1, 2, 3...Sciences

Année académique 2017-2018

Mathématique (partim B)

Corrigé de l'interrogation « à blanc »
Novembre 2017

Version 21 novembre 2017

QUESTIONNAIRE

1. Soient les réels α, β et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\sin\beta & \cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix}.$$

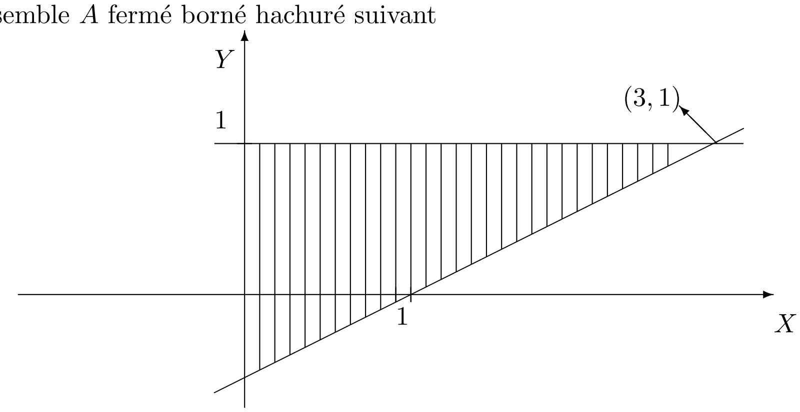
a) Calculer le produit AB et simplifier l'expression des éléments de cette matrice au maximum.
b) Montrer que le complexe $\lambda = \sin\alpha - i\cos\alpha$ est une valeur propre de la matrice A.
c) Déterminer les valeurs propres de la matrice B.

2. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 - 4y^2 - 1\right).$$

a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f. En donner une représentation graphique dans le même repère orthonormé, en utilisant différentes couleurs.
b) Déterminer l'expression explicite de la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable.
c) Quelle est la valeur de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable aux points de coordonnées $(3,-1)$ et $(1,1)$?
d) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(2e^t, e^t - \frac{1}{2}e^{-t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

3. On donne l'ensemble A fermé borné hachuré suivant



Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale sur A de la fonction f donnée par

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}$$

et simplifier votre réponse au maximum.

4. On donne l'ensemble A suivant

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq y \leq x^2 \text{ et } x < 0\right\}.$$

a) Représenter graphiquement cet ensemble dans un repère orthonormé.
b) Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale sur A de la fonction g donnée par $g(x,y) = xe^{-y}$ et simplifier votre réponse au maximum.

CORRIGE

1. **b) Soient les réels α, β et les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\sin\beta & \cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le produit AB et simplifier l'expression des éléments de cette matrice au maximum.
b) Montrer que le complexe $\lambda = \sin\alpha - i\cos\alpha$ est une valeur propre de la matrice A.
c) Déterminer les valeurs propres de la matrice B.

Solution. a) Le produit AB vaut

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ -\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$$

b) Pour montrer que le complexe $\lambda = \sin\alpha - i\cos\alpha$ est une valeur propre de la matrice A, il suffit de prouver que λ est un zéro du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$.
Comme on a

$$\det(A - (\sin\alpha - i\cos\alpha)I) = \begin{vmatrix} i\cos\alpha & -\cos\alpha \\ \\ cos\alpha & i\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

(la deuxième colonne est le produit de la première par i), on en conclut que $\lambda = \sin\alpha - i\cos\alpha$ est bien valeur propre de A.

c) On a

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det\begin{pmatrix} -\sin\beta - \lambda & \cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\sin\beta - \lambda)(\sin\beta - \lambda) - \cos^2\beta \\ &= \lambda^2 - (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Dès lors, les valeurs propres de B (solutions de l'équation $\det(B - \lambda I) = 0$) sont 1 et -1.

