LIÈGE université
Sciences

Année académique 2023-2024

MATH1009

Listes d'exercices pour les répétitions
Chimie (B1) et Géologie (B2)

Version 17 décembre 2023

Liste 1 : rappels et calcul matriciel

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Nombres complexes et résolution d'équations

Bien connaître la matière de Math2007 : à réviser si nécessaire.

II. Matrices et opérations

1. Qu'appelle-t-on une matrice ?
2. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
3. Etant donné une matrice A, définir
   (a) sa matrice conjuguée,
   (b) sa matrice transposée,
   (c) sa matrice adjointe.
4. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
   (a) addition de deux matrices du même type,
   (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
   (c) multiplication de deux matrices.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices II. 1(2-7) seront résolus par l'assistant.

I. Nombres complexes et résolution d'équations

1. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous.
$$z_1 = \frac{i+1}{i-1}, \qquad z_2 = \cos(2) + i\sin(2), \qquad z_3 = \frac{(i+2)^3}{2-i}.$$
2. Résoudre les équations suivantes
$$(1)\ z^2+9=0 \qquad (2)\ z^3=1 \qquad (3)\ z^2+z+1=0.$$

II. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices A, B, C données par
$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ 3/i & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1/(i+1) \\ -2i & i/2 \end{pmatrix}.$$
Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.
$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

2. Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1$, $\forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

3. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3\,\mathbb{1} = 0$.

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$

Liste 2 : calcul matriciel (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Déterminant et matrice inverse

1. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
2. Citer les propriétés liées aux déterminants.
3. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
4. Quelle est la forme de cette matrice ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(A - C - E) et 2(B - C) ainsi que II. (C - D) seront résolus par l'assistant.

I. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \sin^2(c) & \cos^2(c) \end{pmatrix} \ (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

II. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Liste 3 : calcul matriciel (3)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Diagonalisation et matrices stochastiques

1. Etant donné une matrice carrée A,
   (a) qu'appelle-t-on valeur propre de A ?
   (b) qu'appelle-t-on vecteur propre de A ?
2. En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
3. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
4. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
6. Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?
7. Qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(C) et II. 1 seront résolus par l'assistant.

I. Diagonalisation

1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

3. Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?

II. Divers

1. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

   Sachant cela,
   (a) Représenter la matrice de transition de ce système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?
   (c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?

2. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?
   (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

3. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type
   $$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
   — Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.
   — Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?
   — Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice
   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   est aussi une matrice qui représente une rotation.

4. Vrai ou faux (Justifier)
   (a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) La matrice $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ est inversible.
   (c) Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.
   (d) Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.
   (e) Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5 \det A$.
   (f) Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors $\det B = 5 \det A$.

Liste 4 : fonctions de plusieurs variables (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions et représentations graphiques

Qu'appelle-t-on

1. domaine de définition d'une fonction de 2 variables ?
2. courbe de niveau d'une fonction de 2 variables ?
3. surface quadrique ? Quelles sont les différentes quadriques ?

II. Dérivation et gradient

1. Quand dit-on qu'une fonction de 2 variables est dérivable par rapport à sa première (resp. deuxième) variable en un point de coordonnées (x_0, y_0) d'un ouvert où elle est définie ?
2. Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de deux variables ?
3. Définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

Préambule

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi, par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si x, y, z sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où p est la pression du gaz (en pascal), V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube), n est la quantité de matière (en mole), R est la constante universelle des gaz parfaits et T est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...

Les exemples sont nombreux et la bonne manipulation (expression d'une variable ou d'un paramètre en fonction des autres, dérivation, intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, ...)

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(g) - 2(b) ainsi que II. 2(h) - 5(c) - 8 et 10 seront résolus par l'assistant.

I. Définitions et représentations graphiques

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{2x-y}, \quad h(x,y) = \arcos(xy).$$

2. Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$

3. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci.
a) Quelle est la nature de la surface quadrique d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$?
b) Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2-4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?

4. Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b)x^2 + y^2 = 4.$$

II. Dérivation et gradient

1. En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

2. On donne les fonctions f, g et h par

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \text{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-x/y}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

4. a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

5. On donne les fonctions f et g respectivement par

$$f(x,y) = \arcsin(y/x) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x+y^2+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f(1/t, t)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

6. On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y)),\ (x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

7. On considère la fonction $f_r(x,y) = x^r e^{-y/x},\ r$ étant un réel.
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Déterminer le réel r tel que $D_x f_r(x,y) = yD_y^2 f_r(x,y) + D_y f_r(x,y),\ (x,y) \in B$.

