et π et un minimum en 0
- si $n > 1$, on a un maximum en $-\pi$, 0 et π et un minimum en $\pm\arccos(\frac{1}{n^2})$.

5. (Pour les physiciens) [1] **Par une intégration par parties**
a) donner une formule de récurrence pour $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(x))^n\, dx\ \ (n \in \mathbb{N})$
b) En déduire la valeur de I_n.

On a $I_n = -n\, I_{n-1},\ n \geq 1$ et $I_n = (-1)^n\, n!$

1. Et ceux qui veulent relever le défi

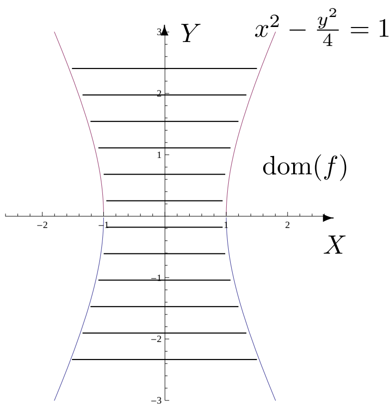
Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (1)

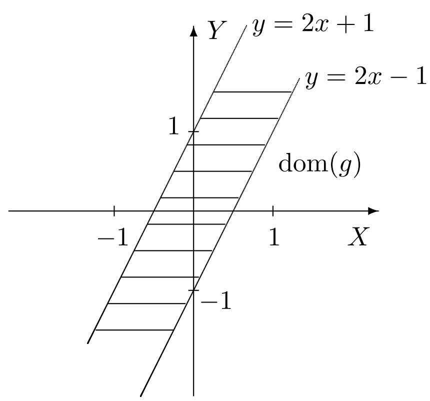
I. Définitions et représentations graphiques

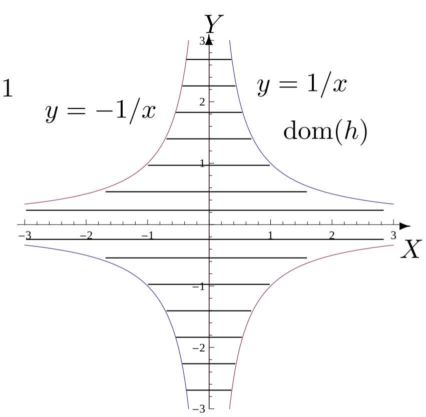
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

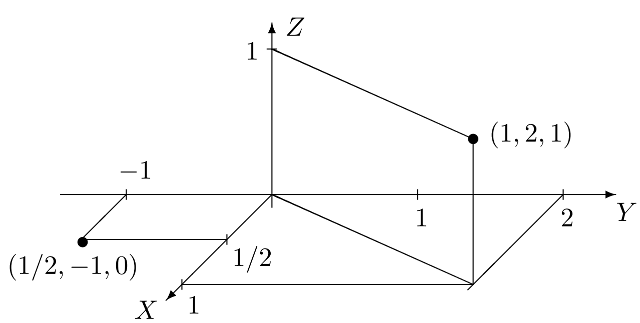
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x-y|}, \quad h(x,y) = \operatorname{arcos}(xy).$$

S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1/2,-1)$ **par** f**, de** $(1,2)$ **par** g **et de** $(2,1)$ **par** h**. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter ces points et leur image éventuelle.**
Les domaines de définition sont les suivants :
• $\operatorname{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{4} - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1/2,-1)$ appartient à $\operatorname{dom}(f)$, on a $f(1/2,-1) = 0$.
• $\operatorname{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 2x - y \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(1,2)$ appartient à $\operatorname{dom}(g)$, on a $g(1,2) = 1$.
• $\operatorname{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(2,1)$ n'appartient pas à $\operatorname{dom}(h)$, h n'est pas défini en ce point.

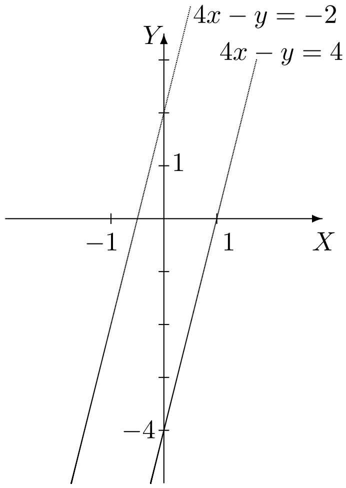


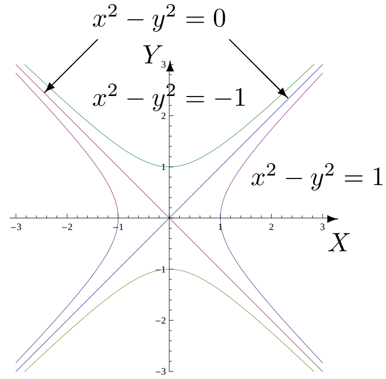


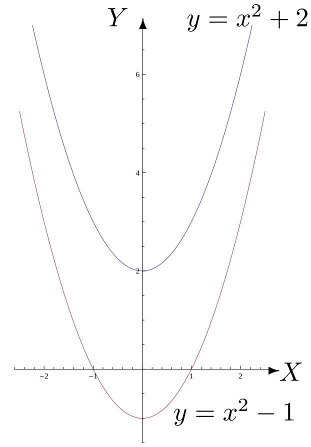




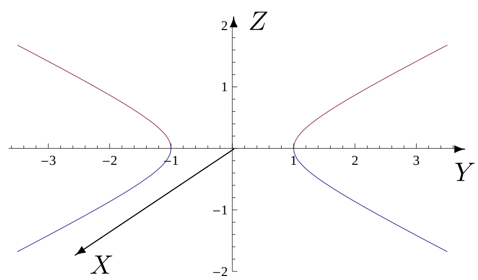
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation** $f(x,y) = c$ **si**
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$





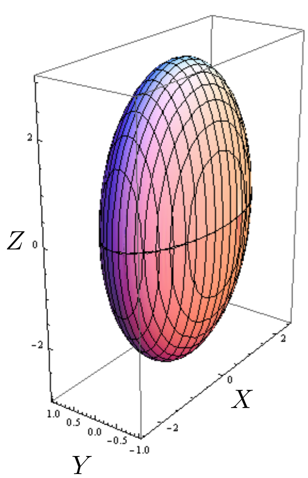


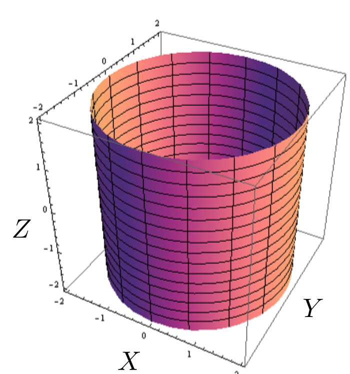
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2-4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
   La trace dans le plan d'équation $z = 0$ est le cercle centré à l'origine du repère et de rayon 1 ; celle dans le plan d'équation $x = 0$ est une hyperbole d'équation cartésienne $y^2 - 4z^2 = 1$ (cf. graphique). Cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b) x^2 + y^2 = 4.$$





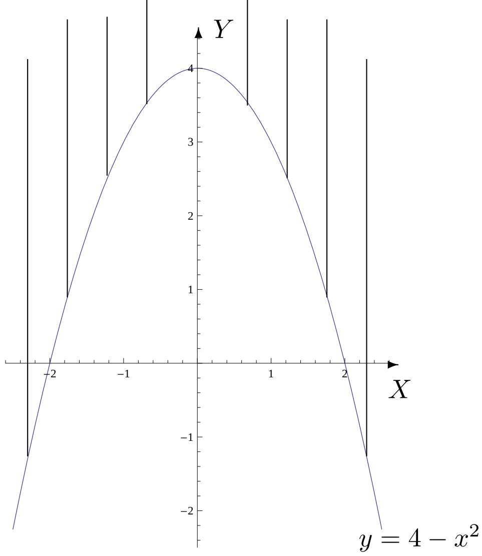
II. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
   La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut -4.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \textbf{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 4 > 0\}$.
La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y - 4}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y - 4}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x,y) = -2xy^2 \sin(x^2y^2 + 4y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x,y) = -(2x^2y + 4)\sin(x^2y^2 + 4y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des abscisses. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x,y) = \left(2x - \frac{x^2}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x,y) = \frac{x^3}{y^2}\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.**
   a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
   b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

   Les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a $D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = \dfrac{3(x^2 - 4y^2)}{(x^2 + 4y^2)^2}$.

