# *1, 2, 3...Sciences*

*Année académique 2017-2018*

**Mathématique et physique : 1er bloc**

**Test du 19-09-17**

## Correction

QUESTIONNAIRE

Problèmes élémentaires

**Rédiger** *une solution des problèmes simples suivants.*

**Mathématique** :

1. La masse volumique d'un matériau est la masse de celui-ci par unité de volume. Celle du hêtre est de 800 kg/m$^3$. On dispose d'un petit rondin de hêtre de masse 40 hg (hectogrammes). Quel est son volume en cm$^3$ ?

2. Le diamètre d'un disque mesure 8 cm. De combien de centimètres doit-on l'augmenter pour que l'aire du disque augmente de 100% ?

**Physique** :

3. Quelle distance (en mètres) parcourt un automobiliste roulant à 90 km/h durant 11 secondes ? S'il parcourt la même distance en 5 secondes, quelle est alors sa vitesse (en m/s) ?

Transcodage

1. Exprimer en **français** la définition ci-dessous (**ATTENTION** : **ne pas se limiter à une lecture de symboles**. Par exemple, on exprime ≪ $a+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ≫ par ≪ la somme de deux réels ≫ et non ≪ $a$ plus $b$ avec $a, b$ appartenant à $\mathbb{R}$ ≫) :

$$\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

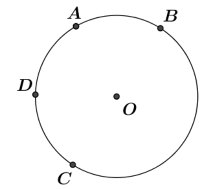
2. Exprimer en **symboles mathématiques** la phrase entre guillemets :
≪ La fréquence du mouvement d'un objet situé à l'extrémité d'un ressort est égale au produit d'une constante strictement positive par la racine carrée du quotient de la constante de raideur du ressort par la masse de l'objet. ≫

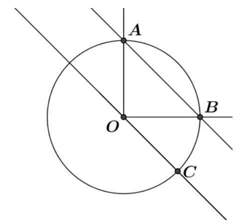
Techniques de calcul

1. Résoudre ($x$ est une inconnue réelle)
(a) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{3-2x}{2} + 1$ (b) $4 - x^2 = 2 - x$ (c) $\dfrac{2x-1}{1-3x} \geq x - 1$ .
2. Résoudre ($x$ est une inconnue réelle)
$$\sin(3x) = -0,5.$$
Donner les solutions qui appartiennent à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Représentation graphique

1. Soient A, B, C et D quatre points d'un même cercle de centre O, tels que DO est parallèle à AB et C est le symétrique de A par rapport à DO.
   Si l'amplitude de l'angle $\widehat{OAB}$ vaut $\theta$ radians, que valent les amplitudes des angles suivants : $\widehat{DOA}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{AOC}$ ?




2. La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en $O$, deux demi-droites $OA$ et $OB$ perpendiculaires et les droites $AB$ et $OC$ parallèles. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$ ?

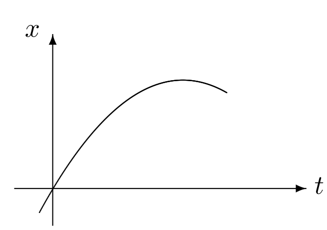
3. Dans un **même** repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation.
   (1) $y + 1 = 0$ (2) $4x^2 + y = 1$ (3) $4x^2 + 4y^2 = 1$ (4) $4x^2 - y^2 = 4$

QCM (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations **celle** qui est correcte et colorier **complètement** la case qui la précède.

1. Si on désire calculer le côté d'un cube dont le volume vaut le tiers du volume d'un cube C donné, alors il faut
   - ☐ diviser le côté de C par 3
   - ☐ diviser le côté de C par $\sqrt{3}$
   - ☐ multiplier le côté de C par $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$
   - ☐ multiplier le côté de C par $\sqrt[3]{3}$
   - ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. Si l'audience d'une émission de télévision augmente de 40% avant de diminuer de 30%, l'audience de cette émission
   - ☐ a diminué
   - ☐ a augmenté
   - ☐ est restée la même
   - ☐ il manque une donnée pour répondre
   - ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. On doit creuser une tranchée de 84 mètres. Hier, les ouvriers ont accompli les 2/3 du travail. Ce matin, certains d'entre eux ont creusé 4/7 de ce qui restait à retirer. Quelle longueur (en mètres) reste-t-il à creuser ?