8. On donne la fonction $f(x,y) = \sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - (a^2/b^2)D_y^2 f = 0$.

9. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :
a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
b) $T(x,y) = \arctan(y/x)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$
Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\pi/4$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

10. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \text{arcos}(1-2xy).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) - yD_y f(x,y)$$

11. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \ln(x^2-y^2) - \ln(y).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$$

Liste 5 : fonctions de plusieurs variables (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Dérivation des fonctions composées

1. Qu'appelle-t-on fonction composée ?
2. Quel est l'énoncé du théorème donnant les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?

II. Description d'ensembles

Revoir les exemples du cours.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(a) - 4 et 5(a) ainsi que II. 1(a) - 4(a) et 6(A) seront résolus par l'assistant.

I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.
   b) Même question pour g, fonction continûment dérivable sur$]0,1[\times]\ln(\pi/3), +\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\arcos(y)))$.

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\pi/2, \pi/6[\times]0,+\infty[\times]0,10/9[$.
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), 1/\sqrt{t+1}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $1/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\pi/6, \pi/3[\times]\sqrt{2}, +\infty[\times]0,3[$.

3. Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_1f)(2,7) = 6$ et $(D_2f)(2,7) = -8$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 3, que vaut (DF)(3) ?

4. Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en$(1,0)$ si
$$u(1,0) = 2 \quad (D_su)(1,0) = -2 \quad (D_tu)(1,0) = 6$$
$$v(1,0) = 3 \quad (D_sv)(1,0) = 5 \quad (D_tv)(1,0) = 4$$
   et $(D_uf)(2,3) = -1$ et $(D_vf)(2,3) = 10$, calculer $(D_sF)(1,0)$ et $(D_tF)(1,0)$.

5. (a) Soient
$$f \in C_1(]0,1[\times]-\infty,0[) \quad \text{et} \quad F(t) = f\left(\ln\left(\frac{t-1}{2}\right), t^2+t-6\right).$$
Où la fonction F est-elle dérivable ?
Quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f ?
(b) Même question pour
$$f \in C_1(]0,+\infty[\times]0,+\infty[) \quad \text{et} \quad F(x) = f(e^{-x}-1, \ln(5-x^2)).$$

6. On donne la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ définie et 2 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$ ($r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$) et on considère $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
Montrer que $\quad (D_x f)^2 + (D_y f)^2 = (D_r F)^2 + \dfrac{1}{r^2}(D_\theta F)^2$

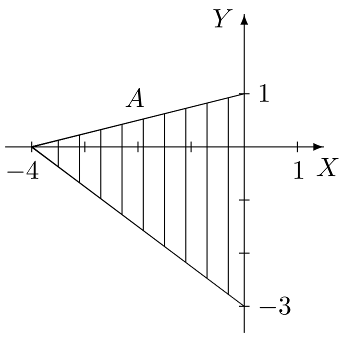
Remarque : le premier membre est pris au point de coordonnées $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et le second en (r,θ).

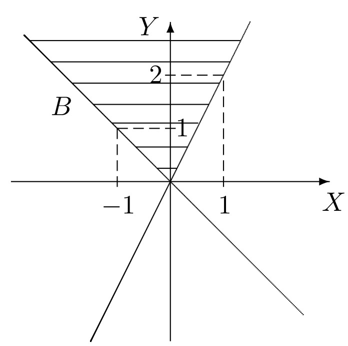
II. Représentation d'ensembles

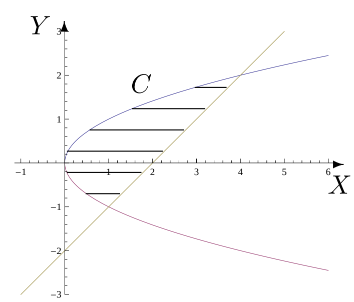
1. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est la suivante

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$
b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ 0 \le y \le x^2\}$
c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge y,\ y \in [0,1]\}$

2. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans l'ensemble, en donnant d'abord
a) l'ensemble de variation des abscisses
b) l'ensemble de variation des ordonnées.



