

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2019-2020

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATH B DU 22 JANVIER 2020
GÉOGRAPHES BLOC 2

QUESTIONNAIRE

1. Soient la matrice A et le vecteur X donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ \beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

- (a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A admet-elle 0 comme valeur propre ?
 - (b) Si c'est possible, déterminer l'élément $(A^{-1})_{23}$.
 - (c) Montrer que, quel que soit $\beta \neq 0$, le vecteur X est un vecteur propre de A et donner la valeur propre à laquelle il correspond.
 - (d) En considérant $\beta \geq 2$, la matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.
2. (10 points)
On donne explicitement la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{2xy}{x^2 + y^2}}.$$

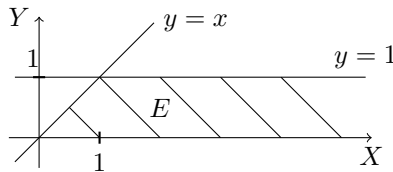
- (a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de cette fonction. Les représenter, en les hachurant, dans un repère orthonormé.
- (b) Simplifier au maximum l'expression $x D_x f(x, y) + y D_y f(x, y)$.
- (c) On définit la fonction F explicitement par

$$F(t) = f(\sqrt{t}, \sqrt{t^3}).$$

Déterminer l'expression explicite de cette fonction, ainsi que ses domaines de définition et de dérivabilité, et calculer sa dérivée première.

3. (13 points)

On considère l'intégrale $I = \iint_E y^2 e^{-xy} dx dy$ où l'ensemble E correspond à la région hachurée du plan ci-dessous.



- (a) Décrire analytiquement l'ensemble E en commençant par l'ensemble de variation
 - (i) des abscisses, puis à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.
 - (ii) des ordonnées, puis à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
 - (b) Si c'est possible, calculer l'intégrale I en justifiant vos démarche et réponse.
4. (10 points)
- (a) Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -\sqrt{3}x \leq y \leq 0 \right\}.$$

- (b) Si possible, calculer l'intégrale

$$\iint_B \frac{\cos(\arctg(\frac{y}{x}))}{x} dx dy.$$

5. (10 points)

On donne la fonction f par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
- (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
- (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point (b) précédent. Justifier.

6. (7 points)

Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.

$$(a) \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)^j \quad (b) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k! 2^k} \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

CORRIGÉ

Exercices

1. Soient la matrice A et le vecteur X donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ \beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

où $\beta \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) de $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A admet-elle 0 comme valeur propre ?

Solution.

La matrice A admet 0 comme valeur propre si et seulement si $\det(A - 0I) = 0$. En appliquant la première loi des mineurs à la troisième ligne de A , on obtient directement

$$\det(A - 0I) = \det(A) = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \beta \end{vmatrix} = -\beta.$$

Par conséquent, la matrice A admet 0 comme valeur propre si et seulement si β vaut 0.

(b) Si c'est possible, déterminer l'élément $(A^{-1})_{23}$.

Solution.

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul; dans le cas présent, elle est donc inversible si et seulement si $\beta \neq 0$. On a alors

$$(A^{-1})_{2,3} = \frac{1}{\det A} (\tilde{\mathcal{A}})_{2,3} = \frac{-1}{\beta} (\mathcal{A})_{3,2} = \frac{-\beta^2}{\beta} = -\beta$$

où $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs de A .

(c) Montrer que, quel que soit $\beta \neq 0$, le vecteur X est un vecteur propre de A et donner la valeur propre à laquelle il correspond.

Solution.

Si $\beta \neq 0$, alors X est un vecteur non nul. Notant de plus que

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \beta X,$$

on conclut directement que X est un vecteur propre de A relatif à la valeur propre β .

(d) En considérant $\beta \geq 2$, la matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice qui y conduit.

Solution.

Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & \beta \\ \beta & \beta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

qui est une équation polynomiale (de degré 3) en l'inconnue λ . En appliquant la première loi des mineurs à la troisième ligne, on obtient tout de suite

$$\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda)(\beta - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \beta.$$

Les valeurs propres de A sont donc -1 , 1 et β (toutes trois simples puisque $\beta \neq -1$ et $\beta \neq 1$). Comme A ne possède que des valeurs propres simples, A est bien diagonalisable.

