Chapitre 6

Intégrales remarquables

6.1 Intégrale de Poisson

Rappelons qu'au Théorème 4.5.2, nous avons obtenu la formule suivante connue sous le nom d'**Intégrale de Poisson**:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \forall a > 0.$$

De plus, au Paragraphe 5.1, nous en avons déduit les résultats suivants

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}, \quad \forall a > 0, b \in \mathbb{R},$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+b/x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}, \quad \forall a > 0, b \geq 0.$$

6.2 La fonction "Gamma": Γ

Remarque. *Pour tout* $n \in]0, +\infty[$*, la fonction* $\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}$ *est intégrable sur* $]0, +\infty[$. De fait, cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie d'une part

$$\mathrm{e}^{-1}x^{n-1} \leq \mathrm{e}^{-x}x^{n-1} \leq x^{n-1}, \quad \forall x \in]0, 1[,$$

alors que la fonction x^{n-1} est intégrable en 0^+ si et seulement si $n > 0$, et d'autre part

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}x^{n-1} = 0, \quad \forall n > 0.\square$$

Définition. La *fonction "Gamma"* Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{n-1}\,dx, \quad \forall n \in]0, +\infty[;$$

on dit aussi qu'il s'agit de la *première intégrale eulérienne*.

Cette fonction Γ jouit de nombreuses propriétés fort intéressantes.

Proposition 6.2.1 *Pour tout* $n \in]0,+\infty[$, *on a* $\Gamma(n) > 0$.
On a notamment $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Preuve. De fait, l'intégrand est une fonction strictement positive sur $]0,+\infty[$. De plus, il vient successivement

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

et, en recourant au changement de variable $t = \sqrt{x}$ en $(*)$,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{-1/2}\, dx \underset{(*)}{=} 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.\blacksquare$$

Proposition 6.2.2 *La fonction* Γ *appartient à* $\mathcal{C}_\infty(]0,+\infty[)$ *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}_0$ *et tout* $n \in]0,+\infty[$, *on a*

$$\mathrm{D}^k\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{n-1} (\ln(x))^k\, dx.$$

Preuve. Cela résulte aussitôt du théorème de dérivation des intégrales paramétriques car
a) pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{e}^x x^{n-1} \in \mathcal{C}_\infty(]0,+\infty[)$,
b) pour tout compact K de $]0,+\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\sup_{n\in K} \left|\mathrm{D}_n^k(\mathrm{e}^{-x}x^{n-1})\right| = \left(\sup_{n\in K} x^{n-1}\right)\ \mathrm{e}^{-x}\left|\ln(x)\right|^k.$$

Or il existe $a \in]0,1[$ et $b \in]1,+\infty[$ tels que $K \subset [a,b]$; il vient donc

$$\sup_{n\in K} x^{n-1} = x^{a-1}\chi_{]0,1[} + x^{b-1}\chi_{[1,+\infty[}(x).$$

Pour conclure, il suffit alors de vérifier directement que la fonction

$$\left(x^{a-1}\chi_{]0,1[}(x) + x^{b-1}\chi_{[1,+\infty[}(x)\right)\ \mathrm{e}^{-x}\left|\ln(x)\right|^k$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$.$\blacksquare$

Théorème 6.2.3 (propriété fondamentale) *On a*

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \forall n \in]0,+\infty[.$$

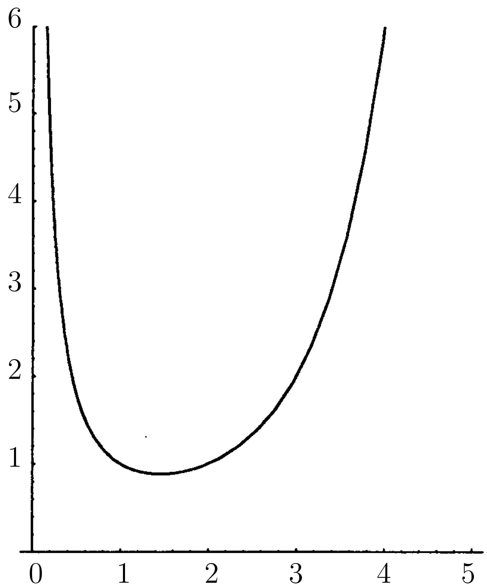
En particulier, pour tout entier $m \in \mathbb{N}_0$, *il vient*

$$\Gamma(m+1) = m! \quad \text{et} \quad \Gamma(m+1/2) = \frac{(2m)!}{2^{2m}\, m!}\sqrt{\pi}.$$

On dit que *la fonction* Γ *interpole de manière* $\mathcal{C}_\infty$ *les valeurs de* m!