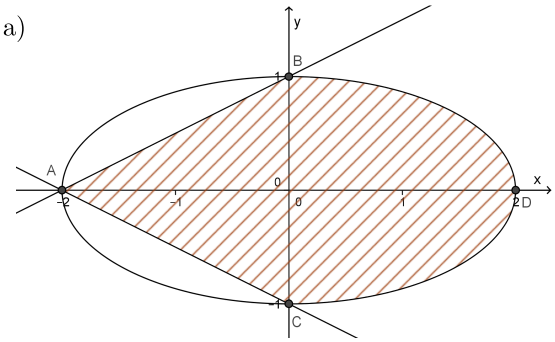




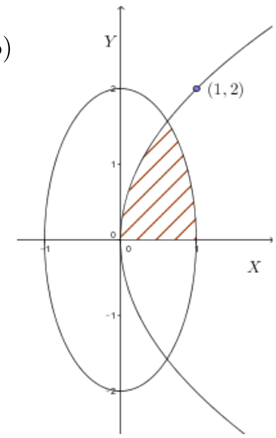
3. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B si
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ x-2 \le y \le 2,\ x^2+y^2 \ge 4\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 1,\ \frac{1}{x} \le y \le \sqrt{x}\}.$$
Pour chacun de ces 2 ensembles,
a) déterminer leur ensemble X (respectivement Y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées)
b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans X (resp. Y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points
c) donner 2 descriptions analytiques en se servant des 2 items précédents.

4. Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.

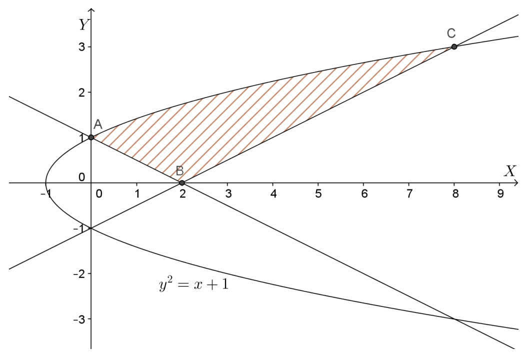
a)



b)



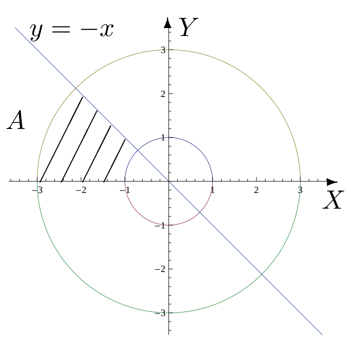
c)

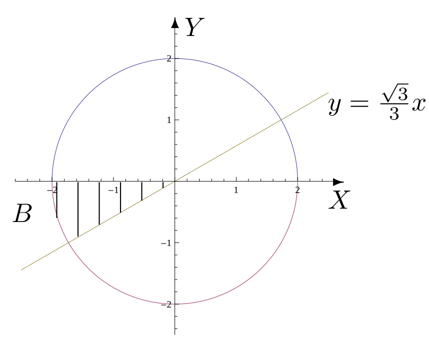


5. On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \sin(2x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$

6. En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.





7. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.

Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (3)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Permutation de l'ordre d'intégration

Qu'appelle-t-on « permutation de l'ordre d'intégration » dans le calcul des intégrales doubles ? Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du resultat si on intègre sur un ensemble fermé borné ?

II. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Quand une fonction de 2 variables est-elle intégrable sur un ensemble fermé borné ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1(a), II. 2(b) et 3(b) seront résolus par l'assistant.

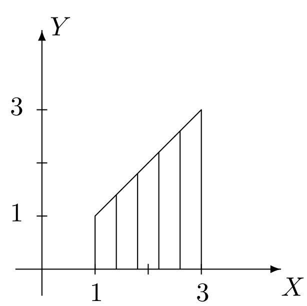
I. Permutation de l'ordre d'intégration

1. Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx \right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3} \left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

2. On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy.$$



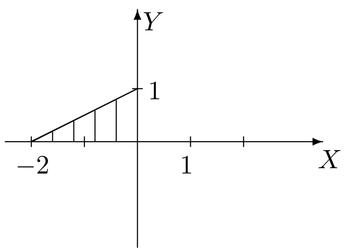
II. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x+y=0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x\cos(y)$.

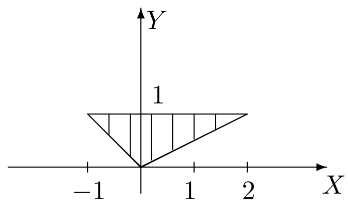
2. Si elle existe, calculer l'intégrale de
   a) $f(x,y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [1+x^2, 9-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$
   c) $f(x,y) = y^2\cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1,1]$

3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

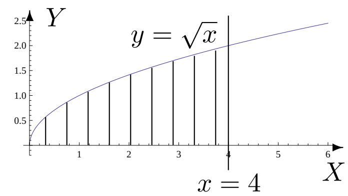
a) $\iint_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\iint_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\iint_A \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\ dx\,dy$



4. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \cos(\sqrt{x^3})\ dx \right)\ dy.$
Représenter l'ensemble d'intégration et calculer l'intégrale si c'est possible.