   ☐ 32 ☐ 24 ☐ 16 ☐ 12 ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. Si $f$ est la fréquence et $l$ la longueur d'un pendule et si $g$ est l'accélération de la pesanteur, alors on a $f = c\sqrt{\frac{g}{l}}$, où $c$ désigne une constante strictement positive.
   Si on veut une fréquence une fois et demi plus élevée, comment varie la longueur de ce pendule ?
   - ☐ Elle doit être divisée par $\frac{2}{3}$
   - ☐ Elle doit être multipliée par $\sqrt{\frac{3}{2}}$
   - ☐ Elle doit être divisée par $\frac{4}{9}$
   - ☐ Elle doit être diminuée de 50%
   - ☐ Aucune des propositions précédentes n'est correcte
5. Soit un mobile se déplaçant sur une droite. Le graphique ci-dessous représente la position $x$ de ce mobile en fonction du temps $t$. Si $a$ et $b$ sont deux constantes réelles strictement positives, laquelle des expressions données décrit le mieux la vitesse $v$ du mobile en fonction du temps ?
   - ☐ $v(t) = at + b$
   - ☐ $v(t) = -at + b$
   - ☐ $v(t) = -at - b$
   - ☐ $v(t) = -a$
   - ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte



CORRIGE

**Problèmes élémentaires**

*Rédiger une solution des problèmes simples suivants.*

**Mathématique** :
**1) La masse volumique d'un matériau est la masse de celui-ci par unité de volume. Celle du hêtre est de 800 kg/m$^3$. On dispose d'un petit rondin de hêtre de masse 40 hg (hectogrammes). Quel est son volume en cm$^3$ ?**

***Solution.***

Puisque la masse volumique du hêtre est de 800 kg/m$^3$ et que 40 hg = 4 kg, le petit rondin de hêtre de masse 40 hg a un volume de $\frac{1}{200}$ m$^3$ $= 0,005$ m$^3$.
Ce rondin a donc un volume de 5000 cm$^3$.

**2) Le diamètre d'un disque mesure 8 cm. De combien de centimètres doit-on l'augmenter pour que l'aire du disque augmente de 100% ?**

***Solution.***

Le diamètre d'un disque mesure 8 cm, son rayon vaut donc 4 cm.
Soit $x > 0$ l'augmentation en centimètres du rayon ; $2x$ est donc celle du diamètre.
Puisque l'aire du disque augmente de 100%, elle double et, en comparant ces aires, on a

$$2\pi(4)^2 = \pi(4+x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 16 = 0.$$

Comme son discriminant (ou réalisant) vaut

$$\Delta = (8)^2 - 4.1.(-16) = 64 + 64 = 2.64,$$

les solutions sont $x = \dfrac{-8-8\sqrt{2}}{2} = -4 - 4\sqrt{2} < 0$ et $x = \dfrac{-8+8\sqrt{2}}{2} = -4 + 4\sqrt{2} = 4(\sqrt{2}-1) > 0$ .
Le diamètre du disque doit donc être augmenté de $8(\sqrt{2}-1)$ cm.

**Physique** :
**3) Quelle distance (en mètres) parcourt un automobiliste roulant à 90 km/h durant 11 secondes ?**
**S'il parcourt la même distance en 5 secondes, quelle est alors sa vitesse (en m/s) ?**

***Solution.***

Une vitesse de 90 km/h vaut aussi $\frac{90000}{3600}$ m/s = 25 m/s. Par conséquent, l'automobiliste roulant à 90 km/h durant 11 secondes, parcourt une distance de 25.11 = 275 m.
S'il parcourt 275 m en 5 secondes, sa vitesse est alors de $\frac{275}{5}$m/s c'est-à-dire de 55 m/s.

**Transcodage**

1. **Exprimer en français la propriété ci-dessous (ATTENTION : ne pas se limiter à une lecture de symboles. Par exemple, on exprime « $a+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ » par « la somme de deux réels » et non « $a$ plus $b$ avec $a, b$ appartenant à $\mathbb{R}$ ») :**

$$\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

***Solution.***

L'exponentielle d'une somme de deux réels vaut le produit des exponentielles de chacun de ces réels.

