Mathématiques générales (B)

bloc1 chimie
& bloc 2 biologie, géographie, géologie

2020-2021

Maths B : brève table des matières

Table des matières

Chapitre 1. (1.1) Matrices

Définitions générales, notations, exemples

- Matrice, définition et notation
- Elément d'une matrice (et notation), rangée, type (format), matrice carrée, dimension, matrice diagonale ; cas des ≪ vecteurs ≫
- Matrices associées (transposée, conjuguée, adjointe)
- Exemples

Chapitre 1. (1.2) Opérations entre matrices

Chapitre 1. (1.2) Opérations entre matrices

Produit de matrices

- Définition
- Propriétés
- Exemples

Chapitre 1. (1.2) Opérations entre matrices

Opérations entre matrices et matrices associées

- Transposée (conjuguée, adjointe) d'une somme de matrices et du produit d'une matrice par un complexe
- Transposée (conjuguée, adjointe) d'un produit de matrices

Chapitre 1. (1.3) Déterminants

On définit le déterminant d'une matrice carrée par récurrence sur la dimension de la matrice.

Définition

- Définition
- Notion de cofacteur (et de mineur) d'un élément d'une matrice

ATTENTION : ne pas confondre définition et propriété ! ! ! !

Chapitre 1. (1.3) Déterminants

Propriétés des déterminants

- Première loi des mineurs
- Propriété de « linéarité » et propriété relative à la permutation de deux rangées (parallèles). Conséquence.
- Seconde loi des mineurs

Chapitre 1. (1.3) Déterminants

Une écriture raccourcie des deux lois des mineurs

Les première et seconde lois des mineurs peuvent être résumées par l'égalité

$$\widetilde{\mathcal{A}}\, A \;=\; A\, \widetilde{\mathcal{A}} \;=\; det(A)I$$

où $\mathcal{A}$ désigne la matrice dont les éléments sont les cofacteurs de la matrice A (même position)

Chapitre 1. (1.3) Déterminants

Propriétés des déterminants -suite

- Déterminant d'une matrice diagonale
- Déterminant du produit de deux matrices de même dimension
- Déterminant des matrices associées

Chapitre 1. (1.4) Inversion de matrices

Introduction et définition

- Introduction : comparaison avec l'inversion des nombres complexes
- Définition de la notion d'inverse d'une matrice carrée

Chapitre 1. (1.4) Inversion de matrices

Le problème de l'inversion

- Condition nécessaire à l'existence d'une matrice inverse (à une matrice carrée donnée)
- Condition suffisante à l'existence d'une matrice inverse (à une matrice carrée donnée)
- Unicité de l'inverse (si existence) et forme explicite de cet inverse

Chapitre 1. (1.4) Inversion de matrices

Exemples

Chapitre 1. (1.6) Cas particulier très utile de produit matriciel

Produit d'une matrice carrée par un vecteur de même dimension.

Chapitre 1. (1.7) Valeurs propres et vecteurs propres

Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée

Définitions et première propriétés

- Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre
- Définition du polynôme caractérisque d'une matrice carrée
- Lien entre valeurs propres et polynôme caractéristique

Exemples (y compris le cas des matrices qui n'ont que des 0 au-dessus (ou en-dessous) de la diagonale principale)

Chapitre 1. (1.8) Diagonalisation

Définitions et propriétés

- Une « Matrice diagonalisable », c'est ...
- « Diagonaliser » une matrice (si c'est possible), c'est ...
- Propriéte des vecteurs colonnes d'une matrice S qui est telle que $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale et propriété des éléments diagonaux de cette matrice

Chapitre 1. (1.8) Diagonalisation

Quand une matrice est-elle diagonalisable ?

- Condition nécessaire et suffisante
- Un cas très pratique de condition suffisante

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Exemple de l'évolution d'une population

- Objet : étude de mouvement de population au cours du temps
- On suppose que, chaque année
  - 95% de la population de la ville y reste et 5% va vers les faubourgs
  - 97% de la population des faubourgs y reste et 3% part vers la ville
- Modélisation pour évaluer la situation (habitants en ville ou dans les faubourgs) après quelques années

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Exemple de l'évolution d'une population

- Données : population au temps 0 (V_0 (ville) et F_0 (faubourgs)) et, chaque année
  - 95% de la population de la ville y reste et 5% va vers les faubourgs
  - 97% de la population des faubourgs y reste et 3% part vers la ville
- Après un an, si on désigne par V_1 et F_1 les populations respectives (ville-faubourg), on a

$$\begin{cases} V_1 = 0.95V_0 + 0.03F_0 \\ F_1 = 0.05V_0 + 0.97F_0 \end{cases}$$

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Exemple de l'évolution d'une population

Après un an, si on désigne par V_1 et F_1 les populations respectives (ville-faubourg), on a

$$\begin{cases} V_1 = 0.95V_0 + 0.03F_0 \\ F_1 = 0.05V_0 + 0.97F_0 \end{cases}$$

Ces deux égalités peuvent aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Exemple de l'évolution d'une population

Définition

$$T = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix}.$$

Après k années, la population en ville (V_k) et dans les faubourgs (F_k) est devenue

$$\begin{pmatrix} V_k \\ F_k \end{pmatrix} = T^k \begin{pmatrix} V_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Définitions

- Définition d'une matrice stochastique et matrice stochastique régulière
- Définition d'un « vecteur de probabilité »
- Définition d'une chaîne de Markov

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Propriétés générales

Soit T une matrice stochastique.

- Si X est un vecteur de probabilité, alors TX est encore un vecteur de probabilité
- Quel que soit k$\in \mathbb{N}_0$, T^k est encore une matrice stochastique
- Propriétés relatives aux valeurs propres et aux vecteurs propres

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Théorème

Soit T une matrice stochastique régulière. Alors

- 1 est valeur propre de multiplicité 1 est il existe un unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre de valeur propre 1
- Quelle que soit la condition initiale X (vecteur de probabilité), la suite $T^k X$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers le vecteur mentionné au point précédent

Chapitre 1. (1.10) Une application « pratique »

Retour à l'exemple introductif.
Le calcul donne

$$X = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

comme vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité.
Ainsi, par exemple, une population de départ de 1 million de personnes, va évoluer vers une répartition de

$$0.375 \; 10^6 = 375\;000$$

habitants en ville et

$$0.625 \; 10^6 = 625\;000$$

habitants dans les faubourgs.