Liste 7 : fonctions de plusieurs variables (4)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné parallèle à l'axe Y, quand dit-on qu'elle est intégrable sur A ? Comment définit-on alors son intégrale ?
2. Même question si l'ensemble A est parallèle à l'axe X.
3. Si une fonction est continue sur un ensemble A non fermé borné, quand peut-on permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 2(b) et 4 seront résolus par l'assistant.

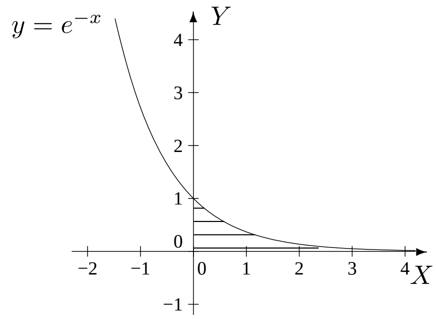
I. Intégration sur des ensembles non fermés bornés

1. Si elles ont un sens, calculer les intégrales suivantes et représenter l'ensemble d'intégration.
   a) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x}\,dx\,dy \quad \text{avec} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \tfrac{1}{x}\}$
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left(\int_0^{+\infty} e^{y-3x}\,dx \right) dy$
   c) $\displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy \quad \text{avec} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$
   d) $\displaystyle\iint_A x^3\,e^{-x^2 y}\,dx\,dy \quad \text{avec} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 1 \leq xy\}$

2. Déterminer si les intégrales suivantes existent ; si oui, les calculer. Représenter géométriquement l'ensemble d'intégration dans chaque cas.
$$a) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{y^2} \frac{ye^{-y^2}}{x+y^2}\,dx \right) dy, \quad b) \int_0^1 \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}\,dy \right) dx, \quad c) \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\,dy \right) dx$$

3. On considère l'intégrale double suivante
$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x \cos(y-x)e^{-x}\,dy \right) dx$$
   a) Permuter l'ordre d'intégration et représenter l'ensemble d'intégration dans un repère orthonormé.
   b) Si elle existe, déterminer la valeur de cette succession d'intégrales dans un ordre et dans l'autre.
   c) Trouve-t-on la même valeur quel que soit l'ordre d'intégration ? Pouvait-on le prévoir sans calculer les 2 intégrales ?

4. Calculer l'intégrale de $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x - y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



Liste 8 : fonctions de plusieurs variables (5)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Intégration par changement de variables polaires

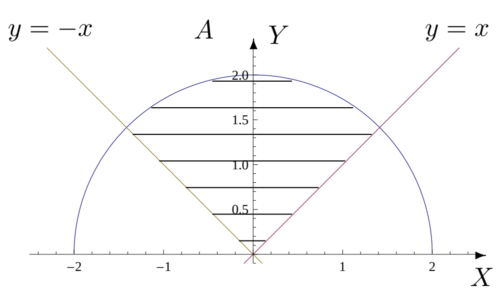
1. Que vaut le jacobien dans le cas d'un changement de variables polaires ?
2. Donner la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.

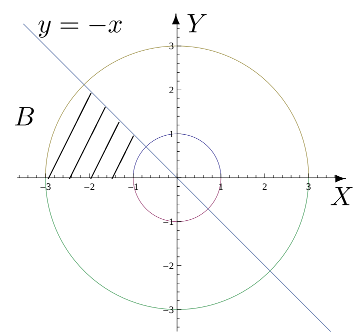
A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, l'exercice I. 1(b) sera résolu par l'assistant.

I. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer
   a) $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   b) $\iint_B xy\, dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   c) $\iint_C (2x+y)\, dx\, dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.





2. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où
$$x_A = s^{-1}\iint_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1}\iint_A y\ dx\ dy$$
et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

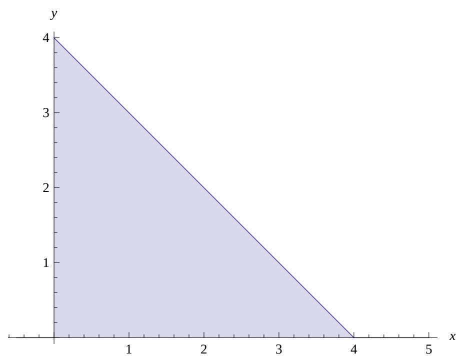
II. Divers

La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \iint_R \delta(x, y) dx dy,$$

où $\delta(x, y)$ est la densité au point de coordonnées (x, y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent 4 m. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypoténuse [1], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,

a) quelle est la masse de cette plaque ?
b) en quelles unités s'exprime la constante K ?