2. **Exprimer en symboles mathématiques la phrase entre guillemets :**
**« La fréquence du mouvement d'un objet situé à l'extrémité d'un ressort est égale au produit d'une constante strictement positive par la racine carrée du quotient de la constante de raideur du ressort par la masse de l'objet. »**

***Solution.***

Si $\nu$ est la fréquence du mouvement d'un corps de masse $m$ situé à l'extrémité d'un ressort de raideur $r$, alors on a

$$\nu = K\sqrt{\frac{r}{m}},\ K \text{ étant une constante strictement positive.}$$

**Techniques de calcul**

**1. Résoudre ($x$ est une inconnue réelle)**

**a)** $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{3-2x}{2} + 1$ **(b)** $4 - x^2 = 2 - x$ **(c)** $\dfrac{2x-1}{1-3x} \geq x - 1$ .

***Solution.***

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{5} = \frac{3-2x}{2} + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2(x-1)}{10} = \frac{5(3-2x)+10}{10} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x - 2 = 15 - 10x + 10 \\
&\Leftrightarrow \quad 12x = 27 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{\dfrac{9}{4}\right\}$.

(b) On a

$$\begin{aligned}
4 - x^2 = 2 - x \quad &\Leftrightarrow \quad (2-x)(2+x) = 2 - x \\
&\Leftrightarrow \quad (2-x)(2+x-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = -1.
\end{aligned}$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \{-1,\ 2\}$.

(c) Si $x \neq \frac{1}{3}$, l'inéquation donnée est équivalente à

$$\frac{2x-1-(x-1)(1-3x)}{1-3x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1-4x+3x^2+1}{1-3x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2-2x}{1-3x} \geq 0.$$

En étudiant le signe du premier membre, on a $x \in \,]-\infty, 0]$ ou $x \in \,\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S = ]-\infty, 0] \,\cup\, \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

2. **Résoudre ($x$ est une inconnue réelle)**

$$\sin(3x) = -0,5.$$

**Donner les solutions qui appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.**

***Solution.***

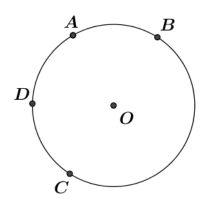
L'équation donnée est équivalente à $\sin(3x) = \sin(\frac{-\pi}{6})$ qui a pour solutions

$$\left(3x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \;\text{ ou } 3x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{-\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \;\text{ ou } x = \frac{-5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\; k \in \mathbb{Z}\right).$$

L'ensemble des solutions dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est alors $S = \left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{-\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$.

## Représentation graphique

1. **Soient A, B, C et D quatre points d'un même cercle de centre O, tels que DO est parallèle à AB et C est le symétrique de A par rapport à DO.**
**Si l'amplitude de l'angle $\widehat{OAB}$ vaut $\theta$ radians, que valent les amplitudes des angles suivants : $\widehat{DOA}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{AOC}$ ?**



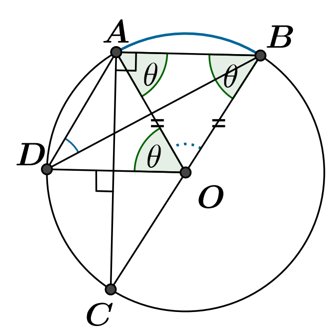

***Solution.***

L'amplitude de l'angle $\widehat{DOA}$ vaut $\theta$.
(les angles $\widehat{DOA}$ et $\widehat{OAB}$ sont alternes internes)

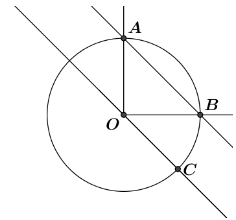
L'amplitude de l'angle $\widehat{AOB}$ vaut $\pi - 2\theta$.
(l'angle $\widehat{AOB}$ est angle au sommet du triangle AOB isocèle)

L'amplitude de l'angle $\widehat{ADB}$ vaut $\pi/2 - \theta$.
(l'angle $\widehat{ADB}$ est un angle inscrit dans le cercle et qui intercepte le même arc que l'angle au centre de ce cercle $\widehat{AOB}$)

L'amplitude de l'angle $\widehat{AOC}$ vaut $2\theta$.
(les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires puisque ABC est un triangle rectangle en A)



2. **La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en $O$, deux demi-droites $OA$ et $OB$ perpendiculaires et les droites $AB$ et $OC$ parallèles . Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$ ?**




