1, 2, 3. . . Sciences

Année académique 2017-2018

Mathématiques générales : partim B'

Répétition 3*

Physique

Version 19 avril 2018

Répétition 3* : intégrales paramétriques, analyse vectorielle et opérateurs de dérivation

A propos de cette liste

Les fonctions vectorielles, qui à un réel ou à un n-uple de réels (point ou vecteur) associe un vecteur, sont beaucoup utilisées en physique afin de modéliser des champs vectoriels, comme par exemple un champ de vitesse. Les concepts vus dans le cadre des fonctions à valeurs réelles (continuité, limites, dérivation...) s'étendent aux fonctions vectorielles, et constituent ainsi ce que l'on appelle l'analyse vectorielle.

Les valeurs de ce type de fonctions étant des vecteurs, de nouveaux concepts apparaissent, notamment les opérateurs de dérivation que sont le gradient, la divergence et le rotationnel.
Ces derniers sont couramment utilisés en physique pour avoir des informations sur les champs scalaires ou vectoriels : le gradient informe sur la direction du plus grand taux de variation d'un champ scalaire alors que la divergence et le rotationnel se complémentent pour apporter des informations sur le comportement d'un champ vectoriel.

La signification physique de la divergence et du rotationnel apparaît clairement lorsque l'on considère par exemple le champ vectoriel $\vec{v}(x, y, z)$ représentant la vitesse d'un fluide en chacun des points de l'espace.
Dans ce cas, la divergence de $\vec{v}$ est égale au flux net de fluide s'écoulant, par unité de temps et de volume, vers l'extérieur d'un élément de volume dont la mesure tend vers 0, c'est-à-dire *divergeant* de cet élément de volume. Elle est donc généralement associée à la présence de source ou de puits pour le champ considéré.
Le rotationnel de $\vec{v}$ représente quant à lui une mesure de la vitesse angulaire de *rotation* du fluide au voisinage du point (x, y, z) : si on place une petite hélice dans l'écoulement, celle-ci se mettra à tourner dans les zones où le rotationnel est non nul et ne subira aucune rotation dans celles où il s'annule.

A résoudre PENDANT la répétition (et à achever à domicile si nécessaire)

Lors de la répétition, les exercices I.(2.(b)), II.(1.(a) ; 3), III.(1(b), 2(a)-(b), 4-oralement) seront résolus par l'assistant.

I. Dérivation des intégrales paramétriques

1. Soient un réel a et une fonction f telle que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.
   Montrer que la fonction
   $$x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$
   est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que, dans cet intervalle, on a
   $$DF(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\, dt.$$

2. Sachant qu'elles sont définies [1], calculer les intégrales suivantes.
   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, e^{-x}\, dx \quad (a, b \in \mathbb{R})$
   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\, dx \quad (a,\ b > 0)$

1. Vérifier l'intégrabilité de chacune des fonctions sur le domaine considéré constitue un bon exercice ! !

3. Soit
$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\, dx, \quad t > -1.$$
   (a) Montrer que cette fonction est bien définie et est continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$.
   (b) Calculer $F(0)$.
   (c) Montrer que $DF(t) = \dfrac{1}{t+1}$.
   (d) En déduire l'expression explicite (pas sous forme d'intégrale) de F.

II. Manipulations (algébrique et géométrique) et dérivation

1. Soient $\vec{F}$, $\vec{G}$ des fonctions vectorielles en la variable réelle u et soit ϕ une fonction scalaire de la variable réelle u. On suppose que ces fonctions sont dérivables dans le même intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Dans cet intervalle,
   (a) établir la formule
$$D\left(\vec{F} \bullet \vec{G}\right) = \left(D\vec{F}\right) \bullet \vec{G} + \vec{F} \bullet \left(D\vec{G}\right)$$
   et en déduire qu'un vecteur de norme constante est orthogonal à sa dérivée ;
   (b) établir la formule
$$D\left(\phi\, \vec{F}\right) = \phi\, D\vec{F} + (D\phi)\ \vec{F}.$$

2. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On définit la fonction vectorielle $\vec{R}$ par
$$\vec{R}(t) = \cos(t)\ \vec{e}_1 + \sin(t)\ \vec{e}_2 + t\ \vec{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Déterminer
$$(i)\ D\vec{R}, \quad (ii)\ D^2\vec{R}, \quad (iii)\ \left\|D\vec{R}\right\|, \quad (iv)\ D\vec{R} \wedge D^2\vec{R}.$$
   (b) Esquisser la courbe décrite par l'extrémité P du vecteur lié
$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{R}(t), \quad t \geq 0$$
   et représenter le vecteur tangent à la courbe aux points de paramètre $t = \dfrac{\pi}{4}$ et $t = \dfrac{\pi}{2}$.

3. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle
$$\vec{F}(u, v) = u \sin(v)\ \vec{e}_1 + v \cos(u)\ \vec{e}_2 + u\ \vec{e}_3, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$
   Déterminer l'expression explicite des fonctions suivantes (à valeurs scalaires ou vectorielles)
$$\text{(a) } D_u\vec{F} \bullet D_v\vec{F}, \quad \text{(b) } D_u\vec{F} \wedge D_v\vec{F}.$$

4. On désigne par $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. Une particule se déplace de telle sorte que, à l'instant t, son vecteur position $\vec{r}$ est donné par
$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\ \vec{e}_1 + \sin(\omega t)\ \vec{e}_2$$
   oú $t \in \mathbb{R}$ et ω désigne une constante.
   (a) Montrer que, à tout instant, la vitesse $\vec{v}$ de la particule est orthogonale à son vecteur position.
   (b) Montrer que, à tout instant, l'accélération de la particule est dirigée vers l'origine et a une norme proportionnelle à sa distance à l'origine.
   (c) Montrer que la fonction vectorielle $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant.
   (d) Interpréter géométriquement les résultats.