Preuve. Cela résulte aussitôt du théorème d'intégration par parties car il vient successivement

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \, dx \;&=\; -\int_0^{+\infty} (\mathrm{De}^{-x})\, x^n \, dx \\ &= -\mathrm{e}^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{n-1} \, dx \;=\; n\Gamma(n). \blacksquare\end{aligned}$$



Proposition 6.2.4 *On a*

$$\lim_{n \to 0^+} n\Gamma(n) = 1 \quad \textit{donc} \quad \lim_{n \to 0^+} \Gamma(n) = +\infty. \blacksquare$$

Théorème 6.2.5 (Formule de Stirling) *On a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\Gamma(n)}{\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi / n}} = 1$$

donc bien sûr $\lim_{n \to +\infty} \Gamma(n) = +\infty$ *mais aussi, par exemple, les formules suivantes:*

a) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n^r \Gamma(n)} = 1, \quad \forall r > 0.$

b) $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{(m+p)!}{m!\,m^p} = 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0,$

c) **Formule de Wallis:** $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots(2m)}\sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

Preuve. Etablissons d'abord la formule de Stirling. Si nous effectuons le changement de variable linéaire $x = n + \sqrt{n}\,y$ dans le calcul de $\Gamma(n)$, il vient

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\mathrm{e}^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}y+n\ln(1+y/\sqrt{n})}\,dy.$$

La conclusion résulte alors du théorème de la convergence majorée:
a) pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty,\,n>y^2} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\,y+n\ln(1+y/\sqrt{n})} = \mathrm{e}^{-y^2/2}$$

car la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, car

$$\lim_{n\to+\infty,\,n>y^2} (-\sqrt{n}\,y + n\ln(1+y/\sqrt{n})) = \lim_{n\to+\infty,\,n>y^2} \frac{-y/\sqrt{n} + \ln(1+y/\sqrt{n})}{1/n}$$

est égal à

$$y^2 \lim_{t\to 0} \frac{-t+\ln(1+t)}{t^2}$$

si on pose $t = y/\sqrt{n}$ et car on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{-t+\ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{2t(1+t)} = -\frac{1}{2}$$

en recourant au théorème de l'Hospital,
b) de $\int t/(1+t)\,dt = t - \ln(1+t)$, on tire de suite

$$-\sqrt{n}\,y + n\ln(1+y/\sqrt{n}) = -n\int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t}\,dt$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $n > 0$. Cela étant, il vient

$$n\int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t}\,dt \geq n\int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+y/\sqrt{n}}\,dt = \frac{y^2}{2(1+y/\sqrt{n})}$$

pour tout $y > 0$ et

$$n\int_0^{y/\sqrt{n}} \frac{t}{1+t}\,dt \geq n\int_0^{y/\sqrt{n}} t\,dt = \frac{y^2}{2}$$

pour tout $y \in]-\sqrt{n}, 0[$. Cela étant, la majoration

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{n}y+n\ln(1+y/\sqrt{n})}\chi_{]-\sqrt{n},+\infty[}(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/2}\chi_{]-\infty,0[}(y) + \mathrm{e}^{-y^2/(2+2y/\sqrt{n})}\chi_{]0,+\infty[}(y)$$

a lieu sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$. Or cette dernière majorante est bien sûr une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

Cela étant,

a) résulte aussitôt de

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(n+r)}{n^r\Gamma(n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n-r}(n+r)^{n+r}\sqrt{2\pi/(n+r)}}{n^r\mathrm{e}^{-n}n^n\sqrt{2\pi/n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{r+n}\sqrt{\frac{n}{n+r}}\,\mathrm{e}^{-r} = 1.\end{aligned}$$

b) est direct mais résulte aussi de

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\Gamma(m+p+1)}{\Gamma(m+1)m^p} = \lim_{m\to+\infty} \frac{(m+1)^p\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1)m^p} = 1.$$

c) résulte aussitôt de

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots(2m)}\sqrt{m} &= \lim_{m\to+\infty} \frac{\Gamma(2m+1)\sqrt{m}}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)} \\ &= \lim_{m\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2m}(2m)^{2m}\sqrt{4\pi m}\sqrt{m}}{2^{2m}\mathrm{e}^{-2m}m^{2m}2\pi m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\blacksquare\end{aligned}$$

Théorème 6.2.6 (formule de Gauss) *Pour tous $n > 0$ et $m \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$m^{mn}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(n+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2}\sqrt{m}\,\Gamma(mn).$$

*En particulier, on a la **formule de duplication de Legendre**:*

$$\Gamma(n)\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\Gamma(2n), \quad \forall n > 0.$$

Preuve. Posons

$$V(m,n) = m^{mn-1/2}\,\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(n+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(mn)}.$$