2. **On donne la fonction f explicitement par**

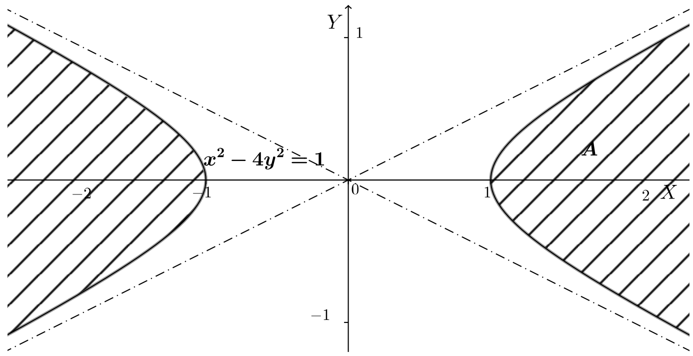
$$f(x, y) = \ln\left(x^2 - 4y^2 - 1\right).$$

a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f. En donner une représentation graphique dans le même repère orthonormé, en utilisant différentes couleurs.
b) Déterminer l'expression explicite de la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable.
c) Quelle est la valeur de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable aux points de coordonnées $(3, -1)$ et $(1, 1)$?
d) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(2e^t, e^t - \frac{1}{2}e^{-t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point de son domaine.

Solution. a) Les domaines de définition et de dérivabilité sont égaux à

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 - 1 > 0\}.$$

La représentation graphique de cet ensemble est la partie hachurée du plan ci-dessous, les points de l'hyperbole étant exclus.



b) L'expression explicite de la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable est la fonction donnée par

$$D_y f(x,y) = \frac{-8y}{x^2-4y^2-1},\ (x,y) \in A.$$

c) Le point de coordonnées $(3,-1)$ appartient au domaine de dérivabilité ; on a

$$(D_y f)(3,-1) = \frac{8}{4} = 2.$$

Le point de coordonnées $(1,1)$ n'appartient pas au domaine de dérivabilité ; on ne peut donc pas calculer la valeur de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable en ce point.

d) Calculons la valeur de l'expression $x^2 - 4y^2 - 1$ pour $x = 2e^t$ et $y = e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$. On a

$$\left(2e^t\right)^2 - 4\left(e^t - \frac{1}{2}e^{-t}\right)^2 - 1 = 4e^{2t} - 4e^{2t} + 4 - e^{-2t} - 1 = 3 - e^{-2t}.$$

L'expression explicite de la fonction est donc

$$F(t) = \ln(3 - e^{-2t}).$$

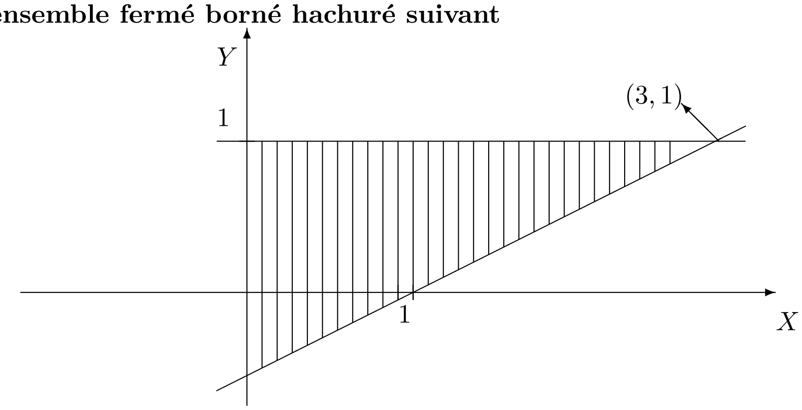
Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble

$$\left\{t \in \mathbb{R} : 3 - e^{-2t} > 0\right\} = \{t \in \mathbb{R} : e^{-2t} < 3\} = \{t \in \mathbb{R} : -2t < \ln(3)\} = \left]-\frac{\ln(3)}{2}, +\infty\right[$$

et, sur cet ensemble, la dérivée de F est donnée par

$$DF(t) = \frac{2e^{-2t}}{3-e^{-2t}} = \frac{2}{3\,e^{2t}-1}.$$

3. **On donne l'ensemble fermé borné hachuré suivant**



Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction f suivante sur cet ensemble ; simplifier votre réponse au maximum

