Mathématiques générales (B)

bloc1 chimie,
& bloc 2 biologie, géographie, géologie

2020-2021

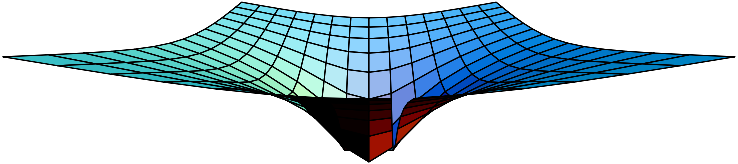
Maths B : brève table des matières

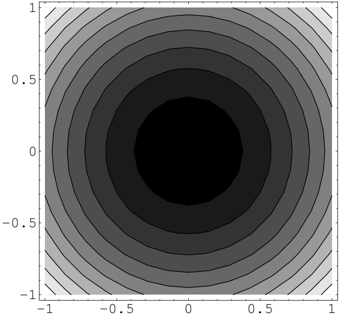
Table des matières (second quadrimestre)

Remarque : nombre d'heure différent selon les sections (donc . . .)

Définitions générales, notations, exemples

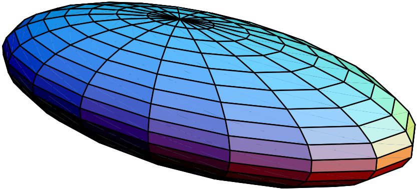
- Fonctions de plusieurs variables, domaine de définition, exemples
- Notion de courbe, de surface ; représentation graphique des fonctions de plusieurs variables réelles
- Notion de courbe de niveau, de surface de niveau ; exemples




1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

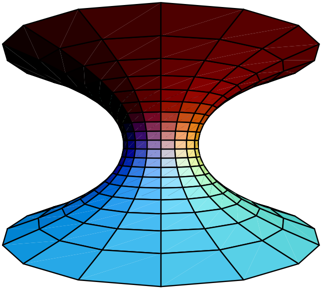
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Ellipsoïde



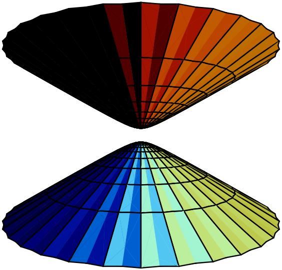
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Hyperboloïde à une nappe



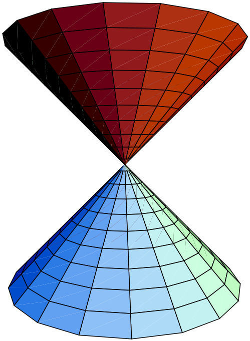
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Hyperboloïde à deux nappes



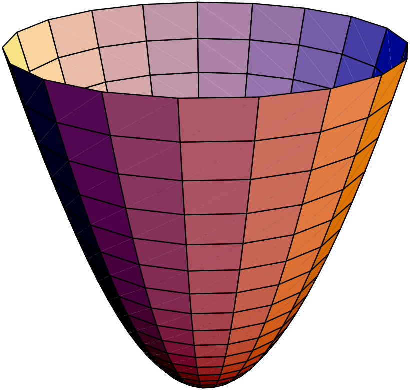
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Cône



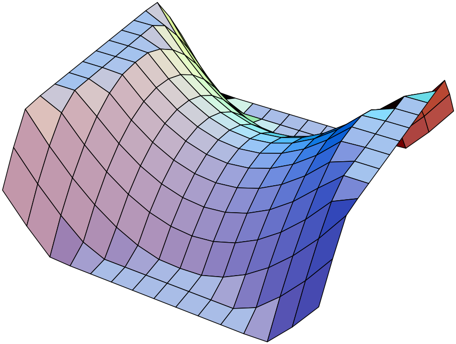
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Paraboloïde elliptique



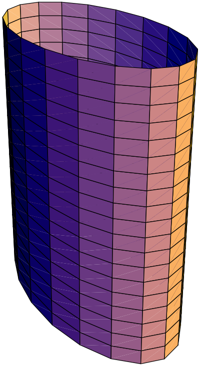
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Paraboloïde hyperbolique