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A + I)X = 0$. On a alors successivement

$$(A + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & \beta \\ \beta & \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\beta z \\ \beta x = -(\beta + 1)y. \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} -\beta(\beta + 1) \\ \beta^2 \\ 2(\beta + 1) \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - I)X = 0$. On a alors successivement

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ \beta & \beta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta z = 0 \\ \beta x = (1 - \beta)y \\ -2z = 0. \end{cases}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 1 - \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } c \in \mathbb{C}_0.$$

Par le point (c) précédent, nous savons que X est un vecteur propre associé à la valeur propre simple β (qui est bien différente de 0 vu l'hypothèse $\beta \geq 2$).

En posant alors

$$S = \begin{pmatrix} -\beta(\beta + 1) & 1 - \beta & 0 \\ \beta^2 & \beta & \beta \\ 2(\beta + 1) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } S^{-1}AS = \text{diag}(-1, 1, \beta).$$

2. On donne explicitement la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{2xy}{x^2 + y^2}}.$$

(a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de cette fonction. Les représenter, en les hachurant, dans un repère orthonormé.

Solution.

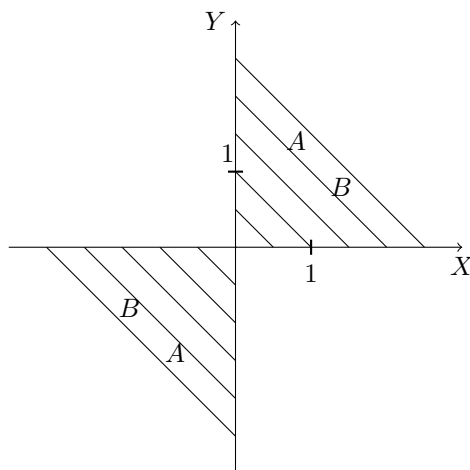
Les domaines de définition et de dérivabilité de f sont respectivement égaux à

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0, xy \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0), x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0), x \leq 0, y \leq 0\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0, xy > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\} \end{aligned}$$

dont une représentation graphique correspond à la zone hachurée ci-dessous ; les points des axes (hormis l'origine) sont compris dans A , mais sont exclus de B .



(b) Simplifier au maximum l'expression $x D_x f(x, y) + y D_y f(x, y)$.

Solution.

En un point de B , on a

$$\begin{aligned} D_x f(x, y) &= D_t \sqrt{t} \Big|_{t=\frac{2xy}{x^2+y^2}} \cdot D_x \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}}} \frac{2y(x^2+y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= y \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy}} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

et, de la même manière

$$D_y f(x, y) = x \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

On obtient alors directement

$$x D_x f(x, y) + y D_y f(x, y) = xy \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy}} \frac{(y^2-x^2) + (x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

(c) On définit la fonction F explicitement par

$$F(t) = f(\sqrt{t}, \sqrt{t^3}).$$

Déterminer l'expression explicite de cette fonction, ainsi que ses domaines de définition et de dérivabilité, et calculer sa dérivée première.

Solution.

On demande de déterminer les domaines et la forme explicite. On ne demande pas de déterminer la forme explicite de la fonction puis d'en déduire les domaines.

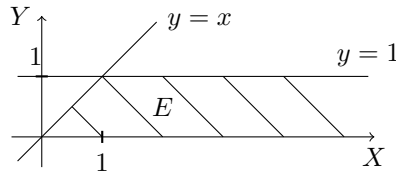
Cela étant, vu les racines carrées intervenant dans la définition de F , on doit considérer uniquement $t \geq 0$. De plus, le dénominateur de f dans lequel on remplace x par $\sqrt{t}$ et y par $\sqrt{t^2}$ est $t+t^3$; on ne peut donc pas prendre $t=0$ puisque cette valeur annule le dénominateur. Quand au numérateur, il est bien positif puisque les racines carrées de nombres positifs sont des nombres positifs. La fonction F s'écrit alors explicitement, pour $t > 0$,

$$F(t) = f(\sqrt{t}, \sqrt{t^3}) = \sqrt{\frac{2\sqrt{t}\sqrt{t^3}}{(\sqrt{t})^2 + (\sqrt{t^3})^2}} = \sqrt{\frac{2t^2}{t+t^3}} = \sqrt{\frac{2t}{1+t^2}}.$$