On vérifie directement qu'on a alors $V(m,n+1) = V(m,n)$ pour tous $n > 0$ et $m \in \mathbb{N}_0$, donc $V(m,n+p) = V(m,n)$ pour tous $n > 0$ et m, $p \in \mathbb{N}_0$. Cela étant, $V(m,n)$ est successivement égal à

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\in\mathbb{N}_0}} V(m,n+p) &= \lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\in\mathbb{N}_0}} \frac{m^{m(n+p)-1/2}\Gamma(n+p)\cdots\Gamma(n+p+(m-1)/m)}{\Gamma(m(n+p))} \\
&\underset{(*)}{=} \lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\in\mathbb{N}_0}} \frac{m^{m(n+p)-1/2}\, n^p\,\Gamma(n)\cdots n^{p+(m-1)/m}\Gamma(n)}{(mn)^{mp}\,\Gamma(mn)} \\
&= \lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\in\mathbb{N}_0}} m^{mn-1/2} n^{(m-1)/2}\frac{(\Gamma(n))^m}{\Gamma(mn)} \\
&\underset{(**)}{=} \lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\in\mathbb{N}_0}} m^{mn-1/2}\frac{n^{(m-1)/2}\mathrm{e}^{-nm}n^{nm}(2\pi/n)^{m/2}}{\mathrm{e}^{-mn}(mn)^{mn}\sqrt{2\pi/(mn)}} \;=\; (2\pi)^{(m-1)/2}
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure (en $(*)$, on utilise la première formule de la propriété précédente; en $(**)$, on utilise la formule de Stirling).

La formule de duplication de Legendre n'est quant à elle qu'une autre écriture de la formule de Gauss pour $m = 2$.∎

6.3 La fonction "Beta" : B

Remarque. Pour tout $(m,n) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ *est une fonction intégrable sur* $]0,1[$. Cela résulte aussitôt des critères pratiques d'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition. La *fonction "Beta"* B est définie selon

$$B\colon]0,+\infty[\times]0,+\infty[; \quad (m,n) \mapsto \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

on dit aussi qu'il s'agit de la *deuxième intégrale eulérienne*.

Voici quelques propriétés marquantes de cette fonction.

Proposition 6.3.1 *Pour tout* $(m,n) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, *on a*

a) $B(m,n) > 0$,

b) $B(m,n) = B(n,m)$,

c) $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

Preuve. a) est trivial.

b) De fait, le changement de variable linéaire $y = 1 - x$ donne aussitôt

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = -\int_1^0 (1-y)^{m-1}y^{n-1}\,dy.$$

c) Comme les fonctions $\mathrm{e}^{-x}x^{m-1}$ et $\mathrm{e}^{-y}y^{n-1}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$, la fonction $\mathrm{e}^{-x-y}x^{m-1}y^{n-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et son intégrale vaut $\Gamma(m)\Gamma(n)$. On peut aussi évaluer cette intégrale en recourant au changement de variable

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \xi(1-\eta) \\ y &=& \xi\eta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \xi &=& x+y \\ \eta &=& y/(x+y) \end{array}\right.$$

régulier d'ordre infini entre $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et $]0,+\infty[\times]0,1[$. Il vient

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\xi^{m+n-1}\,d\xi \cdot \int_0^1 (1-\eta)^{m-1}\eta^{n-1}\,d\eta = \Gamma(m+n)\cdot B(m,n). \blacksquare$$

Remarque. La formule obtenue en c) permet d'avoir la valeur de $B(m,n)$ pour toutes les valeurs entières et demi-entières de m et n. Voici un autre cas où la valeur de $B(m,n)$ est connue.

Théorème 6.3.2 (formule d'Euler) *Pour tout* $\theta \in]0,1[$,

$$B(\theta, 1-\theta) = \Gamma(\theta)\cdot\Gamma(1-\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\theta\pi)}.$$

Preuve. La première égalité résulte de la formule c) de la Proposition précédente car on a $\Gamma(1) = 1$.

Pour obtenir la deuxième égalité, il suffit d'effectuer le changement de variable $x = y/(1+y)$ dans l'expression intégrale de $B(\theta, 1-\theta)$: il vient

$$\int_0^1 x^{\theta-1}(1-x)^{-\theta}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\theta-1}}{(1+y)^{\theta-1}}\frac{1}{(1+y)^{-\theta}}\frac{dy}{(1+y)^2}.$$

Pour conclure, établissons la troisième égalité. On prouve d'abord que

$$\mathrm{e}^{i\lambda\theta}\int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+\mathrm{e}^{i\lambda}x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+x}\,dx, \quad \forall \lambda \in]-\pi,\pi[.$$

Comme $\mathrm{e}^{i\lambda\theta}$ appartient à $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ et comme

a) on a $x^{\theta-1}/(1+\mathrm{e}^{i\lambda}x) \in \mathcal{C}_1(]-\pi,\pi[)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$,