1. c'est-à-dire $\delta(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)

Liste 9 : révisions en vue de l'interrogation du 9 avril 2024

Liste à déterminer en fonction de la matière prévue pour l'interrogation

Liste 10 : révisions en vue de l'interrogation du 9 avril 2024

Liste à déterminer en fonction de la matière prévue pour l'interrogation

Liste 11 : correction de l'interrogation du 9 avril 2024

Liste 12 : approximations polynomiales

A preparer AVANT de venir à la répétition

I. Approximations polynomiales

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
3. (a) Enoncer le résultat appelé "Développement limité de Taylor".
   (b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.

Préambule

*****

A quoi peuvent servir ces approximations ?

*****

Le *théorème des accroissements finis* pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ s'exprime de la manière suivante : quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir de sa valeur en a suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(\xi).$$

Ceci peut s'interpréter en disant que l'erreur commise en approchant la valeur de f en x par sa valeur en a est proportionnelle à l'écart entre les deux points (a et x) et à la dérivée de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Lorsque la fonction est plus régulière, ce résultat peut être étendu de la manière suivante (*c'est ce que l'on appelle le développement limité de Taylor*). Si f est p fois dérivable dans I, alors quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir des valeurs en a de ses $p-1$ premières dérivées suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x-a)Df(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi).$$

La fonction P définie par

$$P(t) = f(a) + (t-a)Df(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a), \quad t \in \mathbb{R}$$

est un polynôme de degré au plus $p-1$ en la variable t. Le développement limité de Taylor ci-dessus s'écrit ainsi

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi)$$

et nous dit que la valeur de f en x est approchée par la valeur en x de ce polynôme, l'erreur commise étant proportionnelle à l'écart entre la p^e puissance de l'écart entre a et x et à la dérivée d'ordre p de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Si a est fixé et que la dérivée d'ordre p de f est continue en a, alors on en déduit que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Ceci exprime de façon précise la manière dont le polynôme approche la fonction au voisinage de a. Voir cours pour plus de détails.

Ce genre de résultat est très utile quand il s'agit d'obtenir une estimation de grandeurs physiques.

Ainsi par exemple, la force de marée agissant sur une masse m peut être définie comme la différence de l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et de l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par R le rayon terrestre, d la distance[2] Terre-Lune, G la constante de gravité, M la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport R/d est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force F est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

Exercice après lecture du préambule

Expliquer pourquoi une approximation de F est donnée par l'expression précédente.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I. 1 ($f_2,\ f_3,\ f_5$) - 2 (b) - 3 seront résolus par l'assistant.

I. Approximations polynomiales

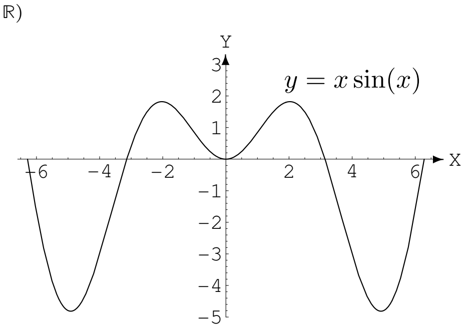
1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations. Pour f_5,
   a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   b) indiquer où se situe le graphique de f_5 au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

   $f_1(x) = \cos(x)\, e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$

   $f_3(x) = \dfrac{1}{1-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0, 1, 2$

   $f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

2. a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
   b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1, 2 et 3 de la fonction $f(x) = x\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.
   (Suggestion : $|\sin(x)| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$)



2. entre les centres respectifs

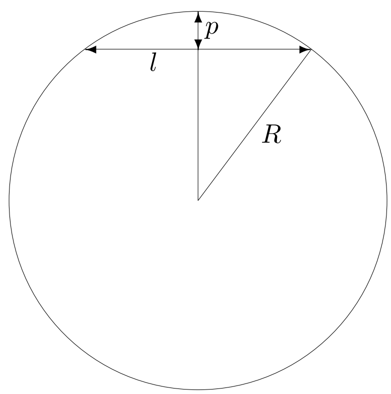
3. Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...