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.**
   b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.
   a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

$$(2x_1x_2 \sin(3x_3),\ x_1^2 \sin(3x_3),\ 3x_1^2 x_2 \cos(3x_3)).$$

b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes

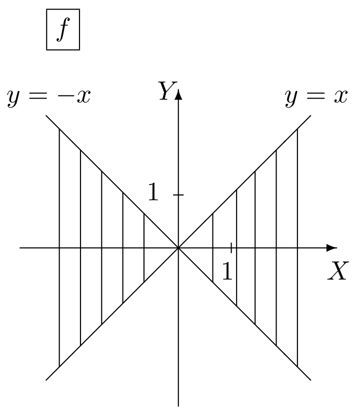
$$\left((2x + x^2y^2\sqrt{z})e^{xy^2\sqrt{z}},\ 2x^3y\sqrt{z}\,e^{xy^2\sqrt{z}},\ \frac{x^3y^2}{2\sqrt{z}}\,e^{xy^2\sqrt{z}}\right).$$

5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**

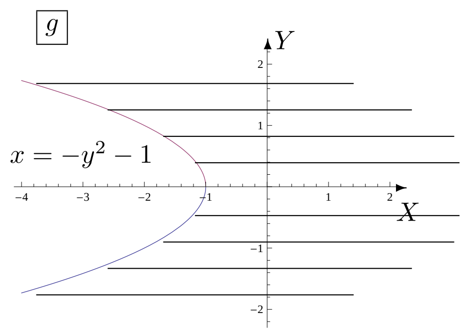
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x+y^2+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_xf(x,y) + |y|D_yf(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

a) Pour f, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1,\ x \neq 0\}$ et
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{y}{x} < 1,\ x \neq 0\}$.
Pour g, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 + 1 \geq 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 + 1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a

$$|x|D_xf(x,y) + |y|D_yf(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \geq 0 \\ \dfrac{-2y}{\sqrt{x^2-y^2}} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $]-1, 1[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est

$$DF(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{2})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $DG(t) = 0$.

6. **On donne la fonction $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y)=f(x,y)(D_x^2 f(x,y)+D_y^2 f(x,y)),\ (x,y)\in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

On a $A=\mathbb{R}^2$ et $B=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et F est la fonction constante 1.

7. **On considère la fonction $f_r(x,y)=x^r e^{-\frac{y}{x}},\ r$ étant un réel.**
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Déterminer le réel r tel que $D_x f_r(x,y)=yD_y^2 f_r(x,y)+D_y f_r(x,y),\ (x,y)\in B$.

On a $A=B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$ et le réel r vérifiant l'égalité donnée vaut -1.

8. **On donne la fonction $f(x,y)=\sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f-\dfrac{a^2}{b^2}D_y^2 f=0$.**

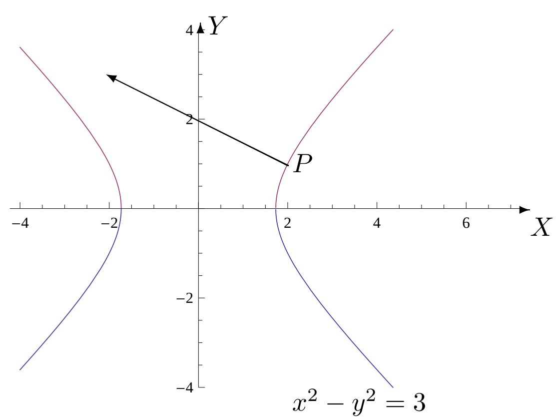
La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie bien l'équation des ondes.

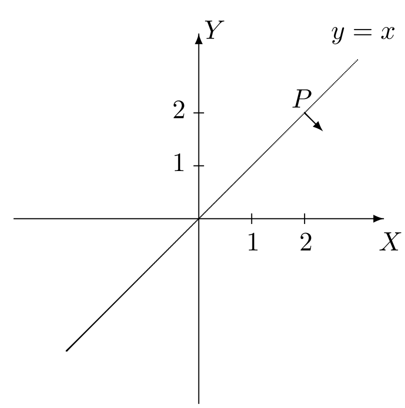
9. **L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :**
a) $T(x,y)=x^2-y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
b) $T(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$
Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

En toute généralité, le gradient de T est un vecteur qui pointe dans la direction et le sens dans lesquels T croît le plus vite. Puisque la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite, on considère l'opposé du vecteur gradient de T c'est-à-dire le vecteur de composantes

$$\text{a) } (-2x,2y) \qquad\qquad \text{b) } \left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

Au point P, on a respectivement les vecteurs de composantes $(-4,2)$ et $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$.

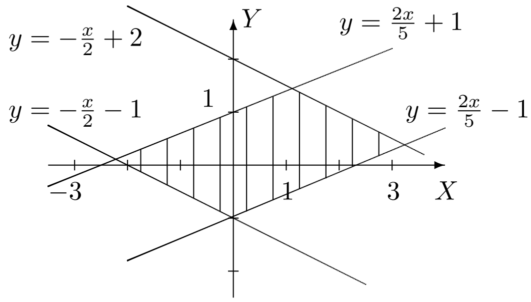




Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x+2y < 4,\ -5 < 2x-5y < 5\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.

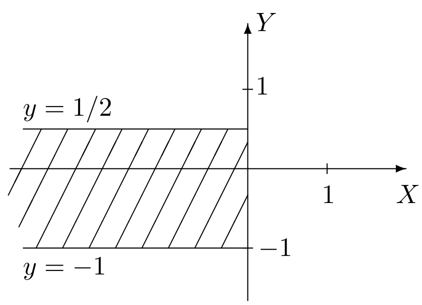
Les dérivées partielles sont

$$(D_xF)(x,y) = (D_uf)(x+2y, 2x-5y).1 + (D_vf)(x+2y, 2x-5y).2$$

$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x+2y, 2x-5y).2 + (D_vf)(x+2y, 2x-5y).(-5)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln\left(\frac{\pi}{3}\right), +\infty[$ et $G(x,y) =$ $g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \in]-1, 1/2[\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y) = (D_ug)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\exp(x)$$

$$(D_yG)(x,y) = (D_vg)(\exp(x), \ln(\arccos(y))).\left(\frac{-1}{\arccos(y)\sqrt{1-y^2}}\right)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.**
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? $1/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[\times]\sqrt{2}, +\infty[\times]0,3[$.

a) Le domaine de dérivabilité de f est $A =]-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}[$.
b) La dérivée de f est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} + (D_v g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\frac{-1}{2\sqrt{(t+1)^3}}$$

$$+(D_w g)\left(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).2t$$

où u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.
c) La dérivée de f en 0 est donnée par $(Df)(0) = (D_u g)(0,1,1).2 + (D_v g)(0,1,1).(\frac{-1}{2})$; elle n'est pas dérivable en $1/3$.
d) Le domaine de dérivabilité de f est vide : f n'est jamais dérivable.

3. **Soit** $F(t) = f(x(t), y(t))$ **avec** $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_x f)(2,7) = 6$ **et** $(D_y f)(2,7) = -8$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** 3**, que vaut** $(DF)(3)$ **?**

   On a $(DF)(3) = (D_x f)(2,7).(D_t x)(3) + (D_y f)(2,7).(D_t y)(3) = 62$.