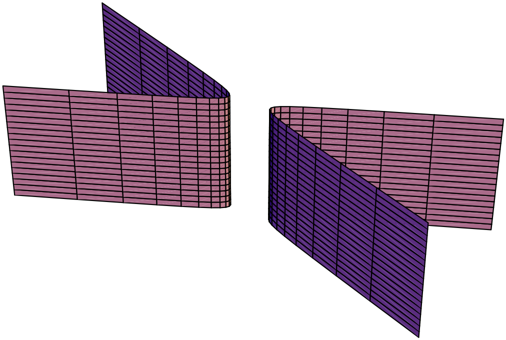
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Cylindre elliptique



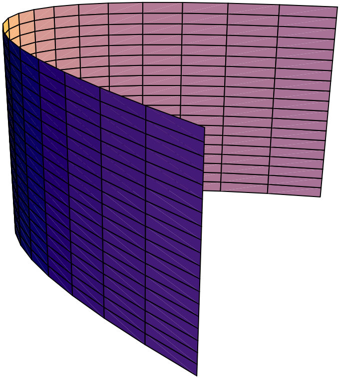
Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Cylindre hyperbolique



Surfaces quadriques (surfaces de niveau pour des fonctions polynomiales du second degré de 3 variables réelles)

Cylindre parabolique



Cf cas des fonctions d'une variable réelle

Définitions générales, notations, exemples

- Somme, produit, quotient
- Fonctions composées
- Limites et continuité

On travaille encore dans des ensembles ouverts (car ...)

Définitions générales, notations, exemples

- Définitions (dérivabilité et dérivées partielles)
- Notations
- Premières propriétés
  - Combinaisons linéaires, produits, quotients : cf une variable réelle
  - Dérivation des fonctions composées

On travaille encore dans des ensembles ouverts (car . . .)

Lien entrée dérivabilité et continuité

Attention : la situation nest plus celle du cas des fonctions d'une variable réelle

Dérivées multiples

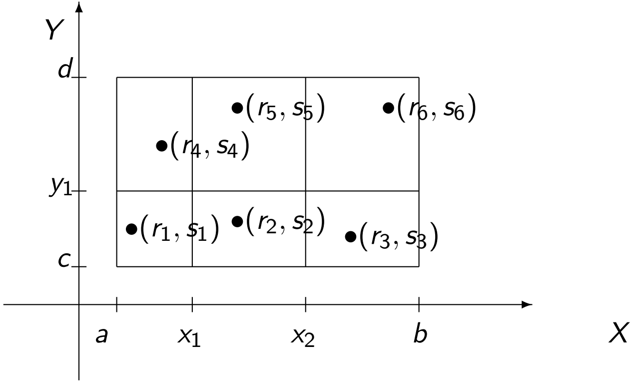
Attention à la « permutation » des dérivées partielles

Opérateurs de dérivation particuliers

- Pourquoi « particuliers » ?
- Défínion des opérateurs gradient, divergence et rotationnel
- Interprétation

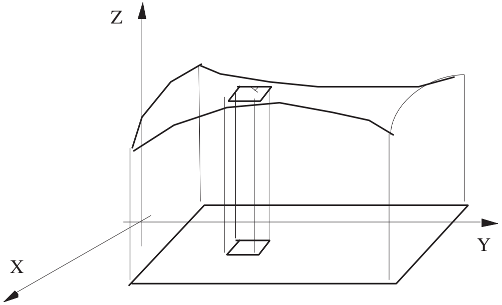
On se place dans le cadre de l'intégration des fonctions continues.

Intégration sur des ensembles bornés fermés



Interprétation dans le cas d'une fonction continue à valeurs positives

Intégration sur des ensembles bornés fermés



On se place dans le cadre de l'intégration des fonctions continues.