   Comment peuvent-ils procéder ?

4. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par [3]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right), \quad g_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2+x-1}.$$

5. Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale p de ce tunnel.



3. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ pour g_1 et décomposer en fractions simples pour g_2

Liste 13 : développements en séries de puissances

A préparer AVANT de venir à la répétition

Définitions et propriétés

1. Qu'appelle-t-on série de puissances ?
2. Quand une série de puissances converge-t-elle
   a) dans un intervalle ?
   b) en tout réel ?
3. Quand et où une série de puissances est-elle dérivable ? Dans ce cas, qu'appelle-t-on dérivation « terme à terme » ?

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices 2 (f_1, f_7 et f_8) seront résolus par l'assistant.

Développements en série de puissances

1. Si possible, développer les fonctions suivantes (données explicitement) en série de puissances de x au voisinage de 0
$$f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad f_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$
2. Déterminer le développement en série de puissances de x des fonctions suivantes

$f_1(x) = x^3 \exp(-x),\ x \in \mathbb{R}$ $\qquad f_2(x) = \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$ $\qquad f_3(x) = \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$ [4]

$f_4(x) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$ $\qquad f_5(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$ $\qquad f_6(x) = \ln(1+x),\ x \in]-1,1[$

$f_7(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right),\ x \in]-1,1[$ $\qquad f_8(x) = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$

4. Les fonctions ch et sh sont appelées respectivement cosinus et sinus hyperboliques

Liste 14 : Mathématiques appliquées

Préambule

Les exercices de cette liste montrent des applications de notions mathématiques étudiées dans le cadre du cours de Mathématiques générales. Ces applications relèvent de la physique, de la biologie, du calcul des probabilités, de la géographie et même de la cryptographie.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Fonctions de plusieurs variables

1. En thermodynamique, il existe essentiellement 3 types d'équilibres macroscopiques : l'équilibre thermique, l'équilibre mécanique et l'équilibre osmotique (mélange homogène [5]). Dès lors, par définition, un *équilibre thermodynamique* est atteint lorsque ces 3 équilibres sont réunis.
   Selon le premier postulat de la thermodynamique, *l'équilibre thermodynamique d'un système physique se définit à l'aide de 3 paramètres : l'énergie interne U, le volume V et le nombre de particules N du système.*
   Le second postulat stipule qu'*il existe une fonction S, dépendant de U, V et N, qui est maximale à l'équilibre thermodynamique.* Cette fonction est appelée *entropie* du système et la connaître, c'est connaître l'ensemble du système. Cette fonction permet de plus de déterminer les *équations d'état* qui régissent le système : ces dernières font intervenir les dérivées partielles de S et sont données par
$$D_U S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \qquad D_V S = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \qquad D_N S = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = \frac{-\mu}{T}$$
   où
   — T est la température du système ;
   — p est la pression du système ;
   — μ est le potentiel chimique du système (qui renseigne sur l'équilibre osmotique d'un système [6]) ;
   et où les variables indicées sont considérées comme constantes.

   Sachant que l'entropie du *gaz de Van Der Waals* (archétype des gaz réels), est donnée par
$$S = k_B N \ln\left(\frac{V - Nv_0}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{U + \frac{K_i N^2}{V}}{N}\right) + \frac{3k_B N}{2} \ln\left(\frac{4\pi m}{3\hbar^2}\right) + \frac{5}{2} k_B N$$
   où
   — k_B est la constante de Boltzmann et vaut approximativement $1,38.10^{-23} J/K$,
   — v_0 est le volume occupé par une particule et dans lequel les autres particules ne peuvent pénétrer,
   — $K_i > 0$ est le paramètre d'interaction entre les particules,
   — m est la masse d'une particule,
   — $\hbar$ est la constante de Planck et vaut $6,626.10^{-34} J.s$,
   déterminer les équations d'état d'un tel gaz lorsque le nombre de particules N est constant et, à partir de la première équation d'état, exprimer l'énergie interne U en fonction de V, N et T.

5. Par exemple, si on jette une goutte d'encre dans un verre d'eau, l'encre va “diffuser” dans le liquide et l'équilibre est atteint lorsque l'encre est mélangée de façon homogène avec l'eau.