***Solution.***

Puisque le triangle $AOB$ est isocèle rectangle, les angles à la base ont une amplitude de $\pi/4$. Comme les droites $AB$ et $OC$ sont parallèles, les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{BOC}$ sont alternes internes et ont donc la même amplitude. Par conséquent, on a

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OC}\|.\cos(\widehat{AOC}) = 2.2.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 4.\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

3. **Dans un même repère orthonormé, représenter avec précision les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation.**

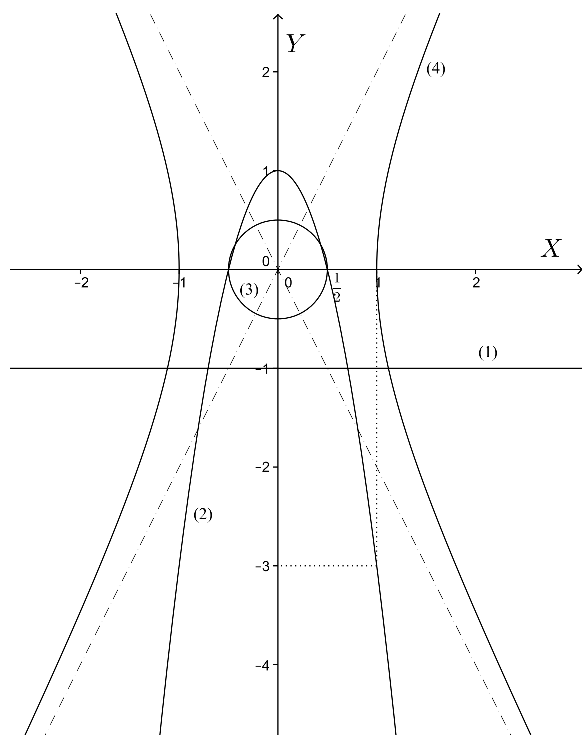
***Solution.***

(1) $y + 1 = 0$

(2) $4x^2 + y = 1$

(3) $4x^2 + 4y^2 = 1$

(4) $4x^2 - y^2 = 4$



$\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

**Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède.**

1. Si on désire calculer le côté d'un cube dont le volume vaut le tiers du volume d'un cube C donné, alors il faut
   ☐ diviser le côté de C par 3
   ☐ diviser le côté de C par $\sqrt{3}$
   ♣ multiplier le côté de C par $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$
   ☐ multiplier le côté de C par $\sqrt[3]{3}$
   ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. Si l'audience d'une émission de télévision augmente de 40% avant de diminuer de 30%, l'audience de cette émission
   ♣ a diminué
   ☐ a augmenté
   ☐ est restée la même
   ☐ il manque une donnée pour répondre
   ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. On doit creuser une tranchée de 84 mètres. Hier, les ouvriers ont accompli les 2/3 du travail. Ce matin, certains d'entre eux ont creusé 4/7 de ce qui restait à retirer. Quelle longueur (en mètres) reste-t-il à creuser ?
   ☐ 32 ☐ 24 ☐ 16 ♣ 12 ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. Si $f$ est la fréquence et $l$ la longueur d'un pendule et si $g$ est l'accélération de la pesanteur, alors on a $f = c\sqrt{\frac{g}{l}}$, où $c$ désigne une constante strictement positive.
   Si on veut une fréquence une fois et demi plus élevée, comment varie la longueur de ce pendule ?
   ☐ Elle doit être divisée par $\frac{2}{3}$
   ☐ Elle doit être multipliée par $\sqrt{\frac{3}{2}}$
   ☐ Elle doit être divisée par $\frac{4}{9}$
   ☐ Elle doit être diminuée de 50%
   ♣ Aucune des propositions précédentes n'est correcte
5. Soit un mobile se déplaçant sur une droite. Le graphique ci-dessous représente la position $x$ de ce mobile en fonction du temps $t$. Si $a$ et $b$ sont deux constantes réelles strictement positives, laquelle des expressions données décrit le mieux la vitesse $v$ du mobile en fonction du temps ?
   ☐ $v(t) = at + b$
   ♣ $v(t) = -at + b$
   ☐ $v(t) = -at - b$
   ☐ $v(t) = -a$
   ☐ aucune des propositions précédentes n'est correcte