Intégration sur des ensembles bornés fermés

- Intégration sur des rectangles bornés fermés : définition
- Résultat permettant de calculer l'intégrale en passant par des intégrales de fonctions d'une variable
- Intégration sur d'autres ensembles bornés fermés
- Résultat permettant de calculer l'intégrale en passant par des intégrales de fonctions d'une variable

On se place dans le cadre de l'intégration des fonctions continues.

Intégration sur des ensembles bornés fermés

En bref, avec représentations graphique et analytique adéquates de l'ensemble d'intégration (borné et fermé) A, on a

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\ dxdy &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\ dy\right)\ dx\\ &= \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\ dx\right)\ dy\end{aligned}$$

Ne pas oublier le cas particulier des « rectangles » !

On se place encore dans le cadre de l'intégration des **fonctions continues**.

Intégration sur des ensembles non bornés fermés

Ici, attention ! ! ! (cf déjà cas d'une variable ! ! !)
On utilise encore des ensembles ≪ parallèles aux axes ≫.

Soit $f \in C_0(A)$. Par définition, la fonction f est dite *intégrable sur* A lorsque on peut intégrer successivement son **module** dans un certain ordre, c'est-à-dire ...

Intégration sur des ensembles non bornés fermés

. . . c'est-à-dire, dans le cas

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in]a, b[\text{ et } f_1(x) \leq y < f_2(x)\right\},$$

- $\forall x \in]a, b[$, la fonction $y \in I_x = [f_1(x), f_2(x)[\mapsto |f(x, y)|$ est intégrable sur I_x
- et la fonction $x \in]a, b[\mapsto \displaystyle\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} |f(x, y)| \, dy$ est intégrable sur $]a, b[$.

Intégration sur des ensembles non bornés fermés

. . . et dans le cas

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [c, d[\text{ et } g_1(y) < x \leq g_2(y)\right\}$$

cela veut dire que

- $\forall y \in [c, d[$, la fonction $x \in I_y =]g_1(y), g_2(y)] \mapsto |f(x, y)|$ est intégrable sur I_y
- et la fonction $y \in [c, d[\mapsto \displaystyle\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} |f(x, y)| \, dx$ est intégrable sur $[c, d[$.

Intégration sur des ensembles non bornés fermés

On démontre que si A est à la fois parallèle à X et à Y alors l'existence des intégrales successives du module de f dans un certain ordre implique l'existence des intégrales successives du module dans l'autre ordre et l'existence des intégrales successives de la fonction f elle-même.

Dans ce cas, intégrer successivement f dans un ordre ou dans l'autre donne la même valeur. L'intégrale de f sur A, encore notée $\iint_A f(x,y)\, dxdy$ est cette valeur :

Intégration sur des ensembles non bornés fermés

L'intégrale de f sur A, encore notée $\iint_A f(x,y)\ dxdy$ est cette valeur :

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\ dx\ dy &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\ dy \right)\ dx\ (*) \\ &= \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\ dx \right)\ dy.\ (**)\end{aligned}$$

Passer de (*) à (**) s'appelle « permuter l'ordre d'intégration » ; on trouve la même chose car la fonction est intégrable.

Intégration sur des ensembles non bornés fermés

Exemples de vérification d'intégrabilité et de calcul d'intégrales

- Cas où la fonction est « à variables séparées » et où l'ensemble d'intégration est un rectangle
- Exemples explicites (cf syllabus)

Intégration sur des ensembles non bornés fermés

Importance de regarder les intégrales successives du **module de** f pour avoir l'intégrabilité (et donc la permutation de l'orde d'intégration sans changer la valeur).
Exemple... (sur un carré ! ! ! !)

Intégration par changement de variables

- Cas général
- Cas du changement de variables « polaires » : on passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. On trouve, après calculs,

$$\iint_{A'} f(x,y)\ dxdy \ = \ \iint_{A} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\ r\ drd\theta$$

où A', A sont ...

Application

Pour tout $a > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Cette intégrale s'appelle l'« l'intégrale de Poisson »et la fonction intégrée s'appelle une « gaussienne » (très utilisée notamment en statistiques).