4. **Soit** $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** $(1,0)$ **si**

$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$

$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

   et $(D_u f)(2,3) = -1$ **et** $(D_v f)(2,3) = 10$**, calculer** $(D_s F)(1,0)$ **et** $(D_t F)(1,0)$**.**

   On a $(D_s F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_s u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_s v)(1,0) = 52$ et
   $(D_t F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_t u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_t v)(1,0) = 34$

5. **On donne la fonction** $(x,y) \mapsto f(x,y)$ **définie et 2 fois continûment dérivable sur** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$**. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires** $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ $(r > 0$ **et** $\theta \in [0, 2\pi[)$ **et on considère** $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$**.**
   Montrer que $\qquad (D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \frac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$

   Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

II. Permutation de l'ordre d'intégration

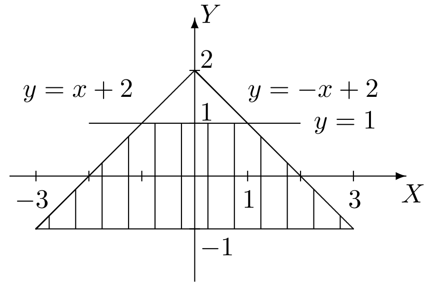
1. **Supposons que la fonction** f **est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx\right)\ dy \qquad\qquad b) \int_0^3 \left(\int_y^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx\right)\ dy.$$

   a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-3}^{-1} \left(\int_{-1}^{x+2} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy\right) dx + \int_1^3 \left(\int_{-1}^{-x+2} f(x,y)\ dy\right) dx$$

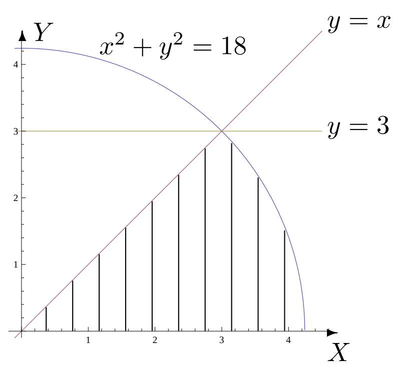
et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

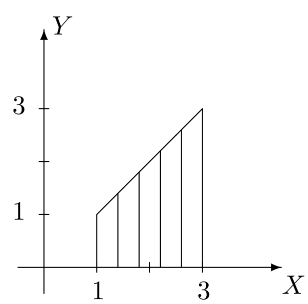
$$\int_0^3 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy\right) dx + \int_3^{3\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{18-x^2}} f(x,y)\ dy\right) dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy.$$



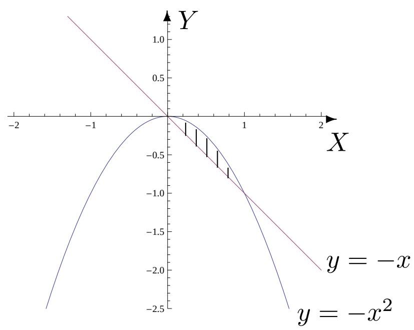
L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_1^3 \left(\int_0^x f(x,y)\ dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^3 f(x,y)\ dx\right) dy + \int_1^3 \left(\int_y^3 f(x,y)\ dx\right) dy.$$

III. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.

b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x\cos(y)$.



L'expression analytique de A est$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in [-x, -x^2]\}$
ou encore
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in [-y, \sqrt{-y}]\}$.
La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sin(1) - \frac{1}{2}(\cos(1) + 1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
a) $f(x, y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2],\ y \in [1 + x^2, 9 - x^2]\}$
b) $f(x, y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-x, 1]\}$
c) $f(x, y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1, 1]\}$

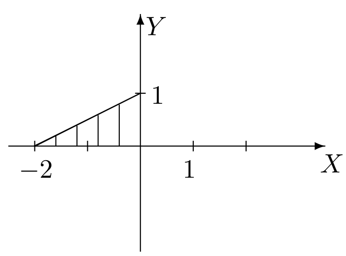
a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{512}{5}$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin(1)$.

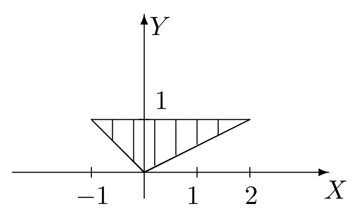
c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2\pi - 8}{\pi^2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

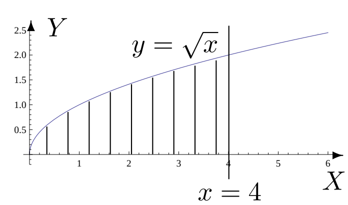
a) $\iint_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\iint_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}}\ dx\,dy$

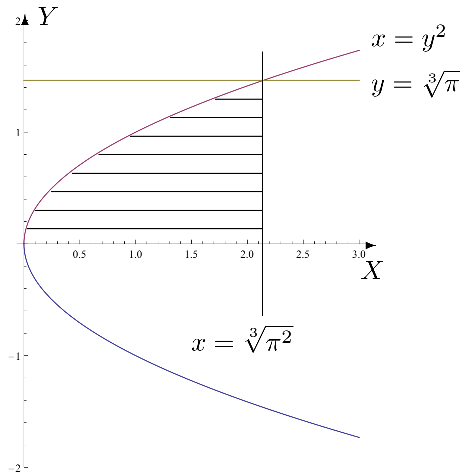


a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\left(\dfrac{1}{e} - 1\right)^2$.

b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{3}{8}$.

c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$.

4. **Soit** $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx\right)\ dy$.
Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.



La fonction est intégrable sur cet ensemble (partie hachurée) et son intégrale vaut 0.

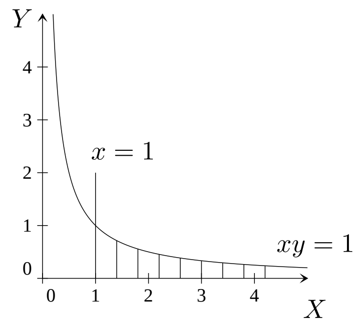
Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (3)

Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. **Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.**

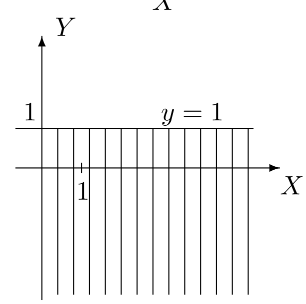
a) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



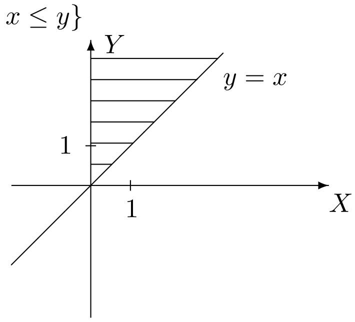
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\, dx \right) dy$

La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in]-\infty, 1]\}$ et son intégrale vaut $\frac{e}{3}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



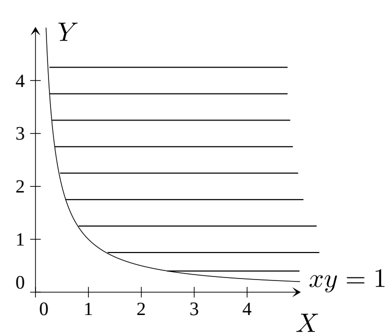
c) $\displaystyle\iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{1}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



d) $\displaystyle\iint_A x^3\, e^{-x^2 y}\, dx\, dy$ avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

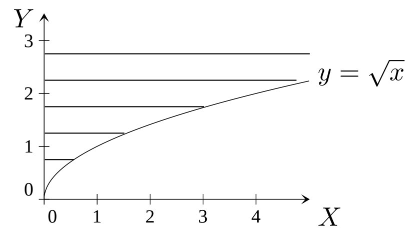
La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut 1. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



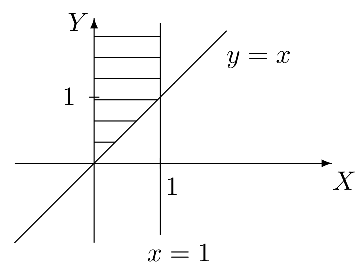
2. **Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.**

$$a) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\, dx \right) dy, \quad b) \int_0^1 \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\, dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx$$

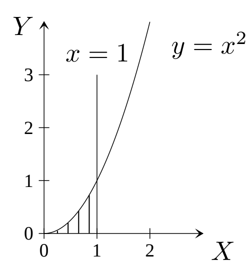
a) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0,+\infty[,\ x \in [0,y^2]\}$ et son intégrale vaut $\frac{1}{2}\ln(2)$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



b) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [x,+\infty[\}$ et son intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



c) La fonction est intégrable sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1],\ y \in [0,x^2]\}$ et son intégrale vaut $2\ln(2) - 1$. L'ensemble d'intégration est l'ensemble hachuré ci-contre.



