



LIÈGE université
Sciences

MATH1009 *Chimie et Géologie*

Année académique 2023-2024

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉVISIONS EN VUE DE L'INTERROGATION DU 9 AVRIL 2024

RÉPÉTITION 10 : RÉVISIONS EXERCICES

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Soient les matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ 1/i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

$$(a) A + \tilde{B} \quad (b) C = AB \quad (c) C^{-1}$$

2. Pour quelles valeurs de α la matrice suivante est-elle inversible? Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse.

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\pi + \alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

3. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable? Pourquoi? Si elle est diagonalisable, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

4. La compagnie d'assurance ASSURBIEN répartit ses clients en assurance RC en deux groupes :

A : sans accident ou avec un seul accident pendant l'année,

B : avec au moins deux accidents pendant l'année.

Les statistiques internes de la compagnie montrent que, chaque année (et en moyenne), le « statut » des clients obéit aux règles suivantes.

- Un client du groupe A reste toujours chez ASSURBIEN l'année suivante et a neuf chances sur dix de rester dans le groupe A .

- Un client du groupe B a quatre chances sur dix d'y rester l'année suivante; par contre, il a deux chances sur dix d'être dans A et donc quatre chances sur dix de quitter la compagnie ASSURBIEN.

- Un client assuré dans une autre compagnie peut décider de changer de compagnie; il a deux chances sur dix d'intégrer ASSURBIEN dans le groupe A et autant de chances de l'intégrer dans le groupe B .

- (a) Déterminer la matrice de transition.
(b) En supposant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la proportion de clients de la compagnie ASSURBIEN?

5. On donne la fonction f par

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcsin(y^2 + x + 1)$$

- (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.
(b) Calculer la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable.
(c) Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que la forme explicite de $F(t) = f(5t^2 - 1, 2t)$ et de sa dérivée en tout point de ce domaine.
(d) Si F est dérivable en $1/6$, que vaut sa dérivée en ce point? Simplifier votre réponse au maximum.

6. On donne la fonction f continûment dérivable sur $]1, 2[\times]0, 1[$ et à valeurs strictement positives.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3-x)))$.
 - Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.
 - Si g est dérivable en $5/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?

7. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.)