6. De manière générale, si deux substances de potentiels chimiques respectifs μ_1, μ_2 sont mises en présence l'une de l'autre, l'équilibre thermodynamique est atteint lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

2. La pression P (en kPa), le volume V (en l) et la température T (en K) d'une mole d'un gaz parfait sont liés par l'équation[7] :

$$PV = 8,31\,T.$$

Sachant que, lors d'une mesure à l'instant t, la température d'un tel gaz, qui est de $300K$, augmente à la vitesse de $0,1K/s$ et que son volume, qui est de $100\,l$, augmente à raison de $0,2\,l/s$, déterminer la vitesse de variation de la pression de ce gaz.

3. La recherche des extrema d'une fonction à une seule variable est relativement aisée : il suffit de rechercher les valeurs en lesquelles la dérivée de cette fonction s'annule et de voir s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion. Cette recherche s'avère plus délicate pour une fonction de plusieurs variables. Cependant, pour une fonction de 2 variables, nous disposons du test suivant, appelé *test des dérivées partielles* :

> Soient A une partie de $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \in A$ et $f:\,(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction 2 fois continûment dérivable sur A telle que
>
> $$(D_x f)(a,b) = (D_y f)(a,b) = 0.$$
>
> Posons
>
> $$D = (D_x^2 f)(a,b)(D_y^2 f)(a,b) - [(D_x D_y f)(a,b)]^2.$$
>
> (a) Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) > 0$ alors $f(a,b)$ est un minimum local de f ;
>
> (b) Si $D > 0$ et si $(D_x^2 f)(a,b) < 0$ alors $f(a,b)$ est un maximum local de f ;
>
> (c) Si $D < 0$ alors $f(a,b)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local de f ; (a,b) est appelé "point-selle" ;
>
> (d) Si $D = 0$ alors le test n'est pas concluant.

En se basant sur ce test,

a) rechercher les extrema ainsi que les points-selles de la fonction

$$f:\,(x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

b) déterminer la distance[8] (c.-à-d. la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1,0,-2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.

4. Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x,y)$ en un point(x,y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par

$$Q = \iint_R \rho(x,y)\,dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x,y) est donnée par $\rho(x,y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.

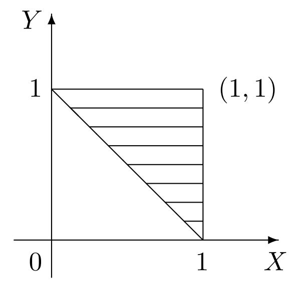
---

7. Cette équation est l'une des équations d'état d'un gaz parfait, obtenue par dérivation partielle de l'entropie d'un tel gaz (cf. exercice précédent).

8. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) est donnée par

$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.



5. En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$, de la manière suivante.
   Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut
   $$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$
   Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par
   $$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$
   On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

   Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
   a) le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre ;
   b) le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.

6. Dans certains contextes, le calcul de probabilités peut se ramener à du calcul intégral. En effet, lorsque l'on modélise une quantité X à l'aide d'une fonction de densité $x \mapsto f_X(x)$ positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1, la probabilité que cette quantité soit supérieure (resp. inférieure) à une valeur $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) est donnée par
   $$\mathbb{P}[X > a] = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx \quad \left(\text{resp. } \mathbb{P}[X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx\right).$$
   De plus, si l'on s'intéresse à une autre quantité Y que l'on désire étudier conjointement avec X, ces deux quantités peuvent être modélisées simultanément à l'aide d'une fonction de densité jointe $(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y)$ positive et intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et telle que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\right) dy = 1,$$
   auquel cas la probabilité que $(X, Y) \in R$ (R partie de $\mathbb{R}^2$) est donnée par
   $$\mathbb{P}[(X, Y) \in R] = \iint_R f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy.$$

   Le patron d'une fabrique de batteries destinées aux appareils électroniques tels que les GSM, les MP-3, etc... s'intéresse à la longévité de ses produits et décide d'étudier conjointement le nombre maximal (qu'il note X), ainsi que le nombre minimal (qu'il note Y), d'années de fonctionnement de ces derniers. Après bien des calculs, il arrive à la conclusion que la fonction de densité jointe de X et Y est de la forme

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Déterminer la constante C pour que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité jointe.
(b) Calculer la probabilité qu'une batterie fonctionne au plus 7 ans mais au moins 2 ans.

7. Deux variables aléatoires X et Y, modélisées respectivement par les fonctions de densité f_X et f_Y, sont dites indépendantes lorsque leur fonction de densité jointe vaut le produit de leurs fonctions de densité respectives, c.-à-d.
$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$
En outre, un temps d'attente T est modélisé par une fonction de densité de la forme
$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{\frac{-t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
où $\mu > 0$ est le temps d'attente moyen.