3. **On considère l'intégrale double suivante**

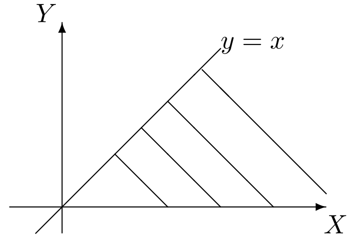
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \cos(y-x)e^{-x}\, dy \right) dx$$

a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

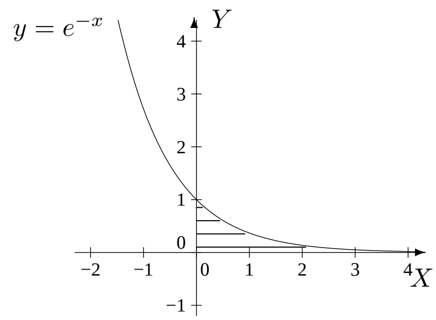
a) L'ensemble d'intégration A est donné par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,+\infty[,\ y \in [0,x]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,+\infty[,\ x \in [y,+\infty[\}$$

et est représenté par l'ensemble hachuré ci-dessous.
En permutant l'ordre d'intégration, on a $I' = \int_0^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \cos(y-x)e^{-x}\ dx \right) dy$.
b) La fonction est intégrable sur A et, dans un ordre ou dans l'autre, son intégrale vaut $1/2$.
c) On trouve la même valeur car la fonction est intégrable sur A.



4. **Calculer l'intégrale de $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x - y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)**



Une description analytique de l'ensemble d'intégration est donnée par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[,\ y \in [0, e^{-x}]\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0, 1],\ x \in [0, -\ln(y)]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ x \geq 0\}$$

La fonction est intégrable sur A et son intégrale vaut $\frac{3}{4}$.

Liste 7 : fonctions de plusieurs variables (4)

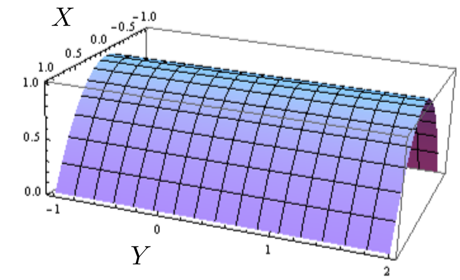
I. Volume d'un corps

Calculer le volume des corps de l'espace décrits ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique de ces corps.

1. **Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1 - x^2$ **et les plans d'équation** $z = 0,\ y = -1$ **et** $y = 2$.
2. **Corps borné par les plans de coordonnées et la surface d'équation** $2x + 3y + z = 6$
3. (*) [2]**Corps borné par la surface d'équation cartésienne** $z = 1 - 4x^2 - y^2$ **et le plan d'équation** $z = 0$.

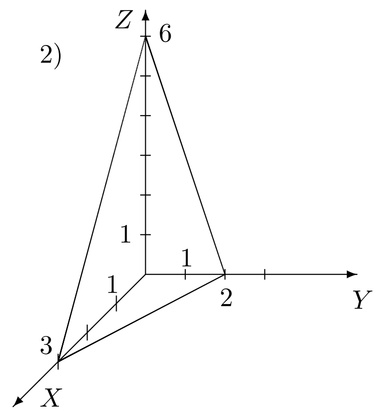
   Le volume du premier corps vaut 4 (unités de volume), celui du deuxième vaut 6 et celui du troisième vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

   Les représentations graphiques sont les suivantes :

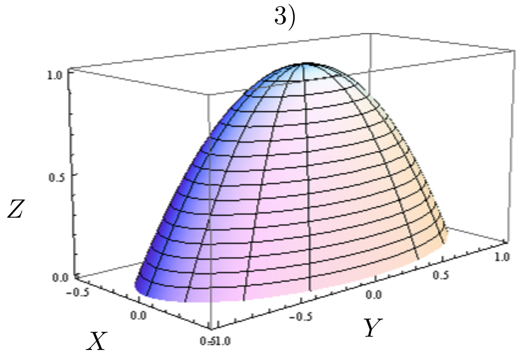


1)

2)



3)



II. Intégration par changement de variables polaires

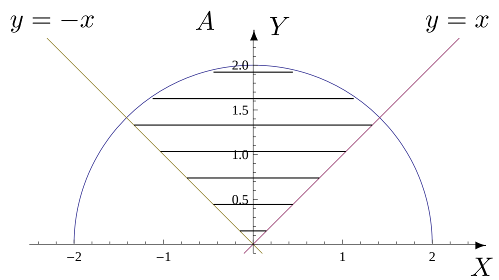
1. **Si elle existe, calculer**

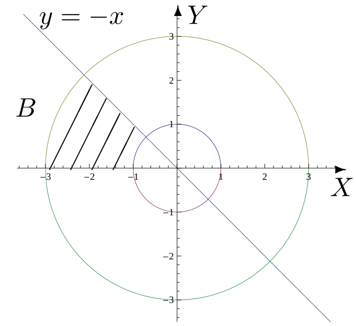
   a) $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   b) $\displaystyle\iint_B xy\, dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.

   c) $\displaystyle\iint_C (2x + y)\, dx\, dy$ où $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1 - x^2}\}\}$.

2. Pour les physiciens . . . et ceux qui veulent !





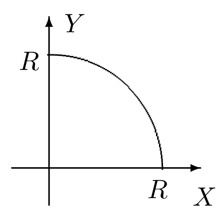
Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\frac{4\pi}{3}$, -5 et $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1}\iint_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1}\iint_A y\ dx\ dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\frac{R\sqrt{3}}{2\pi}, \frac{3R}{2\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



3. **Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 9 - x^2 - y^2$ et par le plan d'équation $z = 0$.**

Le volume du corps est $\frac{81\pi}{2}$ (unités de volume).

IV. Divers

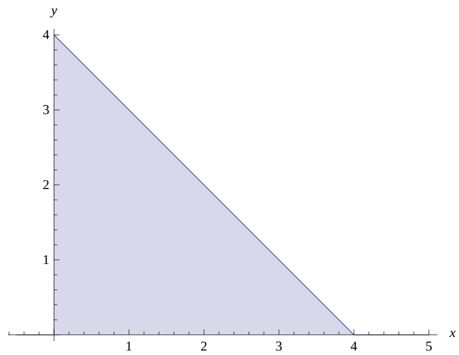
La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \iint_R \delta(x,y)dxdy,$$

où $\delta(x,y)$ est la densité au point de coordonnées (x,y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent $4\ m$. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse[3], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

3. c'est-à-dire $\delta(x,y) = K(x^2+y^2)$ (où K est une constante)

a) **quelle est la masse de cette plaque ?**
b) **en quelles unités s'exprime la constante K ?**



La masse de la plaque est $\frac{128K}{3}$ kg et la constante K s'exprime en kg/m^4.

Liste 8 : approximations polynomiales

Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations. Pour f_5,**
   a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   b) indiquer où se situe le graphique de f_5 au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

   $f_1(x) = \cos(x)\ e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\qquad f_2(x) = \sqrt{1 + 9x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$
   $f_3(x) = \dfrac{1}{1 - 2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\qquad f_4(x) = \text{arctg}(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$)$, n = 0, 1, 2$
   $f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\qquad f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1 + 3x$	$1 + 3x + 4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1 + \dfrac{9x}{2}$	$1 + \dfrac{9x}{2} - \dfrac{81x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}$
f_3	1	$1 + 2x$	$1 + 2x + 4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4(x_0 = 0)$	0	x	$x,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4(x_0 = 1)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2}$	$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{4},\ x \in \mathbb{R}$
f_5	1	1	$1 - x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_6	$\sin(1)$	$\sin(1) + \cos(1)(x - 1)$	$\sin(1) + \cos(1)(x-1) - \sin(1)\dfrac{(x-1)^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Pour f_5, si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_0, u_1, u_2 compris entre 0 et x tels que

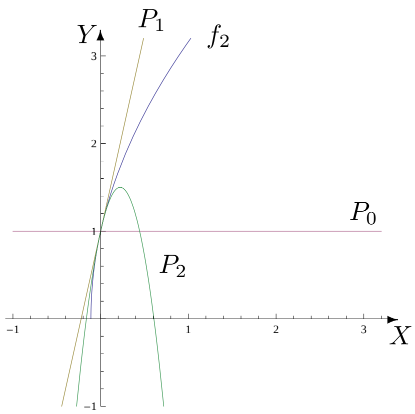
$$R_0(x) = -\sin(2u_0)x, \quad R_1(x) = -2\cos(2u_1).\frac{x^2}{2!} = -\cos(2u_1)x^2$$

