A propos du produit vectoriel et des ses composantes

Ce document complète le syllabus de théorie, sous-sous section 1.6.5 intitulée ≪ Le produit vectoriel de deux vecteurs ≫. On détaille ci-dessous les calculs menant à l'expression des composantes du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ à partir des composantes de ceux-ci, et cela dans une base orthonormée (Propriété 1.6.9)

On se place dans une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (donc on fixe une orientation). Vu la définition du produit vectoriel, on a (détail : voir cours)

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1.$$

Propriété *On a*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \;=\; (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 \;+\; (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 \;+\; (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$$

où les u_j sont les composantes de $\vec{u}$ et les v_j celles de $\vec{v}$, dans la base donnée.

Preuve. Cela se démontre en utilisant la propriété de linéarité du produit vectoriel et les valeurs de $\vec{e_j} \wedge \vec{e}_k$ pour $j, k = 1, 2, 3$.

On a successivement (justification de chaque étape : voir cours)

$$\begin{array}{rcl}
\vec{u} \wedge \vec{v} & = & \big(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3\big) \wedge \big(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3\big) \\
& = & u_1v_2\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \;+\; u_1v_3\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \;+\; u_2v_1\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \;+\; u_2v_3\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \;+\; u_3v_1\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \;+\; u_3v_2\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 \\
& = & u_1v_2\vec{e}_3 \;-\; u_1v_3\vec{e}_2 \;-\; u_2v_1\vec{e}_3 \;+\; u_2v_3\vec{e}_1 \;+\; u_3v_1\vec{e}_2 \;-\; u_3v_2\vec{e}_1 \\
& = & (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 \;+\; (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 \;+\; (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3
\end{array}$$

□

Remarques à propos de la dépendance des composantes du produit vectoriel vis-à-vis des composantes des vecteurs de départ et un moyen mnémotechnique pour mémoriser le résultat (cf cours).

F. Bastin, 25 septembre 2020 (V1 : 250920)