Le directeur d'un cinéma constate que le temps d'attente moyen pour obtenir un ticket est de 10 minutes, et celui pour obtenir une boisson fraîche de 5 minutes. En supposant que ces temps d'attente sont indépendants, calculer la probabilité qu'un spectateur attende au total moins de 20 minutes avant de prendre place en ayant son ticket et une boisson.

Calcul matriciel

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :
$$\begin{cases} Dx(t) &= -4x(t) - 3y(t) + 5t \\ Dy(t) &= -2x(t) - 5y(t) + 5e^t \end{cases}.$$
Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

2. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :
$$\begin{cases} Dx(t) &= x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) &= 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) &= -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}.$$
Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

3. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
   - étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;
   - étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;
   - étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.

   Déterminer
   a) la matrice de transition du système ;
   b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;
   c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

4. Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :

- étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;
- étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
- étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
- si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.

Déterminer la matrice de transition du système.

5. La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.
Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, ..., Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

S	U	I	S	*	E	N	*	D	A	N	G	E	R
19	21	9	19	27	5	14	27	4	1	14	7	5	18.

Puisqu'on emploie une matrice 2×2, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs [9] 1×2 :

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par C, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

9. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des "27", ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

19	21	9	19	27	5	14	27	4	1	14	7	5	18
S	U	I	S	*	E	N	*	D	A	N	G	E	R.

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$$

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

Approximations polynomiales

La vitesse v d'une vague est liée à sa longueur d'onde λ et à la profondeur h de l'eau (exprimées en mètres) par l'expression

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right),$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

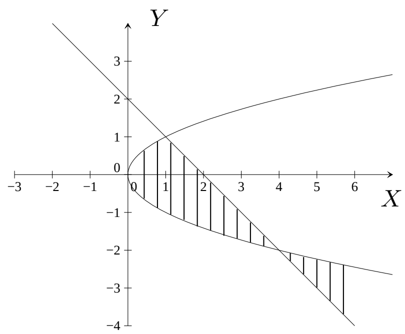
— Sachant que th : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.

— Grâce à cette approximation, en sachant que la vague qui a ravagé le Japon en 2011 avait une longueur d'onde de 5 km, à combien peut-on estimer la vitesse du tsunami lors de son arrivée près des côtes (on suppose alors que la profondeur de l'eau est de 2 m) ?

LISTE 15 : RÉVISIONS EN VUE DE L'EXAMEN

Description d'ensemble

Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant (les courbes représentées sont une droite et une parabole) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.



Fonctions de plusieurs variables

1. On donne la fonction $f : (x, y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$.

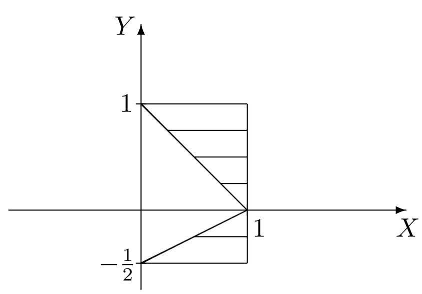
   a) Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
   b) Déterminer les dérivées partielles de cette fonction et, si possible, les évaluer au point de coordonnées $(-2, 1)$.

2. Soit f une fonction continûment dérivable sur $]-2,1[\times]-4,4[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+y^2, x^2+4y^2)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression des dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

3. Si elles existent, calculer les intégrales suivantes

   a) $I = \displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 x\sin(y^5)\,dy\right)\,dx$

   b) $I = \displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy$ si A est l'ensemble fermé borné hachuré ci-dessous



   c) $I = \displaystyle\iint_A \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}}\,dx\,dy$ si $A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$

d) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^2 \frac{e^{-(y+1)x}}{4+y^2}\, dy \right) dx$

Calcul matriciel

1. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de la matrice suivante puis montrer que la matrice trouvée est bien l'inverse de la matrice donnée si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice suivante. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si elle l'est, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit puis prouver que les matrices données sont correctes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.
   - Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
   - S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
   - Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
   (i) Déterminer la matrice de transition.
   (ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.

Approximations polynomiales

Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0$, 1, 2 et 3 en $x_0 = 0$ pour la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Représenter f et ses approximations.

Développement en série de puissances

Déterminer le développement en série de puissances de x la fonction $f : x \mapsto 1/(1 + x^2)$.

Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...

Comment peuvent-ils procéder ?

L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\, x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x.

Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\, x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Si $x = 1$, l'inégalité

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6\ (7! = 5040).$$

Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

$$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$