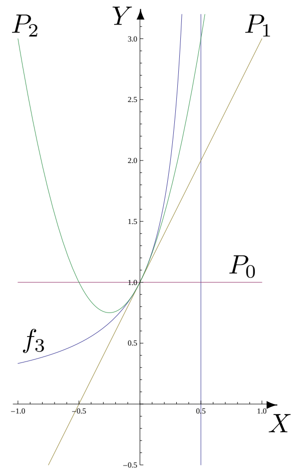
et

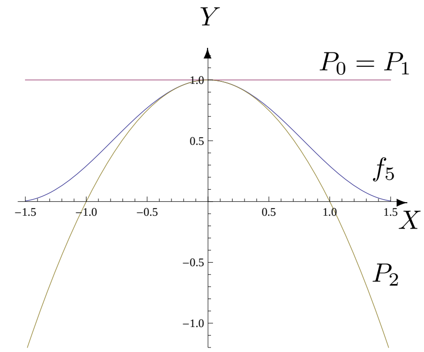
$$R_2(x) = 4\sin(2u_2).\frac{x^3}{3!} = \frac{2\sin(2u_2)\,x^3}{3}.$$

b) Lorsque x est au voisinage de 0, $R_0(x)$ et $R_1(x)$ sont négatifs tandis que $R_2(x)$ est positif. Dès lors, le graphique de la fonction est situé en dessous de celui de P_0 et de celui de P_1 mais au-dessus de celui de P_2.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

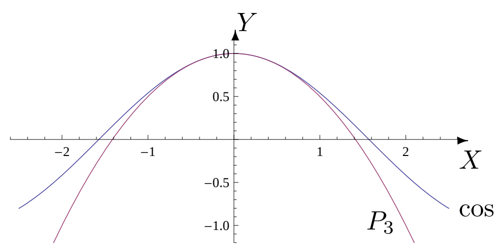




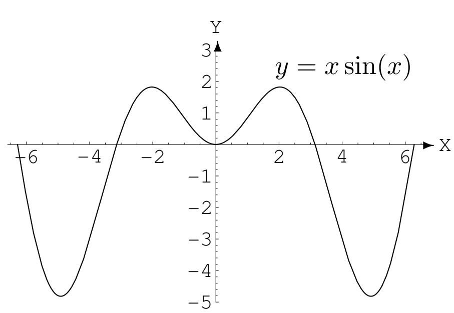


2. a) **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre** 3 **en** 0 **de la fonction** $\cos$ **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

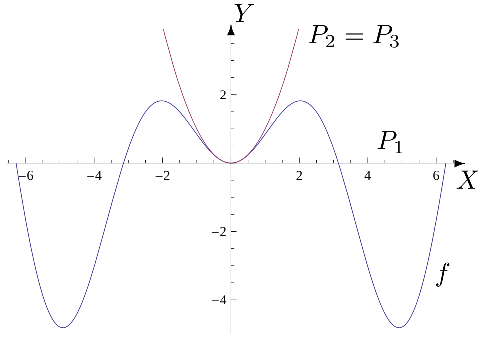
L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \dfrac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)| \leq \dfrac{x^4}{24}$.



b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 **à l'ordre** $1,\ 2$ **et** 3 **de la fonction** $f(x) = x\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. **Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où** f **est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.**
(Suggestion : $|\sin(x)| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$**)**



Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre $1,\ 2$ et 3 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = 0,\ P_2(x) = x^2 = P_3(x),\ x \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de zéro, le graphique de f est
1) au-dessus de celui de P_1
2) en dessous de celui de $P_2 = P_3$



3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**
Comment peuvent-ils procéder ?

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\, x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\,x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Si $x = 1$, l'inégalité

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6\ (7! = 5040).$$

Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

$$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

4. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par**[4]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$

Pour g_1, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

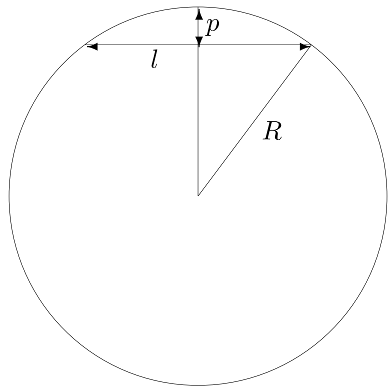
$$P_0(x) = 0,\ P_1(x) = -2x,\ P_2(x) = -2x,\ P_3(x) = -2x - \frac{2x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour g_2, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = -2,\ P_1(x) = -2 - x,\ P_2(x) = -2 - x - 5x^2,\ P_3(x) = -2 - x - 5x^2 - 7x^3,\ x \in \mathbb{R}.$$

5. **Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale p de ce tunnel.**

4. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$; décomposer en fractions simples



Une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\dfrac{l^2}{8R}$.

Liste 9 : Suites

Suites

1. **Etudier la convergence des suites suivantes et préciser leur limite en cas de convergence :**

a) $x_m = \dfrac{2m^2+5m+1}{3m^2+2}$ $(m \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = n - \sqrt{n^3 - n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n+1)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

f) $x_k = \sqrt[k]{k^2}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

g) $x_n = \dfrac{n \sin(n!)}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

h) $x_j = \frac{j!}{j^j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$

i) $x_j = \dfrac{(j!)^2}{(2j)!}$ $(j \in \mathbb{N})$

j)[5] $x_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

a) La suite converge vers $\frac{2}{3}$
b) La suite converge vers 1
c) La suite converge vers $-\infty$
d) La suite converge vers $\frac{2}{5}$
e) La suite converge vers $+\infty$
f) La suite converge vers 1
g) La suite converge vers 0
h) La suite converge vers 0
i) La suite converge vers 0
j) La suite converge vers $\frac{1}{3}$

2. **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par**

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

est divergente.

Cette suite est divergente car, par exemple, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ convergent vers des limites différentes.

3. **Montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence selon**

$$x_0 = \sqrt{2} \qquad \textbf{et} \qquad x_j = \sqrt{2 + x_{j-1}} \quad , \forall j \in \mathbb{N}_0$$

est croissante et majorée. En déduire la convergence et la limite de cette suite.

La suite est croissante et majorée par 2 ; elle converge vers 2.

4. **Soient $a, b \in \mathbb{R}_0$ avec $a \neq 1$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par**

$$u_{n+1} = au_n + b, \ u_0 \in \mathbb{R}.$$

i) **En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est la seule limite L possible de cette suite ?**

Si $a \neq 1$, la seule limite possible de cette suite est $\dfrac{b}{1-a}$

5. Suggestion : Montrer par récurrence sur n que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

ii) **Définissons $v_n = u_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'éventuelle convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.**

Si $u_0 = L$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L quel que soit a.
Si $u_0 \neq L$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- converge vers une limite finie si $a \in]-1, 1[\setminus\{0\}$
- converge vers une limite infinie si $a < -1$ ou si $a > 1$
- diverge si $a = -1$.

iii) Application : **considérons un carré de côté égal à 1. Partageons-le en 9 carrés égaux et colorions le carré central. Ensuite, pour chaque carré non colorié, réitérons le procédé. Notons A_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $A_0 = 0$?**

Comme $A_n = \dfrac{8}{9}A_{n-1} + \dfrac{1}{9}$, la limite de cette suite vaut 1.

LISTE 10 : SÉRIES (1)

Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n^2)}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j\frac{j^2+1}{j^3+1}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j^3+\sqrt{3}}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{\sqrt[3]{k}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\ln(n)}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

a) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$
c) Série alternée avec la suite $r_j = \dfrac{j^2+1}{j^3+1}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
d) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$ donc série convergente.
e) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
f) Série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
h) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :**

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^j$ b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(j+1)(j+2)}$

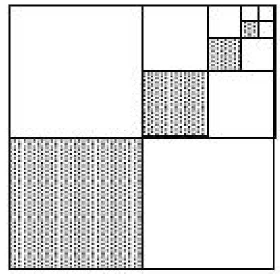
e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{n+2}}{5^n}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{3k-1}}{k!}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$

a) Série géométrique divergente car $\sqrt{2} \notin]-1,1[$
b) Série géométrique convergente car $-\frac{1}{3} \in]-1,1[$; la somme de la série vaut $\frac{1}{6}$
c) Série définissant l'exponentielle de 3 ; la somme de la série vaut e^3-4
d) Série convergente dont la somme vaut 1
e) Série géométrique convergente car $\frac{3}{5} \in]-1,1[$; la somme de la série vaut $\frac{45}{2}$
f) Série définissant l'exponentielle de e^3 ; la somme de la série vaut $\frac{1}{e}\exp(e^3)$
g) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$
h) Série convergente ; la somme de la série vaut $\sin(1)$

3. **Ecrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel $1,32222\ldots$.**

Le réel $1,3222\ldots = 1,3 + 2.10^{-2}\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}10^{-j} = \frac{119}{90}$.