III. Gradient, divergence, rotationnel

1. On donne les fonctions vectorielle et scalaire suivantes

$$\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z), \quad r(x,y,z) = \|\vec{r}(x,y,z)\|$$

   et le vecteur constant $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Déterminer
   (a) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{r}$
   (b) le gradient de la fonction scalaire $\frac{1}{r}$
   (c) le gradient de la fonction scalaire $\vec{r} \bullet \vec{r}$
   (d) le gradient de la divergence des fonctions vectorielles $\vec{r}$ et $r\,\vec{r}$
   (e) le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{a} \wedge \vec{r}$
   (f) le gradient de la fonction scalaire $\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|$

2. Soient les champs vectoriels

$$\vec{f}(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{g}(x,y) = -\frac{1}{2}y\vec{e}_1 + \frac{1}{2}x\vec{e}_2$$

   représentés sur les figures ci-dessous.

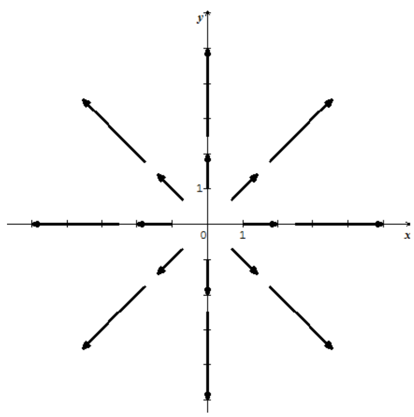

FIGURE 1 – Champ vectoriel $\vec{f}$

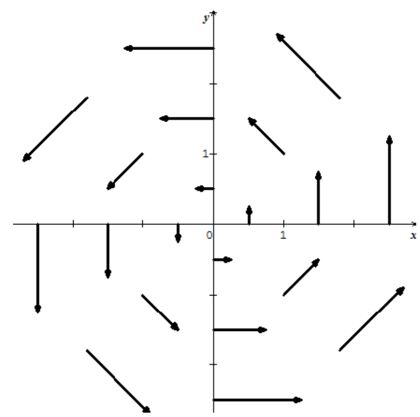

FIGURE 2 – Champ vectoriel $\vec{g}$

   (a) Calculer la divergence du champ $\vec{f}$ et interpréter le résultat obtenu sur base de sa représentation (FIG. 1).
   (b) Calculer le rotationnel du champ $\vec{f}$ et interpréter le résultat obtenu sur base de sa représentation (FIG. 1).
   (c) Mêmes questions pour le champ $\vec{g}$ et sa représentation (FIG. 2).

3. Sur les exemples suivants, vérifier que le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire régulière est nul et que la divergence du rotationnel d'une fonction vectorielle régulière est nulle.
   (a) $H(x,y,z) = \cos(xyz)$ (b) $\vec{f}(x,y,z) = \left(x^2y,\ x^2z^4,\ e^{xyz}\right)$

4. Les opérations suivantes ont-elles un sens ?
   Si oui, définissent-elles une fonction scalaire ou une fonction vectorielle ?
   (a) Gradient de la divergence d'une fonction vectorielle
   (b) Gradient de la divergence d'une fonction scalaire
   (c) Divergence du gradient d'une fonction scalaire
   (d) Divergence du gradient d'une fonction vectorielle

(e) Divergence de la divergence d'une fonction scalaire

(f) Rotationnel de la divergence d'une fonction vectorielle

5. Soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ (resp. ϕ et ψ) deux fonctions vectorielles (resp. scalaires).
Démontrer les relations suivantes :
(a) $\vec{\nabla}(\phi + \psi) = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\psi$ (c) $\vec{\nabla} \bullet (\vec{f} + \vec{g}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{f} + \vec{\nabla} \bullet \vec{g}$
(b) $\vec{\nabla} \wedge (\vec{f} + \vec{g}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} + \vec{\nabla} \wedge \vec{g}$ (d) $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$
où $\boxed{\vec{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi}$ dénote le gradient, $\boxed{\vec{\nabla} \bullet \vec{f} = \text{div}\vec{f}}$ la divergence, et $\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \text{rot}\vec{f}}$ le rotationnel.

IV. Divers

1. La température en chacun des points du plan est donnée par $T(x, y) = x^2 - 2y^2$.
(a) Dans quelle direction une fourmi initialement située en $(2, -1)$ doit-elle se déplacer pour se rafraîchir le plus rapidement possible ?
(b) Si la fourmi se déplace à la vitesse constante v, quelle chute de température ressentira-t-elle initialement ?
(c) [2] Le long de quelle courbe la fourmi doit-elle se déplacer pour que la température décroisse le plus rapidement ?

2. Un fil électrique rectiligne est parcouru par un courant d'intensité I constant. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace tel que $\vec{e}_3$ est parallèle au fil et orienté dans le sens du courant, la valeur du champ magnétique en tout point P de l'espace est donnée par

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\vec{e}_3 \wedge \vec{d}}{\left\|\vec{d}\right\|^2}$$

où μ_0 (> 0) est la perméabilité magnétique du vide et où $\vec{d}$ est le vecteur joignant, perpendiculairement, le fil au point P.
(a) Faire un dessin de la situation ; indiquer le vecteur $\vec{d}$.
(b) Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{B}$.

2. Juste pour les braves qui ont envie de relever le défi !