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}$$

Solution. L'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes, est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3],\ y \in \left[\frac{x-1}{2}, 1\right]\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],\ x \in [0, 2y+1]\right\}.$$

La fonction f est continue sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y+1 \neq 0\}$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_0^{2y+1} \frac{1}{(x+y+1)^2}\, dx \right) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{-1}{x+y+1}\right]_{x=0}^{x=2y+1} dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{-1}{3y+2} + \frac{1}{y+1}\right) dy$$

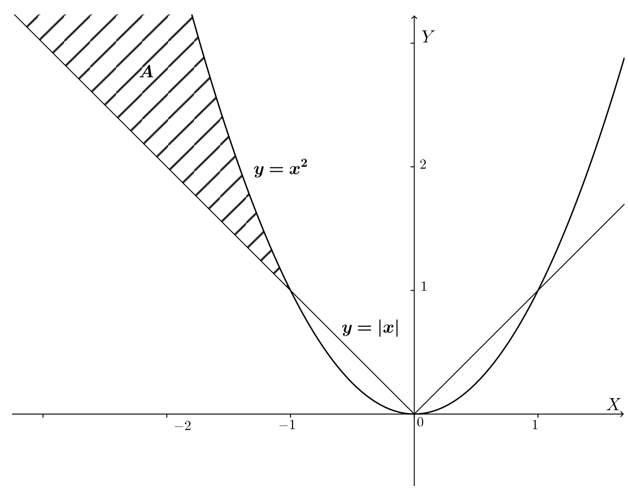
$$= \left[-\frac{1}{3}\ln(|3y+2|) + \ln(|y+1|)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{3}\ln 5 + \ln 2 + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\ln 5 + \frac{5}{3}\ln 2.$$

4. **On donne l'ensemble A suivant**

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x| \leq y \leq x^2 \text{ et } x < 0\right\}.$$

a) Représenter graphiquement cet ensemble dans un repère orthonormé.
b) Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction g donnée par $g(x,y) = xe^{-y}$ et simplifier votre réponse au maximum.

Solution. a) La représentation graphique de l'ensemble A, fermé non borné et parallèle aux axes, est la partie hachurée du plan, les points des ≪ bords ≫ étant compris dans l'ensemble.



b) Vérifions l'intégrabilité de g sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [-y, -\sqrt{y}]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, -1],\ y \in [-x, x^2]\},$$

ensemble fermé non borné dans lequel g est négatif et continu.
Si x est fixé dans $]-\infty, -1]$ alors la fonction $|g|$ est continue sur le fermé borné $[-x, x^2]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{-x}^{x^2} -xe^{-y}\, dy = \left[xe^{-y}\right]_{y=-x}^{y=x^2} = xe^{-x^2} - xe^{x}.$$

Comme la fonction $h : x \mapsto xe^{-x^2} - xe^{x}$ est positive sur $]-\infty, -1]$, en étudiant son intégrabilité par application de la définition, on aura, si la limite est finie, l'intégrabilité ainsi que la valeur de l'intégrale de h sur $]-\infty, -1]$. Calculons

$$L = \lim_{t \to -\infty} \int_t^{-1} \left(xe^{-x^2} - xe^{x}\right) dx.$$

On a

$$L = \lim_{t\to-\infty} \left[-\frac{1}{2}\, e^{-x^2} - xe^x + e^x\right]_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}\, e^{-1} + e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2}\, e^{-t^2} + te^t - e^t\right) = \frac{3}{2e},$$

puisque l'exponentielle l'emporte sur toute puissance antagoniste.
Ainsi, g est intégrable sur A et son intégrale sur cet ensemble vaut l'opposé de la valeur trouvée, à savoir $-\dfrac{3}{2e}$.