4. **Un carré de $4\,cm$ de côté est divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes). Le carré inférieur gauche est ombré. Le carré supérieur droit est à nouveau divisé en quatre carrés identiques (en prenant ses médianes) et le carré inférieur gauche est ombré. On répète indéfiniment ce processus comme montré sur la figure ci-dessous. Quelle est la surface ombrée totale ?**



La surface ombrée totale vaut $\dfrac{16}{3}$ cm^2.

5. **Une balle est lâchée d'une hauteur de $2\,m$. Chaque fois qu'elle frappe le sol, elle rebondit sur les trois quarts de la distance de sa chute. Quelle distance aura-t-elle parcourue quand elle sera complètement arrêtée ?**

   Quand la balle sera complètement arrêtée, elle aura parcouru 14 m.

6. **Démontrer l'égalité**

$$\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) + \sin^6(\theta) + \ldots = \tan^2(\theta).$$

   A quelle(s) condition(s) cette égalité est-elle vraie ?

   Cette égalité est vraie si et seulement si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Liste 11 : Séries (2)

Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes** :

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^3-j+2}{j^3+5j^2+10}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k+1)^2+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{7n+15}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[p]{n^3+1}}$ $(p \in \mathbb{N}_0)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ak}$ $(a \in \mathbb{R})$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\ln(3)}$

a) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.
b) Série géométrique convergente car $-\frac{\sqrt{2}}{5} \in]-1,1[$. On peut aussi la considérer comme une série alternée avec la suite $r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
c) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc série convergente.
d) Série convergente car son terme général pris en valeur absolue peut être comparé à celui d'une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$. On peut aussi la considérer comme une série alternée avec la suite $r_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ qui décroît vers 0 donc série convergente.
e) Comparaison avec la série harmonique divergente donc série divergente.
f) Si $p = 1$: comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente ; si $p > 1$: comparaison avec une série de Riemann divergente car $\alpha < 1$ donc série divergente. Remarquons que si $p \geq 3$, le terme général ne tend pas vers 0.
g) Si $a > 0$: série géométrique convergente car $e^{-a} \in]-1,1[$; si $a \leq 0$: série géométrique divergente car $e^{-a} \notin]-1,1[$
h) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent (on donne $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $0 < ab < c$ et $c \neq 0$)** :

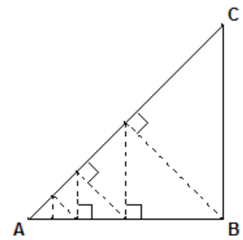
a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\ln(2))^{j+3}}{j!\ln(4)}$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^j$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+5k+6}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n b^{n+1}}{c^{n+2}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{k}{k+3}\right)$

a) Série exponentielle ; la somme de la série vaut $\ln^2(2)$
b) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{3}}$
c) Série convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{1}{2}$
d) Série géométrique convergente ; la somme de la série vaut $\dfrac{b}{c(c-ab)}$
e) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{1}{2}$
f) Série convergente ; la somme de la série vaut $-\ln(2)$
g) Série divergente car son terme général ne tend pas vers 0.

3. **Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $|BC| = a$ cm $(a > 0)$ comme représenté ci-dessous. Une puce qui se trouve en B se déplace le long d'une droite perpendiculaire au segment $[AC]$. Lorsqu'elle atteint ce segment, elle tourne et revient sur le segment**

$[AB]$ en prenant une route perpendiculaire à $[AB]$. Elle fait ainsi l'aller-retour entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point A. Quelle sera la distance parcourue par la puce ?



La distance parcourue par la puce sera $a\,\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = a(\sqrt{2}+1)$ cm.

Liste 12 : Mathématiques appliquées (1)

Fonctions de plusieurs variables

1. **En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [6]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.**
   Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de 3 paramètres : l'énergie interne U, le volume V et le nombre de particules N du système.*
   Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction S, dépendant de U, V et N, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique*. Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par

$$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$

   où
   - **T est la température du système ;**
   - **p est la pression du système ;**
   - **μ est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [7]) ;**

   et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

   Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par

$$S = k_B N \ln\left(\frac{V - Nv_0}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{U + \frac{K_i N^2}{V}}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2} k_B N$$

   où
   - **k_B est la constante de Boltzmann et vaut approximativement $1,38.10^{-23} J/K$,**
   - **v_0 est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,**
   - **$K_i > 0$ est le paramètre d'interaction entre les particules,**
   - **m est la masse d'une particule,**
   - **$\hbar$ est la constante de Planck et vaut $6,626.10^{-34} J.s$,**

   déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

6. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va "diffuser" dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.

7. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

Solution. La première équation d'état conduit à

$$D_U S = \frac{3k_B N}{2(U + \frac{K_i N^2}{V})} = \frac{1}{T}$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$U = \frac{3}{2} k_B N T - \frac{K_i N^2}{V}.$$

La seconde équation d'état conduit à

$$D_V S = \frac{k_B N}{V - N v_0} + \frac{3 k_B N}{2} \frac{\frac{-K_i N^2}{V^2}}{U + \frac{K_i N^2}{V}} = \frac{p}{T}$$

2. **La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation[8] :**

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant t, la température d'un tel gaz, qui est de $300K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $100\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

Solution. La pression diminue à la vitesse de $0,04155$ kPa/s.

3. **La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :**

Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que

$$(D_x f)(a,b) = (D_y f)(a,b) = 0.$$

Posons

$$D = (D_x^2 f)(a,b)(D_y^2 f)(a,b) - [(D_x D_y f)(a,b)]^2.$$

(a) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;**

(b) **Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;**

(c) **Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé "point-selle" ;**

(d) **Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.**

En se basant sur ce test,

a) **rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction**

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Solution. L'origine $(0,0)$ est un point-selle. De plus, $f(1,1) = -1$ et $f(-1,-1) = -1$ sont des minima locaux de f.

8. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

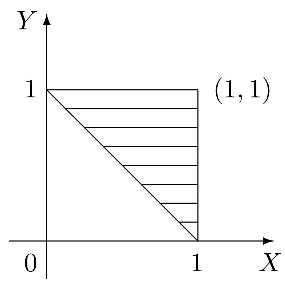
b) **déterminer la distance**[9] **(c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées** $(1, 0, -2)$ **et le plan d'équation cartésienne** $x + 2y + z = 4$**.**

Solution. Le point de coordonnée $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6})$ correspond à un minimum local (et même global car en géométrie, on prouve que la distance d'un point à un plan est unique) de la distance, qui vaut en ce point $\frac{5\sqrt{6}}{6}$. La distance du point donné au plan donné vaut donc $\frac{5\sqrt{6}}{6}$.

4. **Si une charge électrique est répartie sur une région** R **et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par** $\rho(x, y)$ **en un point**(x, y) **de** R**, alors la charge totale** Q **présente sur cette région est donnée par**

$$Q = \iint_R \rho(x, y)\, dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D **de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en** (x, y) **est donnée par** $\rho(x, y) = 2xy$**, mesurée en coulombs par mètre carrés** (C/m^2)**. Calculer la charge totale présente sur** D**.**



Solution. La charge totale présente sur le domaine triangulaire donné est de $\frac{5}{12}C$.