Vu cette expression, on peut donc la prolonger sur $[0, +\infty[$. Vu cette expression encore, F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Enfin, en $t > 0$, on a

$$DF(t) = D_u \sqrt{u}|_{u=\frac{2t}{1+t^2}} \cdot D_t \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2t}{1+t^2}}} \frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$$

3. On considère l'intégrale $I = \iint_E y^2 e^{-xy} dx dy$ où l'ensemble E correspond à la région hachurée du plan ci-dessous.



- (a) Décrire analytiquement l'ensemble E en commençant par l'ensemble de variation

- (i) des abscisses, puis à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.
- (ii) des ordonnées, puis à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.

Solution.

L'ensemble E peut s'écrire

- (i) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, x]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[, y \in [0, 1]\}$,
- (ii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x \in [y, +\infty[\}$.

- (b) Si c'est possible, calculer l'intégrale I en justifiant vos démarche et réponse.

Solution.

La fonction $f : (x, y) \mapsto y^2 e^{-xy}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc sur E , ensemble fermé, non borné. Elle y est positive. Vérifions son intégrabilité sur E en considérant l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_y^{+\infty} y^2 e^{-xy} dx \right) dy.$$

Pour y fixé dans $]0, 1]$, la fonction $g : x \mapsto |y^2 e^{-xy}| = y^2 e^{-xy}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le fermé $[y, +\infty[$. Vérifions l'intégrabilité de g en $+\infty$ à l'aide du critère en θ . Comme la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 |f(x, y)| = y^2 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-xy} = 0 \quad \forall y > 0$$

est finie (pour $\theta = 2 > 1$) puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste, g est

intégrable en $+\infty$ et est donc intégrable sur $[y, +\infty[$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_y^{+\infty} y^2 e^{-xy} dx &= -y \int_y^{+\infty} -ye^{-xy} dx \\ &= -y [e^{-xy}]_y^{+\infty} \\ &= -y \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xy} - e^{-y^2} \right) \\ &= ye^{-y^2} \quad \forall y > 0.\end{aligned}$$

La fonction $h : y \mapsto ye^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc est intégrable sur le borné fermé $[0, 1]$.

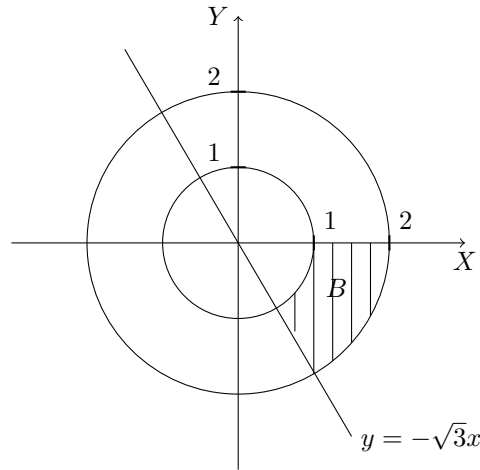
Ainsi, f est intégrable sur E et comme elle est à valeurs positives sur E , on obtient

$$I = \iint_E y^2 e^{-xy} dx dy = \int_0^1 \left(\int_y^{+\infty} y^2 e^{-xy} dx \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2ye^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} [e^{-y^2}]_0^1 = \frac{e-1}{2e}$$

4. (a) Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -\sqrt{3}x \leq y \leq 0 \right\}.$$

Solution.



(b) Si possible, calculer l'intégrale

$$\iint_B \frac{\cos(\operatorname{arctg}(y/x))}{x} dx dy.$$

Solution.

La fonction $f : (x, y) \mapsto (1/x) \cos(\operatorname{arctg}(y/x))$ est continue sur $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ donc sur l'ensemble B , fermé borné. Elle y est donc intégrable.