5. **En physique, le** ***moment d'inertie*** **d'une masse ponctuelle** m **par rapport à un axe est défini par le produit** mr^2**, où** r **est la distance entre la masse ponctuelle** m **et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région** R **du plan et dont la densité en** (x, y) **est donnée par** $\rho(x, y)$**, de la manière suivante.**
Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut

$$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$

Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O**, celui-ci étant donné par**

$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y)\, dxdy.$$

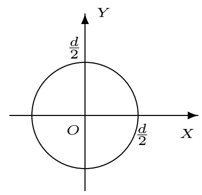
On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$**.**

Soit un disque homogène D **de densité** $\rho(x, y) = \rho$ **et de diamètre** d**. Déterminer**
a) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre** ;

9. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$
et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.

b) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.**

Solution. a) Considérons le repère orthonormé dont l'origine O est le centre du disque donné, et dont les axes coïncident avec deux droites perpendiculaires passant par O. On obtient dès lors la configuration suivante :



Dans ces conditions, le disque D est décrit par

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right\}$$

ce qui correspond en coordonnées polaires à l'ensemble

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid r \in \left]0, \frac{d}{2}\right],\ \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

auquel on ajoute le centre du disque.
Ainsi, le moment d'inertie du disque D par rapport à son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'origine du repère choisi et est donné par

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy = \iint_{D'} r^2 \rho\, r\, drd\theta = \frac{\pi\rho d^4}{2^5}.$$

b) Vu le choix du repère, le moment d'inertie du disque D par rapport à une droite passant par son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'axe X ou encore par rapport à l'axe Y. On en conclut donc que tous ces moments d'inertie du disque sont égaux, c'est-à-dire $I_X = I_Y = I_{d'}$ quelle que soit la droite d' passant par O. Par conséquent, comme

$$I_O = I_X + I_Y = 2I_{d'},$$

il s'ensuit que

$$I_{d'} = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi\rho d^4}{2^6}.$$

6. **Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par**

$$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx \qquad \left(\textbf{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx\right).$$

De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx \right) dy = 1,$$

auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy.$$

Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & \textbf{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 10 \\ 0 \quad \textbf{sinon} & \end{cases}.$$

(a) **Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.**

(b) **Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 7 ans mais au moins 2 ans.**

Solution. (a) Pour que la fonction donnée soit une fonction de densité, la constante C doit valoir $\frac{3}{2000}$.

(b) La probabilité que la durée de vie d'une batterie de cette fabrique soit au maximum de 7 ans et au minimum de 2 ans est de $\frac{19}{80} = 0,2375$, c'est-à-dire proche de 24%

7. **Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.**

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{\frac{-t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 10 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Solution. Si l'on note X (resp. Y) le temps d'attente pour obtenir un ticket (resp. une boisson fraîche), il vient que $\mathbb{P}[X+Y<20] = 1 + \frac{1}{e^4} - \frac{2}{e^2} \approx 0,7476$. Par conséquent, environ 75% des spectateurs attendent moins de 20 minutes avant de s'asseoir.

LISTE 13 : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (2)

Calcul matriciel

1. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\left\{\begin{array}{lcl} Dx(t) & = & -4x(t) - 3y(t) + 5t \\ Dy(t) & = & -2x(t) - 5y(t) + 5e^t \end{array}\right. .$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ **du vecteur position de cette particule à tout instant** t**.**

Solution. Le système donné se réécrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{:=P(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}}_{:=B(t)}. \qquad (*)$$

Tentons de diagonaliser la matrice A. On a

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 9\lambda + 14 = (\lambda + 2)(\lambda + 7)$$

et donc les valeurs propres de A sont -2 (simple) et -7 (simple), ce qui entraîne que A est diagonalisable. Après recherche, il s'avère que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés respectivement à -2 et -7. Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

il vient que

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix},$$

et, en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$ ci-dessus, on obtient que

$$\begin{aligned} & S^{-1} \begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix} = S^{-1}A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1}AS \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}. \qquad (**) \end{aligned}$$

Or, $\det(S) = -5$ et l'inverse de S est donnée par

$$S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'équation $(**)$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}.$$

ce qui équivaut encore au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} DX(t) & = & -2X(t) - t + e^t \\ DY(t) & = & -7Y(t) + 2t + 3\,e^t \end{array}\right. .$$

Les équations différentielles sont alors *découplées* et peuvent être résolues séparément. Les solutions de ces deux dernières EDLCC sont les fonctions

$$X(t) = C_1 e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4},\ t \in \mathbb{R}$$

et

$$Y(t) = C_2 e^{-7t} + \frac{3}{8}e^t + \frac{2}{7}t - \frac{2}{49},\ t \in \mathbb{R}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Enfin, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Y(t).$$

ou encore

$$\begin{cases} x(t) = -3C_1\, e^{-2t} + C_2\, e^{-7t} - \dfrac{5}{8}\, e^t + \dfrac{25}{14}t - \dfrac{155}{196},\ t \in \mathbb{R} \\ y(t) = 2C_1\, e^{-2t} + C_2\, e^{-7t} + \dfrac{25}{24}\, e^t - \dfrac{5}{7}t + \dfrac{45}{98},\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}$.

2. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\begin{cases} Dx(t) &=& x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) &=& 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) &=& -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}.$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ **du vecteur position de cette particule à tout instant** t**.**

Solution. Le système donné se réécrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \\ Dz(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{=P(t)}. \qquad (*)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont 0 (valeur propre double) et 6 (valeur propre simple). Après recherche, il s'avère que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A, linéairement indépendants, associés à 0, ce qui entraîne que la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède au moins 3 vecteurs propres linéairement indépendants. De plus, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre 6.
Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

et en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} DX(t) & = & 0 \\ DY(t) & = & 0 \\ DZ(t) & = & 6Z(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X(t) & = & C_1 \\ Y(t) & = & C_2 \\ Z(t) & = & C_3\, e^{6t} \end{array} \right. ,$$

où $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$. Dès lors, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}, \quad \text{où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 + 2C_2 + C_3\, e^{6t} \\ y(t) = -C_2 + 2C_3\, e^{6t} \\ z(t) = C_1 - C_3\, e^{6t} \end{array} \right. .$$

3. **Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :**
   - **étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.**

   Déterminer

   a) **la matrice de transition du système ;**

   Solution. Notons respectivement I_0, M_0 et S_0 les probabilités qu'un individu soit immunisé, malade, non malade et non immunisé un jour donné. Le mois suivant, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I_1 & = & 0,9\, I_0 + 0,4\, S_0 + 0\, M_0 \\ S_1 & = & 0,1\, I_0 + 0,5\, S_0 + 0,8\, M_0 \\ M_1 & = & 0\, I_0 + 0,1\, S_0 + 0,2\, M_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ S_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,8 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

   Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

   b) **la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;**

   Solution. Si un individu est immunisé un jour donné, la probabilité qu'il soit immunisé deux mois plus tard est de 85%.

   c) **la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.**

   Solution. A long terme, la probabilité qu'un individu soit immunisé est donnée par $\frac{32}{41}$, c'est-à-dire environ 78%.

4. **Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :**
   - **étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;**
   - **étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;**
   - **étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;**
   - **si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.**

   Déterminer la matrice de transition du système.

   Solution. Notons respectivement B_0, D_0, H_0 et S_0 les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le bétail, disparaisse, soit dans l'herbe et soit dans le sol à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par
   noindent *Solution.* Notons respectivement S_0, H_0, B_0 et D_0 les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail et disparaisse à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} S_1 & = & \frac{3}{5}S_0 + \frac{1}{10}H_0 + \frac{3}{4}B_0 + 0D_0 \\ H_1 & = & \frac{3}{10}S_0 + \frac{2}{5}H_0 + 0B_0 + 0D_0 \\ B_1 & = & 0S_0 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{5}B_0 + 0D_0 \\ D_1 & = & \frac{1}{10}S_0 + 0H_0 + \frac{1}{20}B_0 + 1D_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ H_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{20} & 1 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} S_0 \\ H_0 \\ B_0 \\ D_0 \end{pmatrix}.$$

   Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

5. **La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.**
   Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
   Considérons le message

   SUIS EN DANGER

   ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

   Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, ... , Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R**
19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18**

Puisqu'on emploie une matrice 2×2, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs[10] 1×2 :

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par C, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18**
S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R**.

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

Solution. La matrice de décodage est donnée par l'inverse de la matrice de codage, c'est-à-dire la matrice

10. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le message est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 22 & 9 & 12 & 1 & 9 & 14 & 27 & 3 & 21 & 18 & 9 & 5 & 21 & 24 & 27 \\ \text{V} & \text{I} & \text{L} & \text{A} & \text{I} & \text{N} & * & \text{C} & \text{U} & \text{R} & \text{I} & \text{E} & \text{U} & \text{X} & * \end{array}.$$

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\ \mathbf{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

— **Sachant que th** $: x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$**, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.**

— **Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?**

Solution. - La fonction th : $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée première est

$$D\text{th}(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Comme $\text{th}(0) = 0$ et $D\text{th}(0) = 1$, l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction est le polynôme $P(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 5\,\text{km} = 5000\,\text{m}$ et $h = 2\,\text{m}$, alors la valeur de $\frac{2\pi h}{\lambda}$ est proche de 0 et, en utilisant l'approximation polynomiale ci-dessus, on a

$$v^2 \approx \frac{g\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi h}{\lambda} = gh.$$

Ainsi, la vitesse de la vague du tsunami lors de son arrivée près des côtes était $\sqrt{2 \,.\, 9,81} = 4,429\,\text{m/s}$.

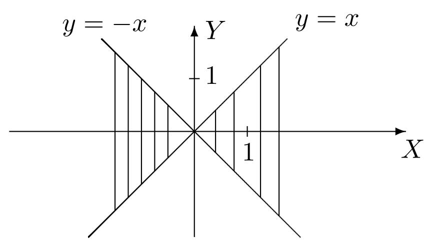
Liste 14 : Révisions en vue de l'examen

Fonctions de plusieurs variables

1. **On donne la fonction** $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$.

   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.

   Solution. Les 2 domaines sont égaux à $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y,\ \dfrac{x+y}{x-y} > 0\right\}$



   Les points des droites sont exclus de l'ensemble.

   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2, 1)$**.**

   Solution. Les dérivées partielles de la fonction sont données par

$$D_x f(x, y) = \frac{-y}{x^2 - y^2} \qquad D_y f(x, y) = \frac{x}{x^2 - y^2}$$

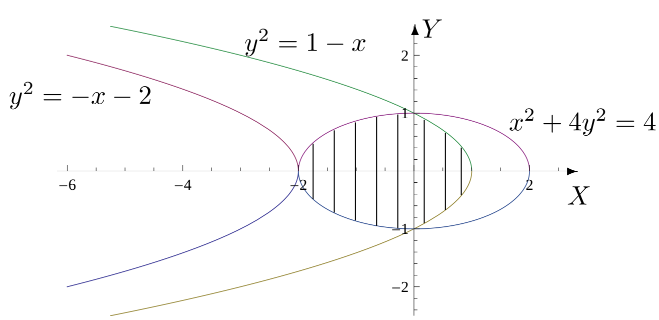
   et, comme le point de coordonnées $(-2, 1)$ appartient au domaine de dérivabilité, on a $D_x f(-2, 1) = \frac{-1}{3}$ et $D_y f(-2, 1) = \frac{-2}{3}$.

2. **Soit** f **une fonction continûment dérivable sur** $]-2, 1[\times]-4, 4[$**. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction** F **définie par** $F(x, y) = f(x+y^2, x^2+4y^2)$**, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de** F **en fonction de celles de** f**.**

   Solution. Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x + y^2 < 1,\ -4 < x^2 + 4y^2 < 4\}.$$

   Il est représenté par l'ensemble des points hachurés ci-dessous, les points des courbres étant exclus de l'ensemble.



   Les dérivées partielles de F sont données par

$$(D_x F)(x, y) = (D_u f)(x + y^2, x^2 + 4y^2)\ .\ 1 + (D_v f)(x + y^2, x^2 + 4y^2)\ .\ 2x$$

$$(D_yF)(x,y) = (D_uf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 2y + (D_vf)(x+y^2, x^2+4y^2)\ .\ 8y$$

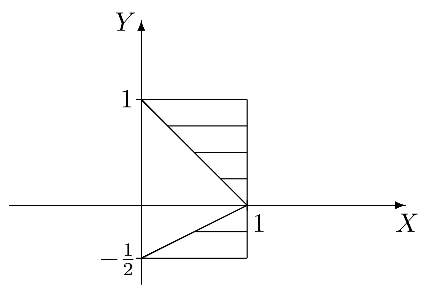
si u et v sont respectivement la première et la seconde variable de f.

3. **Si elles existent, calculer les intégrales suivantes**

a) $I = \displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x \sin(y^5)\, dy \right) dx$

Solution. On a $I = \dfrac{1}{10}(1 - \cos(32))$

b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\, dx\, dy$ **si** A **est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous**



Solution. On a $I = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2e} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

c) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}}\, dx\, dy$ **si** $A = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$

Solution. On a $I = \dfrac{\pi}{6}$

d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4+y^2}\, dy \right) dx$

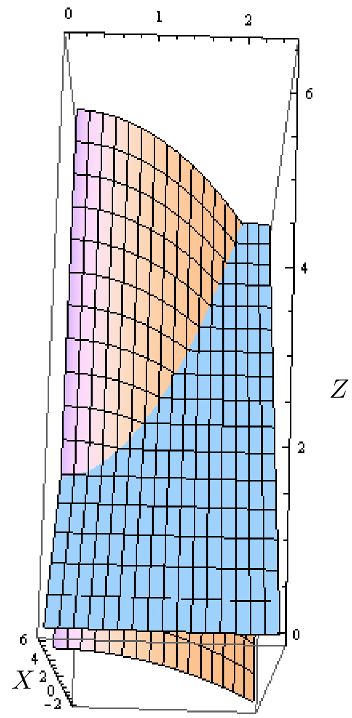
Solution. On a $I = \dfrac{1}{5}\left(\ln(3) - \dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{\pi}{8} \right)$.

4. **Calculer le volume du corps de l'espace borné par les surfaces d'équation cartésienne** $x + z = 6$ **et** $x + y^2 = 4$ **et les plans d'équation** $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$**. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.**

Solution. Le volume du corps vaut

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^{4-y^2} (6-x)\ dx \right) dy = \frac{352}{15}$$

et voici sa représentation graphique (partie "sous" le plan)



Calcul matriciel

1. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution. Comme $\det A = 3 \neq 0$, la matrice inverse de A existe et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ si I est la matrice identité de dimension 3.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. Les valeurs propres de A sont -1 (simple) et 5 (double).
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 5 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où c et c' sont des complexes non simultanément nuls. Dès lors, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple -1 sont les vecteurs

$$c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Ainsi, on a, par exemple,

$$S = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Les matrices données sont correctes puisque

$$AS = S\Delta = \begin{pmatrix}-5 & -5 & -1\\5 & 0 & -1\\0 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

Approximations polynomiales

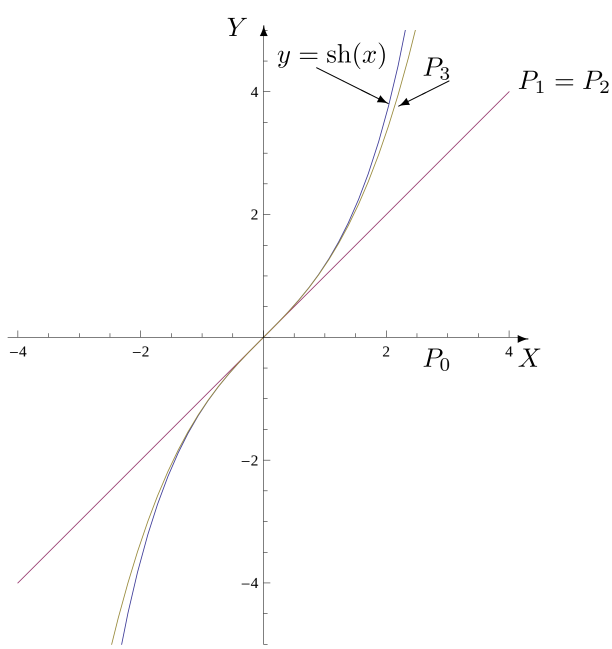
Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0,\, 1,\, 2$ et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Solution. Si on note $P_n(x)$ l'approximation à l'ordre n en 0, puisque f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = P_2(x) = x \quad \text{et } P_3(x) = x + \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$$



Séries

1. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\sin(k\theta)}{k(k+1)}\ \ (\theta \geq 0) \qquad\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}.$$

Solution.
(1) Comparaison avec une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc série convergente.
(2) Série divergente car son terme général ne tend pas vers zéro.

2. **Etudier la convergence des séries suivantes et préciser la somme de celles qui convergent :**

$$(1)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}} \qquad (2)\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k+5)(2k+3)} \qquad (3)\ \sum_{n=3}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x)}{n!}\ (x > 0).$$

Solution.
(1) Série de Riemann divergente car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.
(2) Série convergente ; la somme de la série vaut $-\frac{1}{5}$
(3) Série convergente ; la somme de la série vaut $\frac{41}{24}$
(4) Série exponentielle ; la somme de la série vaut $x - 1$.

Table des matières