Cela étant, pour calculer l'intégrale, effectuons un changement de variables en coordonnées polaires. L'ensemble d'intégration décrit en coordonnées polaires est

$$B' = \{(r, \theta) : r \in [1, 2], \theta \in [5\pi/3, 2\pi]\},$$

et la fonction à intégrer est alors

$$g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r = \frac{\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{r \sin(\theta)}{r \cos(\theta)}\right)\right)}{r \cos(\theta)} r = \frac{\cos(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta)))}{\cos(\theta)} = \frac{\cos(\theta - 2\pi)}{\cos(\theta)} = 1.$$

Par application du théorème d'intégration par changement de variables, l'intégrale demandée est donc égale à

$$\iint_B \frac{\cos(\operatorname{arctg}(\frac{y}{x}))}{x} dx dy = \iint_{B'} 1 dr d\theta = \int_1^2 \left(\int_{5\pi/3}^{2\pi} 1 d\theta \right) dr = \frac{\pi}{3}.$$

5. On donne la fonction f par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

Solution.

La fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D^2f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D^3f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et on a $f(0) = 1$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = 1$. Si on désigne alors par P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)x = 1, \\ P_2(x) &= P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution.

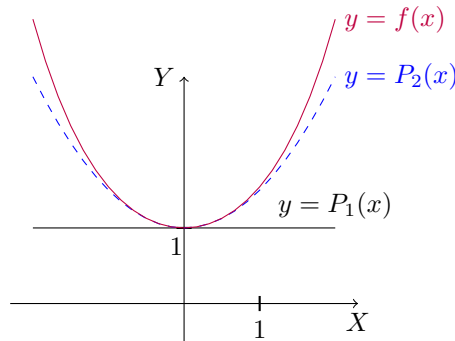
Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= D^2f(u_1) \cdot \frac{x^2}{2!} = \frac{e^{u_1} + e^{-u_1}}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} = \frac{e^{u_1} + e^{-u_1}}{4} x^2, \\ R_2(x) &= D^3f(u_2) \cdot \frac{x^3}{3!} = \frac{e^{u_2} - e^{-u_2}}{2} \cdot \frac{x^3}{3!} = \frac{e^{u_2} - e^{-u_2}}{12} x^3. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point (b) précédent. Justifier.

Solution.

Comme $R_1(x) \geq 0 \forall x$ au voisinage de 0, le graphique de f est situé au-dessus de celui de l'approximation P_1 . Comme $R_2(x) \geq 0 \forall x$ au voisinage de 0, le graphique de f est également situé au-dessus de celui de P_2 . En effet, si x est proche de 0 et $x \leq 0$, $e^{u_2} - e^{-u_2} \leq 0$; si x est proche de 0 et $x \geq 0$, $e^{u_2} - e^{-u_2} \geq 0$. Voici la représentation graphique de P_1 , P_2 et f au voisinage de 0.



6. Etudier la convergence des séries suivantes. Si elles convergent, en donner la somme.

$$(a) \quad \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)^j \quad (b) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k! \, 2^k} \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

Solution.

(a) Le terme général de la première série s'écrit

$$(-1)^j \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)^j = \left(-\frac{1}{2} \right)^j.$$

La première série est donc une série géométrique convergente puisque la raison $-1/2$ est de module strictement inférieur à 1. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

(b) Le terme général de la deuxième série s'écrit

$$\frac{3^{k+1}}{k! \, 2^k} = 3 \times \frac{(3/2)^k}{k!}.$$

Comme

$$\frac{(3/2)^k}{k!}$$

est de la forme $x^k/k!$, terme général de la série définissant $\exp(x)$, la série est convergente et sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k! \, 2^k} = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(3/2)^k}{k!} = 3 \exp \left(\frac{3}{2} \right).$$

(c) La troisième série est la suite des sommes partielles

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) &= \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n+1) - \sum_{n=1}^N \ln(n) \\ &= \sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) - \sum_{n=1}^N \ln(n) \\ &= \ln(N+1), \quad N \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Celle-ci ne converge pas vers une limite finie puisque

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(N+1) = +\infty$$

Par conséquent, par définition, la série considérée n'est pas convergente.